

# 直交する3種類のパネルを用いた 極小剛な panel-hinge フレームワークの生成アルゴリズム

岡野 知広<sup>1,a)</sup> 東川 雄哉<sup>2</sup> 加藤 直樹<sup>2</sup>

**概要：**本研究では、直交する3種類の長方形パネルに限定した剛な panel-hinge フレームワークを実現する問題を考察する。Higashikawa らは最近、極小剛な panel-hinge graph をすべて導出するアルゴリズムを提案しているが、われわれが考察するフレームワークは generic ではないので、このアルゴリズムは適用できない。そこで、panel-hinge framework を導出する新たな操作を提案し、それにもとづき、直交するパネルによるフレームワーク生成法を構築する。

**キーワード：** panel-hinge フレームワーク, panel-hinge グラフ, 組合せ剛性理論

## 1. はじめに

本研究で扱う panel-hinge フレームワークとは、ヒンジによって接続された2次元の剛なパネルの集合である(図1(a))。ここでパネルとは平面の剛体である。ヒンジとは直線で、ヒンジによって接続された2つのパネルはそのヒンジ周りの回転のみ許される。全てのパネルの動きがもともとの構造体の合同変換のみである場合、そのフレームワークは剛であるとよぶ。さらに、剛なフレームワークから任意のヒンジを1つ取り除いた場合、柔軟になるフレームワークを極小剛と呼ぶ。ここで、panel-hinge フレームワークをグラフ  $G = (V, E)$  と  $e \in E$  から  $\mathbb{R}^3$  における1次元アフィン部分空間  $\mathbf{p}(e)$  への埋め込み  $\mathbf{p}$  の組  $(G, \mathbf{p})$  として考える。 $v \in V$  はパネルに対応し、 $uv \in E$  は2つのパネル  $u, v$  をつなぐヒンジ  $\mathbf{p}(uv)$  に対応する。このとき、 $\mathbb{R}^3$  上に  $G$  が実現されたといい、このグラフ  $G$  を panel-hinge グラフとよぶ(図1(b))。このグラフを5重化し、6つの辺素な全域木を詰込み可能なグラフを剛な panel-hinge グラフとよび、任意の1辺を取り除いた場合に剛でなくなるグラフのことを極小剛な panel-hinge グラフとよぶ。

Tay [1] と Whiteley [2] はそれぞれ、一般的な body-hinge フレームワークの剛性が、body-hinge グラフにより決定されることを示した。また Katoh らによって panel-hinge フレームワークに関して、パネルを剛体として扱うことで body-hinge フレームワークと同様の議論が可能であるこ

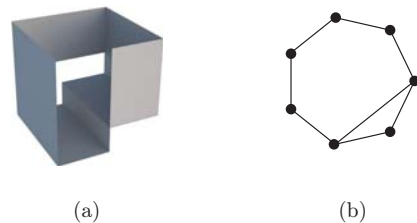


図1 (a)panel-hinge フレームワーク (b)panel-hinge グラフ  
Fig. 1 (a)panel-hinge framework (b) panel-hinge graph

とが示されている [3]。panel-hinge フレームワークの剛性行列が、全ての部分グラフにおいて最大のランクをもつときそのフレームワークは一般的であるという。panel-hinge フレームワークの剛性行列については2章で詳しく扱うこととする。

本研究で扱う直交 panel-hinge フレームワークとは、用いるパネルを直交する3種類の長方形パネルに限定した panel-hinge フレームワークのことである。直交 panel-hinge フレームワークはヒンジの配置が一般的ではない。そのため対応する panel-hinge グラフが剛だとしても実現された直交 panel-hinge フレームワークが剛ではない場合があることに注意する。

組合せ剛性理論とは、構造物の接続関係をグラフとして扱うことで、その剛性についての特徴付けを組合せ的に行う理論であり、様々な構造物の特徴付けがなされている。

本論文では開発した操作を3章で紹介し、その操作に基づいた直交 panel-hinge フレームワーク生成を提案する。ここでは垂直水平なパネルの追加を想定していることから、一般的でないヒンジ配置のパネルを追加している。しか

<sup>1</sup> 京都大学工学部建築学科

<sup>2</sup> 京都大学大学院工学研究科建築学専攻

a) as-okano@archi.kyoto-u.ac.jp

し、4章で提案するパネル追加操作により得られるフレームワークは常に剛となることを証明している。

### 1.1 背景

近年、アルゴリズムック・デザインと呼ばれる手法が再注目されている [4]。このデザイン手法により、複雑な形態を容易に創り出すことが可能となっている。しかし、構造的な合理性を持たない形態操作にすぎない場合や、建築のファサードなど表面的で2次元的な利用にとどまっている場合もみられる。

構造物が剛性を判定する問題は構造力学分野においては、剛性行列のランクを計算することによって解決がなされている。組合せ剛性理論は構造物の剛性に関する基礎的知見を与えることにとどまらず、機械設計やタンパク質の挙動シミュレーション・知的CADの開発・センサーネットワークのローカライゼーション等、90年代後半から様々な分野において応用されている [5]。

### 1.2 既往研究

剛な棒材 (bar) とピン接合 (joint) で組まれる2次元 bar-joint フレームワーク (平面トラス構造) が、極小剛であるための必要十分条件は Laman によって示されており [6]、そのようなグラフを Laman グラフとよぶ。Laman グラフに対応する bar-joint フレームワークは静定トラスに相当する。2次元のグラフを  $G = (V, E)$  とし、以下の特徴付けがなされている [6]。

**定理 1.1 (G.Laman)** 頂点数  $|V| \geq 2$  のグラフ  $G = (V, E)$  が最小の辺数で剛であるための必要十分条件は以下の条件 (Laman counts) が成り立つことである。

$$|E| = 2|V| - 3$$

$$|E(X)| \leq 2|X| - 3 \quad \forall X \subseteq V \text{ with } 2 \leq |X| \leq |V|$$

ここで  $E(X)$  とは頂点集合  $X \subseteq V$  によって誘導される辺集合を指す。

この Laman グラフを演繹的に生成する手法については、Henneberg 構築という方法が知られており、これによりすべての Laman グラフを生成できることが分かっている [7][8]。さらにマトロイドの性質を利用する [9] のアルゴリズムにより、高速に全ての Laman グラフを列挙可能であることも知られている。

3次元剛性の場合、一般的な組合せ的特徴付けが難しいことが知られている [8]。一方で特殊な3次元構造物については組合せ的な特徴付けがなされている。Tay, Whiteley らによって、body-bar, body-hinge フレームワーク (図 2(a) および (b)) といった3次元 bar-joint フレームワークの特

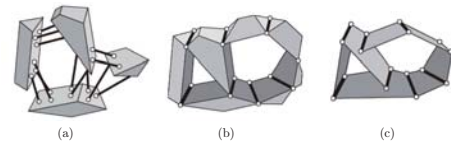


図 2 (a) body-bar フレームワーク (b) body-hinge フレームワーク (c) panel-hinge フレームワーク

Fig. 2 (a) body-bar framework (b) body-hinge framework (c) panel-hinge framework

殊な構造の特徴付けがなされている [2]。

Body-bar フレームワークとは、剛な棒材 (bar) によってピン接合でつながれた剛体 (body) の集合である。一般的なジョイント配置の body-bar フレームワークに関して、極小剛な body-bar フレームワークに対応する極小剛な body-bar グラフは、6つの辺素な全域木によって剛性を特徴づけることができることを Tay は示した [10]。また、極小剛な body-bar グラフは、6つの辺素な全域木を6つのグラフ的マトロイドの和集合とみなし、[9] のアルゴリズムを用いることですべて列挙可能である。

Katoh らは panel-hinge フレームワークに関して、パネルを剛体として扱うことで body-hinge フレームワーク (図 2(c)) と同様の議論が可能であることを示している [3]。また、Higashikawa らによって極小剛な panel-hinge グラフを列挙する操作も提案されている [11]。しかし、その操作に沿って一般的なヒンジ配置の panel-hinge フレームワークとして形態生成することは難しいとされている。

### 1.3 目的

一般的なヒンジ配置の panel-hinge フレームワークの形態生成は難しいとされている。そこで本研究では建築的にも応用が期待される、用いるパネルを直交する3種類の長方形パネルに限定した極小剛な panel-hinge フレームワークを実現する問題を考える。極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作は提案されている [11] が、極小剛な panel-hinge フレームワークを生成する操作は提案されていない。そこで新たに極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作を開発し、その操作に基づいた剛な直交 panel-hinge フレームワーク生成を提案する。

## 2. 準備

この章で述べる内容は Katoh らによる論文 [3] による。

### 2.1 剛性行列

3次元の場合、パネルの合同変換は  $4 \times 4$  の行列  $M \in SE(3)$  で書けるということが知られている。ここで  $SE(3)$  とは an element of special Euclidean group のことを指す [12]。今2つの body  $B$  と  $B'$  がヒンジ  $H$  によって接続されている構造を考える。 $H$  の両端点の同次座標

を  $\mathbf{p}_1 = (p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}, 1)$  と  $\mathbf{p}_2 = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$  とする。そして  $M, M'$  がパネル  $B$  と  $B'$  に割り当てられていると考える。このときヒンジによる制約は  $M\mathbf{p}_1 = M'\mathbf{p}_1$  と  $M\mathbf{p}_2 = M'\mathbf{p}_2$  と定義される。この等式を微分することで以下の式が得られる。

$$I\mathbf{p}_i = I'\mathbf{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (1)$$

$I$  と  $I'$  は  $B, B'$  に割り当てられた無限小動きとみなすことができる。  $I$  は  $\begin{pmatrix} R & v^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とあらわすことができる。と知られている。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

ここで  $R$  は  $R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$  である。同様に  $I'$  も  $\begin{pmatrix} R' & v'^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  と表わすことができる。(1) に代入して整理すると以下の式が得られる。

$$(\omega - \omega', v - v') = t \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c} p_{1,x} & 1 & p_{1,y} & 1 & p_{1,z} & 1 \\ \hline p_{2,x} & 1 & p_{2,y} & 1 & p_{2,z} & 1 \\ \hline p_{1,y} & p_{1,z} & p_{2,y} & p_{2,z} & p_{1,x} & p_{1,y} \\ \hline p_{2,y} & p_{2,z} & p_{2,x} & p_{2,y} & p_{1,x} & p_{1,y} \end{array} \right) \quad (2)$$

(2) の左辺はヒンジでつながれた両側の剛体の無限小動き (infinitesimal motion) を表わしており、右辺の 6 次元ベクトルはヒンジ  $H$  による制約を表している。これを  $H$  による 2-extensor  $C(H)$  と呼ぶ。

3 次元 body-hinge フレームワーク  $(G, \mathbf{p})$  をグラフ  $G = (V, E)$  と埋め込み  $\mathbf{p}$  のペアとし、各々の辺  $e \in E$  に関して両端の座標の組を与える  $\mathbf{p}(e)$  を定義する。上記の議論より、 $(G, \mathbf{p})$  の無限小動き (infinitesimal motion) は 6 次元ベクトルの割り当て  $S \rightarrow \mathbb{R}^6$  で定義され

$$S(u) - S(v) \text{ はすべての } e = uv \in E \text{ で } C(\mathbf{p}(e)) \text{ に比例する} \quad (3)$$

すべての  $u, v \in V$  について  $S(u) = S(v)$  ならば無限小動き  $S$  は自明な動きと呼ばれ、 $(G, \mathbf{p})$  の全ての無限小動きが自明な動きであるとき  $(G, \mathbf{p})$  は無限小剛 (infinitesimally rigid) という。

(3) より  $C(\mathbf{p}(e))$  に直交する 5 つの独立したベクトル  $\{r_1(\mathbf{p}(e)), r_2(\mathbf{p}(e)), \dots, r_5(\mathbf{p}(e))\}$  をとってくと

$$(S(u) - S(v)) \cdot r_i(\mathbf{p}(e)) = 0$$

となることがわかり、次の式で書き換えることができる。

$$e = uv \begin{pmatrix} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \mathbf{0} \cdots & r(\mathbf{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots & -r(\mathbf{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ S(u) \\ \vdots \\ S(v) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

ここで

$$r(\mathbf{p}(e)) = \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{p}(e)) \\ \vdots \\ r_5(\mathbf{p}(e)) \end{pmatrix}.$$

である。

式 (4) 左辺の  $5|E| \times 6|V|$  の行列

$$e = uv \begin{pmatrix} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \mathbf{0} \cdots & r(\mathbf{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots & -r(\mathbf{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

を剛性行列  $R(G, \mathbf{p})$  という。

また、infinitesimal motion の集合を  $Z(G, \mathbf{p})$  とすると、 $Z(G, \mathbf{p})$  の次元は少なくとも 6 となるので、剛性行列  $R(G, \mathbf{p})$  のランクは多くても  $6|V| - 6$  となる。とくにランクが  $6|V| - 6$  のとき  $(G, \mathbf{p})$  は無限小剛 (infinitesimally rigid) であるという。

## 2.2 一般的なヒンジ配置の剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付け

これまですべてのヒンジ配置について剛性判定が可能な手法について述べてきた。一方で剛性行列のランク計算は、行列のサイズが大きくなるにつれて困難となる。そのため、一般的なヒンジ配置を前提とした組合せ的な特徴付けを用いる。ここで、一般的なヒンジ配置の剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付けとして、以下の命題が知られている。

**命題 2.1 (Katoh et al.)** [3] グラフ  $G$  の各辺を 5 本の多重辺で置き換えたグラフを  $\tilde{G}$  とする。 $\tilde{G}$  が 6 個の辺素な全域木をもつことは、 $G$  が  $\mathbb{R}^3$  において一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワークとして実現可能であることの必要十分条件である。

この性質を利用して、[13] のペブルゲームアルゴリズムにより、panel-hinge グラフの剛性が判定可能である。

## 3. 極小剛な panel-hinge グラフの演繹的な生成操作

単純グラフである頂点数  $n (n \geq 3)$  の極小剛な panel-hinge グラフ  $G = (V, E)$  について考える。 $n = 3$  のグラフ

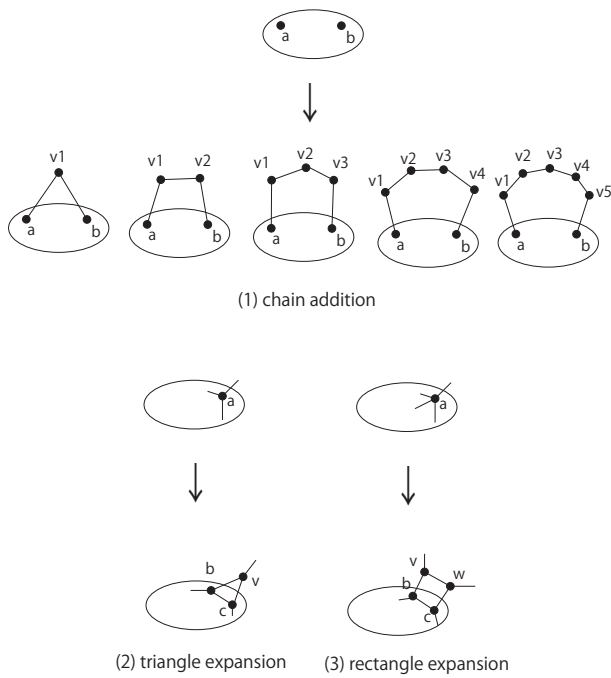


図 3 極小剛なパネルヒンジグラフを演繹的に導出する操作  
Fig. 3 Operations which inductively generate minimally panel-hinge graphs

は 3 角形グラフである。ここで  $k$ -chain というものを定義する。  $k$ -chain とは辺と頂点が  $e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k$  と交互に連なっているものであり  $e_1$  は  $v_1$  と、  $e_k$  は  $v_{k-1}$  と連結しており、  $k \geq 3$  のとき、  $2 \leq i \leq k-1$  である  $e_i$  は  $v_{i-1}$  と  $v_i$  に連結している。また、  $v_1, \dots, v_{k-1}$  の次数はすべて 2 である。このときより大きなグラフ  $G' = (V', E')$  を生成する、以下の 3 つの操作を定義する。(図 3)

操作 1. (chain addition)  $a, b \in V$  に ( $a = b$  でもよい)  $k$ -chain ( $k = 2, \dots, 6$ ) を足し極小なら出力する。極小でないなら  $a, b$  間に辺があるかどうか確認し、ないなら出力しない。もしあればその辺を削除し極小剛であるか確認し極小剛なら出力する。

操作 2. (triangle expansion) 任意の頂点  $a \in V$  を選びその頂点を頂点  $v, b, c$  をもつ 3 角形グラフに置き換える。  $b, c$  は  $a$  に隣接していた点と少なくとも一つ隣接している。  $a$  につながっていた残りの点は  $v, b, c$  のいずれかにつながっている。できたグラフが極小剛のときのみこの操作を適用する。

操作 3. (rectangle expansion) 任意の頂点  $a \in V$  を選びその頂点を頂点  $v, w, b, c$  をもつ 4 角形グラフに置き換える。  $b, c$  は  $a$  に隣接していた点と少なくとも一つ隣接している。  $a$  につながっていた残りの点は  $v, w, b, c$  のいずれかにつながっている。できたグラフが極小剛のときのみこの操作を適用する。

定理 3.1 極小剛な panel-hinge グラフが与えられたとき、

上記の 3 つの操作によってできるグラフもまた極小剛な panel-hinge グラフである

### 証明

操作 1. (chain addition) 極小剛な body-hinge グラフ  $G = (V, E)$  に操作 1.(chain addition) を行ったグラフ  $G' = (V', E')$  が剛であることを示す。  
 $G$  を 5 重化したグラフを  $\tilde{G}$  とする。  $G'$  を 5 重化した  $\tilde{G}'$  が 6 つの辺素な全域木をもつためには  $k$ -chain を 5 重化した辺に  $6(k-1)$  本の辺が必要である、よってグラフが剛であるためには  $5k \geq 6(k-1)$  でなければならない。つまり  $2 \leq k \leq 6$  のとき剛だということが分かる。

操作 2. (triangle expansion) 極小剛な body-hinge グラフ  $G = (V, E)$  に操作 2.(triangle expansion) を行ったグラフ  $G' = (V', E')$  が剛であることを示す。

3 角形のグラフを  $F$  とすると  $F$  は極小剛である。よって  $F$  を 5 重化したグラフ  $\tilde{F}$  には 6 本の辺素な全域木がある。  $\tilde{G}$  の全域木と  $\tilde{F}$  の全域木を足したものはあきらかに  $\tilde{G}'$  の全域木になっている。よって  $G'$  は剛であることが分かる。

操作 3. (rectangle expansion) 極小剛な body-hinge グラフ  $G = (V, E)$  に操作 3.(triangle expansion) を行ったグラフ  $H = (V', E')$  が剛であることを示す。

4 角形のグラフを  $F$  とすると  $F$  は極小剛である。よって  $F$  を 5 重化したグラフ  $\tilde{F}$  には 6 本の辺素な全域木がある。  $\tilde{G}$  の全域木と  $\tilde{F}$  の全域木を足したものはあきらかに  $\tilde{G}'$  の全域木になっている。よって  $G'$  は剛であることが分かる。

極小性は操作の定義によって保証されている。

あるグラフ  $G = (V, E)$  が与えられている。3 色を  $X, Y, Z$  とする。各点にはちょうど一つの色が割り当てられているとする。  $v \in V$  に割り当てられている色を  $color(v) : V \rightarrow \{X, Y, Z\}$  と表記する。任意の辺  $uv \in E$  に対して  $color(u) \neq color(v)$  であるような色の割り当てがあるときグラフ  $G$  は 3-colorable であるという。

定理 3.2 単純かつ極小剛な panel-hinge グラフは 3-colorable である

この定理の証明は、最近 Higashikawa らの論文 [11] で開発されたすべての単純かつ極小剛な panel-hinge グラフ

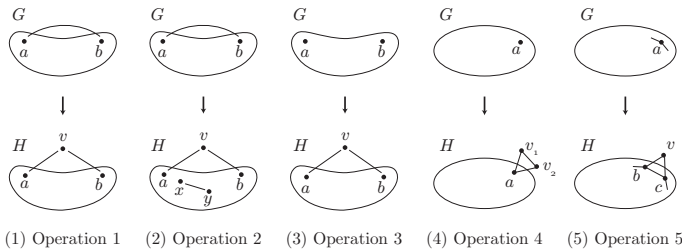


図 4 極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作 [11]  
Fig. 4 Operations which inductively construct a minimally rigid body-hinge simple graph. [11]

を演繹的に生成する操作 (図 4) に基づいて行われる。以下にその操作を記す。

頂点数  $n \geq 3$  の極小剛な panel-hinge グラフ  $G = (V, E)$  を考える。  $n = 3$  のグラフは 3 角形グラフである。このとき、より大きなグラフ  $G' = (V', E')$  を生成する、5 つの操作を以下のように定義する (図 4)。

操作 1 (edge-split): ある辺  $ab$  を選び、  $ab$  に新たに頂点  $v$  を追加する。ただし、この操作は、操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(1))。

操作 2 (edge-split plus 1-addition):  $(D - 1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D(|\mathcal{P}| - 1)$  を満たす  $V$  の頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する場合に、この操作を行う。ここで、  $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ ,  $\delta_G(\mathcal{P})$  を頂点分割間の辺の集合とする。ある辺  $ab \in \delta_G(\mathcal{P})$  に対して、新たに頂点  $v$  を追加する。  $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$  とし、  $x \in V_i, y \in V_j$  となる頂点  $x, y \in V$  を見つけ、辺  $xy$  を  $E \cup \{va, vb\} \setminus \{ab\}$  に追加してできるグラフ  $G'$  が極小剛となる場合、辺  $xy$  を追加する (図 4(2))。

操作 3 (vertex 2-addition): 新たに頂点  $v$  を追加し、2 つの頂点  $a, b$  を選択し、辺  $va, vb$  を加える。ただし、この操作は、操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(3))。

操作 4 (triangle-addition): 任意の頂点  $v$  を選び、新しく頂点  $v_1, v_2$  および辺  $v_1a, v_1v_2, v_2a$  を加える (図 4(4))。

操作 5 (triangle-expansion): 任意の頂点  $a$  を選ぶ。  $a$  が次数  $d$  をもつとする。  $a$  を 3 角形グラフ  $v, b, c$  で置き換えたグラフを  $G'$  とする。ここで  $b$  と  $c$  は少なくとも 1 つの  $a$  の隣接点と接続しており、  $v$  は  $b$  と  $c$  に隣接している。この操作は、操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(5))。

定理 3.2 の証明

Higashikawa らの操作に沿って帰納的に証明する。  $n - 1 (n \geq 4)$  点までの極小剛な panel-hinge グラフが 3-

colorable とする。上記の 5 つの操作によってできる極小剛なグラフ  $G' = (V', E')$  が 3-colorable ということを示す。3 角形グラフは明らかに 3-colorable である。

操作 1 (edge-split):ある辺  $ab \in E$  を選び、  $ab$  に新たに頂点  $v$  を追加する。  $color(v) \neq color(a), color(v) \neq color(b)$  とすることによって  $G'$  は 3-colorable といえる。

操作 2 (edge-split plus 1-addition): 辺  $xy$  を追加する前のグラフは操作 1 の証明より 3-colorable である。  $x \in V_i, y \in V_j$  は  $i \neq j$  を満たせば  $x, y$  の選び方は任意でよい。またこのときのグラフ  $G$  は最小サイクルが 6 以上ということが知られている。  $color(x) \neq color(y)$  のときは  $G'$  は 3-colorable といえる。  $color(x) = color(y)$  の場合  $y$  と隣接する頂点  $z \notin V_i$  については  $color(y) \neq color(z)$  である。よって  $color(x) \neq color(z)$  である。つまり辺  $xz$  を追加すれば  $G'$  は 3-colorable といえる。

操作 3 (vertex 2-addition): 新たに頂点  $v$  を追加し、2 つの頂点  $a, b$  を選択し、辺  $va, vb$  を加える。  $color(v) \neq color(a), color(v) \neq color(b)$  とすることによって  $G'$  は 3-colorable といえる。

操作 4 (triangle-addition): 任意の頂点  $v$  を選び、新しく頂点  $v_1, v_2$  および辺  $v_1a, v_1v_2, v_2a$  を加える。  $color(v_1) \neq color(a), color(v_1) \neq color(v_2), color(v_2) \neq color(a)$  とすることによって  $G'$  は 3-colorable といえる。

操作 5 (triangle-expansion)  $a \in V$  の隣接点集合を  $N(a)$  とする。  $color$  に従って  $N(a)$  を 3 分割する。  $N_x(a) = \{i | i \in N(a), color(i) = x, x \in \{X, Y, Z\}\}$  とする。  $a$  を expansion した 3 角形グラフの頂点をそれぞれ  $v, b, c$  とし、  $color(v) = X, color(b) = Y, color(c) = Z$  とする。  $N_X(a)$  を  $b$  と  $N_Y(a)$  を  $v$  と  $N_Z(a)$  を  $c$  とそれぞれつなぐことによって  $G'$  は 3-colorable であるといえる。

以上より単純かつ極小剛な panel-hinge グラフは 3-colorable であるといえる。

定理 3.3 単純かつ極小剛な panel-hinge グラフは直交パネルによる panel-hinge フレームワークとして実現可能である。

証明

定理 3.2 より単純かつ極小剛な panel-hinge グラフは 3-coloring であると言える。このことより、各頂点に  $X, Y, Z$  がラベリングされた単純かつ極小剛な panel-hinge グラフ  $G = (V, E)$  を考える。以下では  $X$  とラベリングされた頂点に対応するパネルを  $yz$  平面と平行に配置し、X-panel

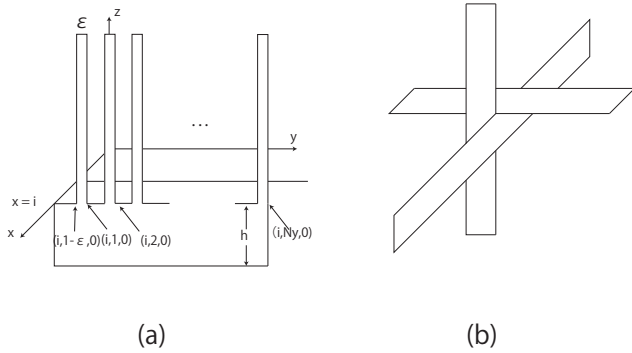


図 5 (a)  $x = i$  に配置される X-panel (b) いくつものパネルも交差しない

Fig. 5 (a) Illustration of an X-panel located at  $x = i$   
(b) any panels never intersect each other

と呼ぶ。ここで、 $Y$  とラベリングされた頂点と  $Z$  とラベリングされた頂点の間に辺が存在するとき、対応するヒンジは  $x$  軸方向に設置されるので  $x$ -hinge と呼び、対応する辺に  $x$  とラベリングする。  $y$ -hinge,  $z$ -hinge も同様に定義し、対応する辺をそれぞれ  $y, z$  とラベリングする。ラベリングされた頂点の集合をそれぞれ  $V_X, V_Y, V_Z$  とする。また、ラベリングされた辺の集合をそれぞれ  $E_x, E_y, E_z$  とする。以下では  $|V_X|$  枚の X-panel を  $x = 1, 2, \dots, |V_X|$  に配置することを考える。1 枚の X-panel は、図 5 (a) のように 1 枚の長方形パネル (以下胴パネルと呼ぶ) に  $|V_Y|$  枚の長方形パネル (以下足パネルと呼ぶ) が平行に接続する形状を持つ。  $i$  枚目の胴パネルは幅  $|V_Y|$ 、高さ  $h (h > 0)$  であり、  $(i, 0, 0), (i, |V_Y|, 0), (i, |V_Y|, -h), (i, 0, -h)$  を角とするように配置される。また  $i$  枚目の胴パネルに接続する  $j$  本目の足パネルは幅  $\epsilon (0 < \epsilon < 1)$ 、高さ  $|V_Z|$  であり、  $(i, j, 0), (i, j - \epsilon, 0), (i, j - \epsilon, |V_Z|), (i, j, |V_Z|)$  を角とするように配置される。これを  $Y$ -panel,  $Z$ -panel についても同様に配置する。するとこれらのパネルは接することはあるが交差しないことが分かる (図 5(b))。ここで  $V_X$  の頂点にそれぞれ番号  $1, 2, \dots, |V_X|$  を付ける。同様に  $V_Y, V_Z$  にもそれぞれ番号を付ける。また  $E_x$  の辺にもそれぞれ番号  $1, 2, \dots, |E_x|$  を付ける。同様に  $E_y, E_z$  の辺にもそれぞれ番号を付ける。ここで番号  $p$  が与えられた  $V_X$  の頂点と番号  $q$  が与えられた  $V_Y$  の頂点が番号  $r$  を与えられた  $E_z$  の辺でつながっているとしよう (図 6(a))。このとき図 6(b) の右のように、ヒンジの端点を  $(p, q, r)$  と  $(p, q, r - \epsilon)$  とすることにより対応する  $z$ -hinge が実現できる。同様の方法で単純かつ極小剛な panel-hinge グラフは直交パネルによる panel-hinge フレームワークとして実現可能であるといえる。□

#### 4. 長方形直交パネルの追加

定理 3.3 では、直交パネルによって、極小剛な panel-hinge グラフが実現できることを証明したが、実現されたフレームワークが剛であることを保証していない。また、用いら

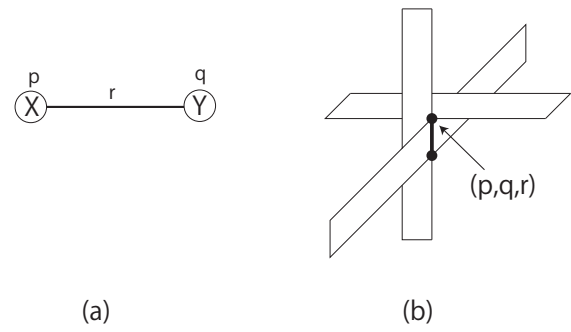
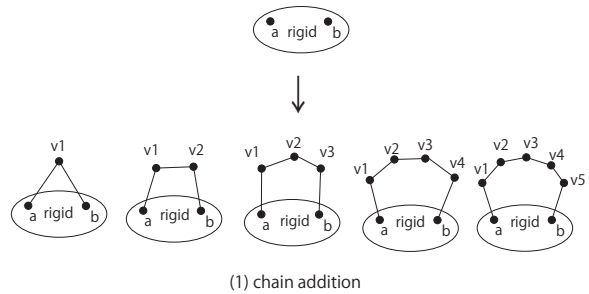


図 6 (a) 番号  $p$  が与えられた  $V_X$  の頂点, 番号  $q$  が与えられた  $V_Y$  の頂点, および番号  $r$  を与えられた  $E_z$  の辺  
(b) 対応する  $z$ -hinge の実現

Fig. 6 (a) A vertex in  $V_X$  with number  $p$ , a vertex in  $V_Y$  with number  $q$ , and an edge in  $E_z$  with number  $r$   
(b) realization of the corresponding  $z$ -hinge



(1) chain addition

図 7 chain addition

Fig. 7 chain addition

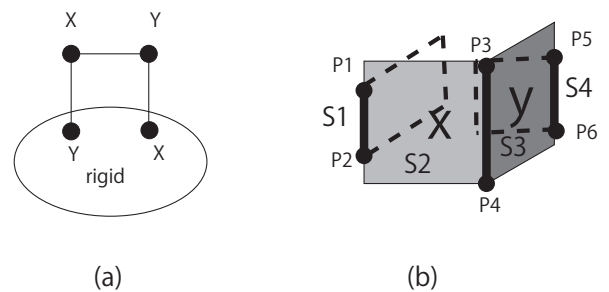


図 8 2面追加

Fig. 8 2-panel addition

れるパネルの形状が長方形であることも保証していない。そこで、本節では、用いるパネルが長方形であり、かつ剛であることが保証された直交 panel-hinge フレームワークを演繹的に生成する手法を開発する。しかしながら、得られたフレームワークが極小剛であることは保証していない。

図 7 の chain addition に対応して長方形直交パネルの追加をする。ヒンジの配置が一般的なならば chain addition は剛性を保つが直交パネルの場合ヒンジの配置が一般的ではないため 2.1 章の議論をもとに剛性を保つか調べる必要がある。

#### 4.1 2面追加

図8のようなパネルの追加を考える．ヒンジの両端の座標をそれぞれ  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_1, y_1, z_2)$ ,  $P_3 = (x_1, y_2, 1)$ ,  $P_4 = (x_1, y_2, 0)$ ,  $P_5 = (x_2, y_1, z_3)$ ,  $P_6 = (x_2, y_2, z_4)$  とする．

ヒンジ  $P_1P_2$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(1))$ ,  $P_3P_4$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(2))$ ,  $P_5P_6$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(3))$  とする (2) の右辺より

$$C(\mathbf{p}(1)) = (0, 0, z_1 - z_2, y_1(z_2 - z_1), x_1(z_1 - z_2), 0)$$

$$C(\mathbf{p}(2)) = (0, 0, 1, -y_2, x_1, 0)$$

$$C(\mathbf{p}(3)) = (0, 0, z_3 - z_4, y_2(z_4 - z_3), x_2(z_3 - z_4), 0)$$

ヒンジ  $P_1P_2$  の両側のパネルの無限小動きをそれぞれ  $S_1$ ,  $S_2$ , ヒンジ  $P_3P_4$  の両側のパネルの動きをそれぞれ  $S_2$ ,  $S_3$ , ヒンジ  $P_5P_6$  の両側のパネルの動きをそれぞれ  $S_3$ ,  $S_4$  とすると (2) より

$$S_2 - S_1 = t_1 C(\mathbf{p}(1))$$

$$S_3 - S_2 = t_2 C(\mathbf{p}(2))$$

$$S_4 - S_3 = t_3 C(\mathbf{p}(3))$$

また  $S_1$  と  $S_4$  は同じ剛体上についているので

$$S_1 - S_4 = 0$$

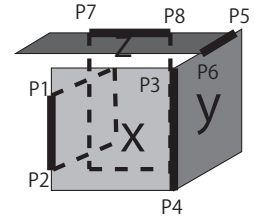
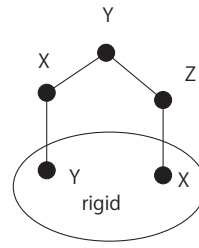
辺々足すことで

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= t_1 C(\mathbf{p}(1)) + t_2 C(\mathbf{p}(2)) + t_3 C(\mathbf{p}(3)) \\ &= (0, 0, t_1(z_1 - z_2) + t_2 + t_3(z_3 - z_4), \\ &\quad t_1 y_1(z_2 - z_1) - t_2 y_2 + t_3 y_2(z_4 - z_3), \\ &\quad t_1 x_1(z_1 - z_2) + t_2 x_1 + t_3 x_2(z_3 - z_4), 0) \end{aligned}$$

$x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$ ,  $z_1 \neq z_2$ ,  $z_3 \neq z_4$  とすると  $t_1 = t_2 = t_3 = 0$  となり  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$  となることが分かり、剛であることが分かる．

#### 4.2 3面追加

図9のような長方形パネルの追加を考える．ヒンジの両端の座標をそれぞれ  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_1, y_1, z_2)$ ,  $P_3 = (x_1, y_2, 1)$ ,  $P_4 = (x_1, y_2, 0)$ ,  $P_5 = (x_2, y_2, z_3)$ ,  $P_6 = (x_3, y_2, z_3)$ ,  $P_7 = (x_4, y_3, z_3)$ ,  $P_8 = (x_4, y_4, z_3)$  とする．



(a) (b) 図9 3面追加

Fig. 9 3-panel addition

ヒンジ  $P_1P_2$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(1))$ ,  $P_3P_4$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(2))$ ,  $P_5P_6$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(3))$ ,  $P_7P_8$  による 2-extensor を  $C(\mathbf{p}(4))$  とすると (2) の右辺より

$$C(\mathbf{p}(1)) = (0, 0, z_1 - z_2, y_1(z_2 - z_1), x_1(z_1 - z_2), 0)$$

$$C(\mathbf{p}(2)) = (0, 0, 1, -y_2, x_1, 0)$$

$$C(\mathbf{p}(3)) = (x_2 - x_3, 0, 0, 0, z_3(x_3 - x_2), y_2(x_2 - x_3))$$

$$C(\mathbf{p}(4)) = (0, y_4 - y_3, 0, z_3(y_2 - y_3), 0, x_4(y_4 - y_3))$$

ヒンジ  $P_1P_2$  の両側のパネルの無限小動きをそれぞれ  $S_1$ ,  $S_2$ , ヒンジ  $P_3P_4$  の両側のパネルの動きをそれぞれ  $S_2$ ,  $S_3$ , ヒンジ  $P_5P_6$  の両側のパネルの動きをそれぞれ  $S_3$ ,  $S_4$ , ヒンジ  $P_7P_8$  の両側のパネルの動きをそれぞれ  $S_4$ ,  $S_5$  とすると (2) より

$$S_2 - S_1 = t_1 C(\mathbf{p}(1))$$

$$S_3 - S_2 = t_2 C(\mathbf{p}(2))$$

$$S_4 - S_3 = t_3 C(\mathbf{p}(3))$$

$$S_5 - S_4 = t_4 C(\mathbf{p}(4))$$

また  $S_1$  と  $S_5$  は同じ剛体上についているので

$$S_1 - S_5 = 0$$

辺々足すことで

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= t_1 C(\mathbf{p}(1)) + t_2 C(\mathbf{p}(2)) + t_3 C(\mathbf{p}(3)) + t_4 C(\mathbf{p}(4)) \\ &= (t_3(x_2 - x_3), t_4(y_4 - y_3), \\ &\quad t_1(z_1 - z_2) + t_2, t_1 y_1(z_2 - z_1) - t_2 y_1 + t_3 z_3(y_3 - y_4), \\ &\quad t_1 x_1(z_1 - z_2) + t_2 x_1 + t_3 z_3(x_3 - x_2), \\ &\quad t_3 y_2(x_2 - x_3) + t_4 x_4(y_4 - y_3)) \end{aligned}$$

$x_2 \neq x_3$ ,  $y_1 \neq y_2$ ,  $y_3 \neq y_4$ ,  $z_1 \neq z_2$  とすると  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$  となり  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$  となることが分かり、剛であることが分かる．

### 4.3 4面, 5面追加

上述と同様の議論で4面, 5面追加まで剛となるような長方形直交パネルの追加があることがわかる。

## 5. 本研究の成果

極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作を新たに開発し, その操作に基づいて極小剛な直交 panel-hinge フレームワーク生成を提案した。このとき, 提案するパネル追加操作により得られる直交 panel-hinge フレームワークは常に剛となるようなパネルの追加が存在することを証明している。

## 6. 課題

本論文の3節で説明した極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作が全ての極小剛な panel-hinge グラフを生成できるかどうかは未解決である。また, 任意の panel-hinge グラフが与えられたときにそのグラフに対応する剛な直交 panel-hinge フレームワークが実現できるかどうかは未解決である。

謝辞 定理3.3はSergey Bereg氏との議論による。ご助言頂いたこと深謝する。

### 参考文献

- [1] T.Tay: Linking  $(n - 2)$ -dimensional panels in  $n$ -space II:  $(n - 2, 2)$ -frameworks and body and hinge structures. *Graphs and Combinatorics*, 5(1), pp.245-273, 1989.
- [2] W.Whiteley: The union of matroids and the rigidity of frameworks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1(2), pp.237-255, 1988.
- [3] N.Katoh, S.Tanigawa: A Proof of the Molecular Conjecture. *Discrete Comput Geom*, 45, pp.647-700, 2011.
- [4] 日本建築学会編: アルゴリズムック・デザイン 建築・都市の新しい設計手法, 鹿島出版会, 2009.
- [5] S.Tanigawa: 構造物の組合せ剛性: 計数条件とグラフ分割. *Proceeding of the Twenty-second RAMP Symposium*, pp.31-48, 2010.
- [6] G.Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering mathematics*, 4(4), pp.331-340, 1970.
- [7] L.Henneberg: Die graphische statik der starren system. Leipzig, 1911
- [8] W.Whiteley.:Some matroids from discrete applied geometry. *Contemporary Mathematics*, Vol.197,pp.171-311, 1996.
- [9] T.Uno.:A new approach for speeding up enumeration algorithm and its application for matroid bases. *Proc.of COCOON 1999*, LNCS 1627, pp.349-359, 1999.
- [10] T.Tay.:Rigidity of multi-graph.I:linking rigid bodies in  $n$ -space. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol.36, No.1, pp.95-112, 1984.
- [11] Y.Higashikawa, N.Katoh, and Y.Kobayashi: An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs. *Proc.of COCOA 2013*, LNCS 8287, pp.165-177, 2013.
- [12] J.Selig:Geometric Fundamentals of Robotics , 2nd edn.

- Springer, Berlin (2004)
- [13] A.Lee, I.Streinu: Pebble game algorithms and sparse graphs, *Discrete Mathematics*, 308, Elsevier, pp.1425-1437, 2008.