一般化三並べの変種：負け型のペアは勝てるのか？

八　鍬　友　貴[†1]　本　田　耕　一[†1]　篠　原　　　歩[†1]

フランク・ハラリイは三目並べの一般化として，碁盤目に交互に石を置きながら予め定められたある型を先に作った方が勝ちというゲームを提案し，先手に必勝戦略があるものを勝ち型，そうでないものを負け型と定義した．本論文では，この変種として，単独では負け型となる 2 種類を組み合わせ，そのどちらかの形を先に作るという新たなゲームを提案する．単独では負け型になる 12 種類の型の組み合わせ 66 組のうち，24 組が勝ち型に，38 組が負け型になることを証明する．また残る 4 組についても，後手の応手として有用な畳敷き戦略では負け型の証明ができないことを示す．

A variant of generalized ticktactoe : Can a pair of losers win?

TOMOKI YAKUWA ,[†1] KOICHI HONDA [†1] and AYUMI SHINOHAR[†1]

Frank Harary introduced achievement games for polyominoes as generalized ticktacktoe. Two players alternately mark cells on a board, and the player who first achieves a given polyomino wins. The polyomino itself is called a *winner* if there exists a strategy for the first player to win. Otherwise, it is called a *loser*. In this paper, we propose a new variant of the game. We consider a pair of losers in the standard games, and each player tries to achieve either of the pair to win the game. We show that among all the 66 pairs of 12 losers, 24 pairs are winners and 38 pairs are losers. We also prove that all the unsolved 4 pairs are *paving winners*: if the second player is restricted to use paving strategies, the first player wins.

1. はじめに

フランク・ハラリイ[1)2)3)] に提案された一般化三並べは，碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた，連結した石で定義されるある形を，回転と反転を許して，先に作った方が勝ちというゲームである．両者が最善を尽くしたとき，先手必勝である形を「勝ち型」，無限に続けても決着がつかない形を「負け型」と呼ぶ．なおゲームの性質上，後手必勝ではありえない．これまでの研究では，必勝手順を示すことや計算機によって勝ち型に分類された形と畳敷き戦略により負け型に分類されてきた形とが知られている．また，勝敗が未解明な Snaky と呼ばれる形も存在する．

本研究では，それらの中でも負け型に着目し，単独では負け型になってしまう形について，その二つ組を定義し，「二つ組のどちらかの形を先につくる」という新たなゲームＯＲを提案し，それらの二つ組すべてについて勝敗判定を行った．なお，勝ち型の証明には先手必勝手順を示すことで，また負け型の証明には畳敷き戦略を利用することで解を得た．なお未解明に関しては，後手が畳敷き戦略をとった場合には勝ち型であることも併せて確認した．

まず，2 章でフランク・ハラリイに提案された一般化三並べと「勝ち型」,「負け型」について紹介し，続く 3 章では，その「負け型」と畳敷き戦略の関係について紹介する．そして 4 章で新ゲームＯＲを提案し，5 章以下で，その考察として勝敗判定と証明を与える．証明方法に関しては,「勝ち型」についてはまず 5 章で，先手・後手の最初の 2 手に対称性を考慮した置き方を紹介し，さらに続けて，各々の二つ組に対して先手がこの盤面を作ることができれば必ず勝てるという必勝パターンと 3 手目以降の決着までの流れについてを併せて示す．一方,「負け型」については，二つ組に共通した畳を見つけることで証明できた結果を 6 章に示している．また 7 章では，勝ち型とも負け型とも言えなかった未解明の二つ組にも，ある条件のもとでは負け型にならないとして考察を加える．以後の図では特に断りがなければ，すべて先手が黒石，後手が白石として説明している．

2. 一般化三並べ

フランク・ハラリイに提案された一般化三並べとは，盤面の大きさが無限大の碁盤状の盤面に，二者が交互

†1 東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

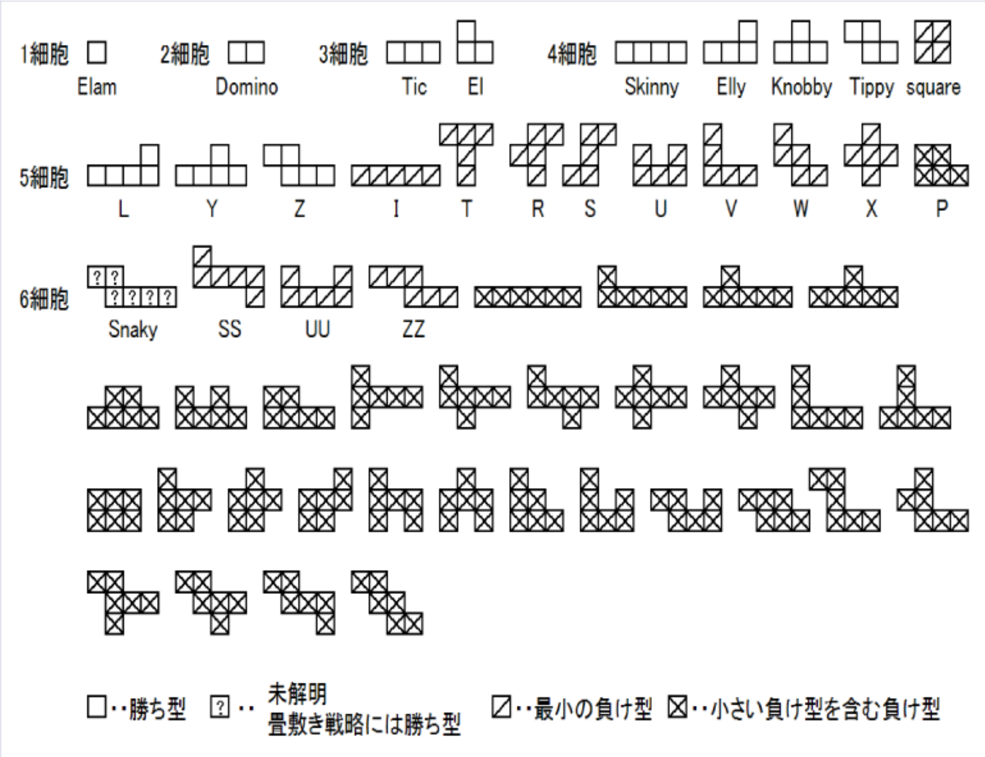

図 1　一般化三並べの形の一覧

に石を一つずつ置き，予め定められた，連結した石で定義されるある形を，斜めは許さずに回転と反転を許して，先に作った方が勝ちというゲームである．予め定められたある形には様々なものがあり，本研究ではその様々な形について研究している．ここでは，その形を作るのに必要とされる石の数を細胞数とし，その細胞数によって分類された一般化三並べの様々な形の一覧を図 1 に示す．

2.1　勝　ち　型

両者が最善を尽くしたとき、先手必勝である形を「勝ち型」と呼ぶ．勝ち型には，図 1 で示されるように，1 細胞から 5 細胞までの合計 11 個が知られていて，これらの形は単独でも先手が必ず勝てる形である．なお証明に関しては，先手必勝手順を示すことや計算機によって計算させる方法などが知られている．[4)5)]

2.2　負　け　型

両者が最善を尽くしたとき，無限に続けても決着がつかない形を「負け型」と呼ぶ．負け型には，図 1 で示されるように，4 細胞以上から存在し，6 細胞以上になると，5 細胞以下の小さな負け型を含んでいるために明らかに負け型に分類されるものも多く存在する．さらに，7 細胞以上になると必ず小さな負け型を含んでいる．これらの形は単独では絶対に勝つことができない形だとも言える．

本研究では，負け型の中でも図 1 で示されるような最小単位の負け型に着目している．なお，最小単位の負け型以外はどれも最小単位の負け型の形を少なくとも 1 つは含んでいる．証明に関しては，後手の引き分け戦略として有効な畳敷き戦略を用いて示す方法が知られている．

2.3　未　解　明

勝敗について未解明な形も 1 つだけ存在していて，図 1 で示されている 6 細胞の Snaky である．なお他の 6 細胞に関しては，図 1 に示されている通りすべて負け型となっている．また，Snaky に関しては後手が畳敷き戦略の場合には負け型にならないことなどが知られている．[3)6)7)4)8)]

3.　負け型と畳敷き戦略

前章で負け型について紹介したが，その証明に関しては，畳敷き戦略がよく用いられている．畳敷き戦略とは，後手の引き分け戦略として有名で，碁盤状の盤面に 2 マス× 1 マスの「畳」を敷きつめたものに対して，後手は必ず先手の石が置かれた「畳」のもう一方に，1 対 1 対応で置いていくというものである．その後手の打ち方を図 2 に示している．

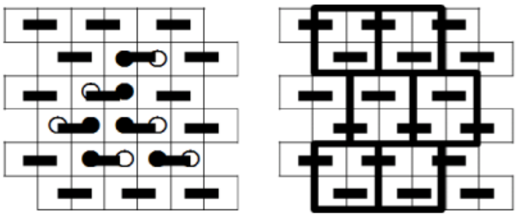

図 2　畳敷き戦略における先手と後手の打ち方とその有効性を示す Square での一例

3.1　畳敷き戦略の証明

盤面に予め定められたある形を配置するとき，どのように置いてもその形の中に必ず畳が 1 枚以上入ってしまうとき，そのある形は負け型となってしまう．ある形の中に畳を 1 枚以上含むということは，配置した盤上にその形を決して作れないということである．ある形をどのように置いても畳を 1 枚以上含むということは，盤上にその形は配置できないということなので，畳敷き戦略の有効性がわかる．実際に，狭い範囲ではあるが Square を盤上に配置したときの有効性を示す一例を図 2 に示す．確認として，図 2 のどの Square の囲みの中にも，必ず 1 枚以上畳が入っているので，この畳敷きで Square が防げ，負け型に分類されてしまうことがわかる．なお厳密には，畳敷きの規則性などを考慮したうえで必要な盤面の広さを求め，どのように置いてもある形の中に畳が 1 枚以上入ってしまうことを確認できれば，証明として十分である．

3.2　畳敷きと負け型の関係

二つ組に対しての考えなければならない必要な盤面の広さは無視すると，畳の敷き方自体は無限に考えられるが，一般的に有効な畳敷きとして 5 つがよく知られいる．また，1 つの畳敷きで複数の形が負け型にされてしまうことも多々ある．その 5 つの畳敷きとそれによって負け型に分類されてしまう形をまとめた一覧を表 1 に示す．何回も負け型として出てくる形は，複数の畳敷きで防げる形であると言える．

4.　新ゲームＯＲ

先行研究として，一般化三並べにおけるある形の単独での勝敗判定及び深い考察がしばしばなされてきた．五目並べに始まり，様々な制限や条件を付加したものも多くある．本研究では，五目並べの条件付加として斜めに作るものも許す場合に着想を得て，次の問題を提案し定義した．

4.1　新ゲームＯＲの提案

本研究で考案する新しいゲームは，盤面の大きさが無限大の碁盤状の盤面に，二者が交互に石を一つずつ

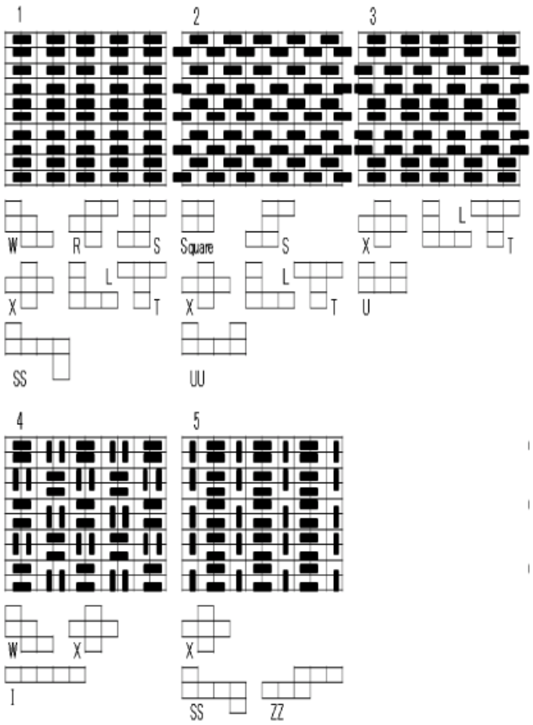

表 1　畳敷きと負け型の一覧

置き、予め定められたある形の二つ組のどちらかの形を、斜めは許さずに回転と反転を許して、先に作った方が勝ちというゲームである。基本的には一般化三並べと同様で，異なる点は，作ればよい形がある形の二つ組のうちどちらかでよくなっているという点である．以下では，このようにルールを定義し考察していくことにする．

4.2　新ゲームＯＲの考察

まず単独でも勝ち型となる形を二つ組として組み合わせても，当然勝ち型となってしまう．よって，負け型を組み合わせなければゲームの性質上意味がない．また負け型自体は細胞数の増加とともに無限に存在するので，本研究では最小単位の負け型のみの組み合わせにしぼって考察をしている．なお未解明 Snaky については，単独でも勝ち型になる可能性を残しているため今回の組み合わせからは排除している．

詳しい考察は次章で述べるとして，ここでは自明な結果を先に示すことにする．前章の表 1 で得た自明な結果として，ある二つ組に対して共通の畳敷きが存在する組み合わせは，必ず負け型に分類されてしまう．当然ながら，どちらの形も畳敷きされた盤上のどこに配置しても畳が 1 枚以上入ってしまうので作ることができない．このため前章の表 1 の畳敷きとそれによる

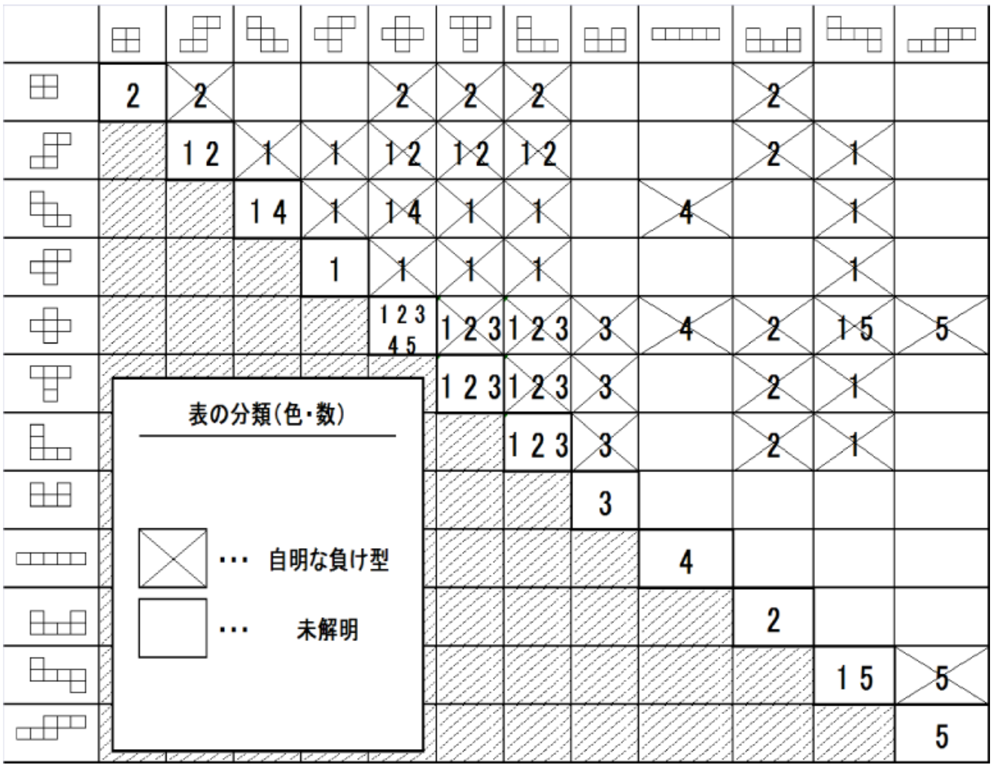

表 2　二つ組と勝敗判定の一覧

負け型の一覧を参考にすると，簡単に勝敗が確定する二つ組が多数存在することがわかる．このすべての二つ組の組み合わせと現段階での勝敗判定の一覧を表 2 に示している．なお表 2 中の記号や斜線が勝敗を，番号が表 1 の畳敷き番号と一致していて，その形や二つ組がどの畳敷きで防げるかを示している．

5. 勝ち型の証明

ここからは，各々の二つ組に関しての勝敗判定を勝ち型となる組み合わせと負け型になる組み合わせとに分けて証明する．まず本章では勝ち型の証明をしているが，その証明方法に関しては先手必勝手順を示している．

5.1 先手・後手の初手

先手・後手の初手と 2 手目に対称性を考慮して，以下のような工夫をする．

先手初手の置いた石に対して盤面を斜め方向に 4 分割する．後手初手は対称性を考えて，4 分割された領域と 4 分割した 2 か所の斜め線上を合わせた盤面で示される領域の高々1 か所に置くと考えても証明する都合上問題ない．さらにここでは，後手初手が上記の領域のすべてに置かれているとして証明を与えている．なおこの状況下で証明することができれば，後手初手は先の領域の高々 1 か所にしか置かれていないので，必ず成り立つと言える．先手・後手の初手終了時までの盤面を図 3 に示している．

5.2 先手・後手の 2 手目

先手 2 手目を，後手初手の領域の正反対側で先手初手の石と連結するように置く．後手初手を上記のように置くことで，後手 2 手目を対称性を考慮して 2 つに場合分けすることにした．この場合分けに関しては以下の 2 つである．

- パターン A について図 3 の初手において，先手黒石の延長線で盤面を 2 分割し，対称性からその左側の領域の高々1 か所に置くとする．なお先手黒石の延長線上は除き，パターン B でその場合を考える．
- パターン B について図 3 の初手において，先手黒石の延長線上の領域の高々1 か所に置くとする．なお 2 手目終了のこの盤面においても対称性が維持されているので，後手初手の石が置かれた領域をさらにしぼって，左側半分にあったものとして証明を進めたとしても問題はない．実際に数組の二つ組はこの対称性を利用することで証明できた．このことからも，先の手を見越してそれよりも前の後手の打ち方を制限することで，より簡潔な証

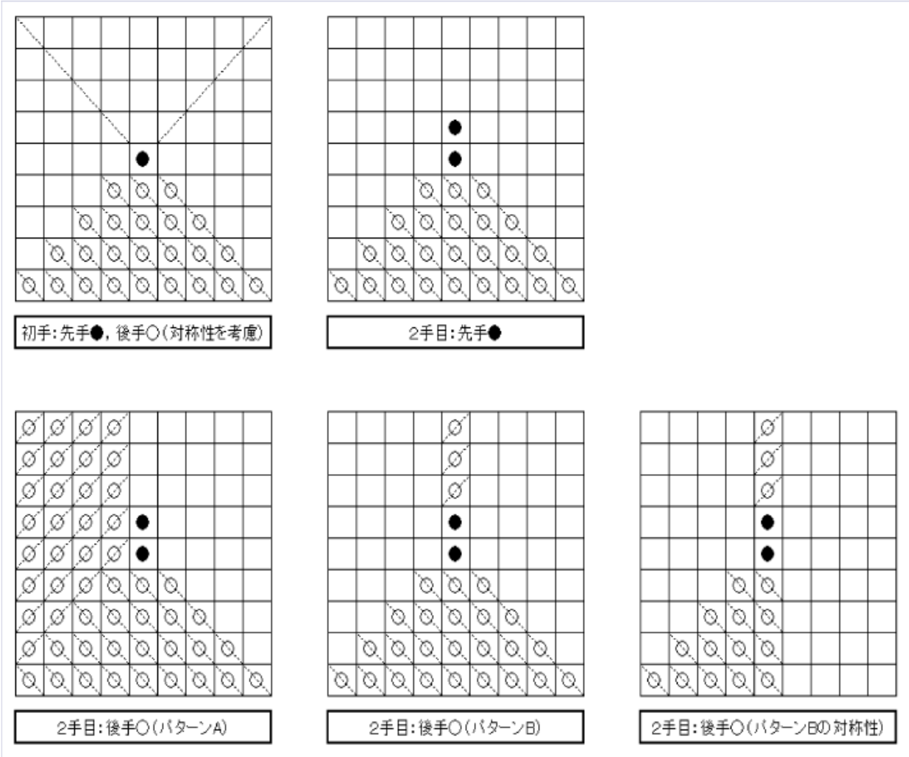

図 3　先手・後手の初手終了時と 2 手目終了時の盤面

明になるように工夫したものもある．

なおパターン A と B の両方に関して，パターン A と B 各々の領域の高々1 か所に置くため場合分けが必要だが，ここも先と同様に全領域に後手 2 手目が置かれているとしても問題なく決着がつくことや，実際には各々の二つ組のリーチや必勝パターンにより，置ける領域が限られることを利用して，証明を簡潔にしている．また，先手・後手の 2 手目終了時までの盤面を図 3 に示している．

なお厳密には，後手の初手と 2 手目が置かれた盤面を併せて考えて，その中に白石が 2 つ置かれていると考え，後手が反撃可能かどうかを考え直すことで十分になると言える．

5.3　必勝パターン

先手がこの盤面を作れれば，後手が最善をつくしても，先手が最善をつくす限りは先手必勝である盤面を「必勝パターン」と呼ぶ．ここではダブルリーチも含むことにする．よって，先手としては盤面に必勝パターンを作れた時点で，その後の最善手により必ず勝つことができるので，その二つ組が勝ち型であることを証明できたことになる．

また，必勝パターンの表し方として，盤上の必要領域を斜線で示し，その領域上には図 4 の必勝パターンように必要な先手黒石のみが置かれている．なお石が空の領域には，先手黒石であれば置いてあっても何も問題はないが，先手はなるべく最短で必勝パターンを作ることを考えれば，何も石が置かれてないと考えても自然である．

5.4　先手・後手のその後の手順

先手・後手 3 手目以降は，それぞれの二つ組に対してリーチと必勝パターンに帰着させる手順で打っていく．こうすることで後手の手が制限されるので，後手の手を場合分けする必要性が少なくなり，より簡潔に証明することができる．

5.5　証明の一連の流れ

証明の流れとしては，まず各々の二つ組に対する必勝パターンを挙げ，その後の勝ちきるまでの手順を示すことで必勝パターン自体の証明をする．次に先手・後手 2 手目の盤面から，それぞれ必勝パターンに帰着させるまでの手順を示すことで証明を与えればよい．なお勝ち型の証明には 24 の二つ組があり，その各々の場合について確認した．

5.6　勝ち型証明の結果

勝ち型となる 24 組の二つ組を列挙すると，表 1 の Square と W，Square と R，Square と U，Square と SS，Square と ZZ，Z と U，Z と I，Z と ZZ，W と U，W

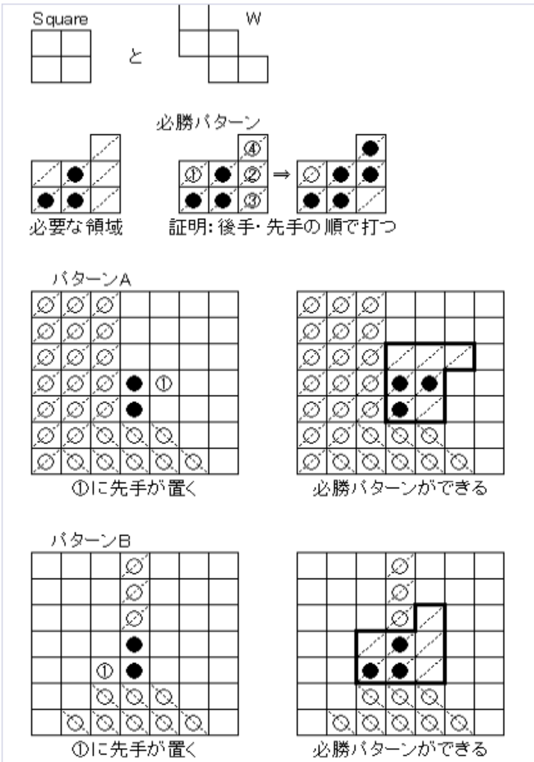

図 4 Square とWについて

と UU，W と ZZ，R と U，R と I，R と UU，R と ZZ，T と I，T と ZZ，L と ZZ，U と I，U と UU，U と SS，U と ZZ，UU と SS，UU と ZZ である．これらの証明の詳細は割愛するが，その一例として最も単純な手順ではあるが，Square と W の場合における手順を図 4 に示す．

6. 負け型の証明

負け型の証明は，二つ組に共通な畳敷きを見つけることにある．二つ組に共通な畳敷きが存在すれば，どのように形を配置してもどちらも必ず畳を 1 枚以上含んでしまうので，両方の形を防ぐことができるからである．この証明の利点としては，共通な畳敷きを見つけさえすればよいので，二つ組をあらゆる置き方で置いたときに，どの置き方で置いても必ず畳を 1 枚以上含んでいることを確認できればよい．4 章でも触れたが，5 種類の畳敷きにより 37 組は自明に負け型だとわかる．自明な負け型と勝ち型以外の残る 5 組のうち，Square と I に共通した新たな畳敷きを見つけ，以下で負け型になることを示す．

定理 1. *Square* と *I* の二つ組みは負け型である．

Proof. Square と I の二つ組みを防ぐ畳敷きを図 5 に

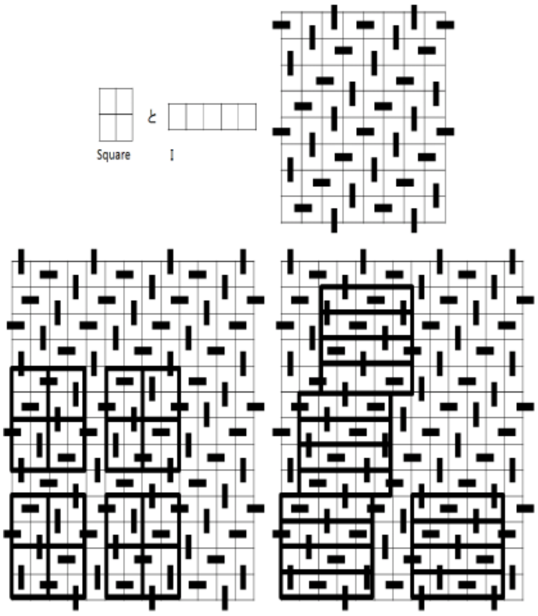

図 5 Square と I について

示し，以下ではこの二つ組みをどのように置いても，畳を 1 枚以上含んでいる事を確認する．この畳敷きは図 5 の左下示すように Square を置いたとき畳を 1 枚含んでいる．また右下に示すように I を置いたとき畳を 1 枚含んでいる．なお，畳は規則的に敷かれており，図 5 で示したものだけを考えれば十分である．Square は対称性から回転，反転させる必要がないが，I は 90 度回転させたものを置いた場合も考える必要がある．しかし，それは図 5 左下を 90 度回転させ，さらに反転させたものと一致する．以上より，図 5 で示した畳敷きは Square と I をどのようにおいても畳を含む事をが確認できた．よって Square と I の二つ組みは負け型である． □

7. 残っている組について

一般化三並べにおいて負け型となっているものは，全て畳敷き戦略を用いて負け型であることが証明されており，そこで使用される畳はすべて隣接している 2 マスとしている．また Snaky に対しては，畳として対応している 2 マスが隣接していない場合も含めた畳敷き戦略に対して勝ち型であることがすでに言えている．そこでこの章では，ゲーム OR において未だ勝ち型・負け型の証明がついていない 4 組の二つ組について畳敷き戦略に対し勝ち型かどうかを調べた．

7.1 畳敷き戦略に対して勝ち型であることの証明

先にも述べたが畳敷き戦略とは盤を 2 マスのペア

(畳）を作っていき，後手は必ず先手の石が置かれたマスのペアのもう一方に，１対１対応で置いていくというものである. ある形が畳敷き戦略に対して勝ち型であることを示すには，ある範囲の盤の畳敷きを全通り考え，盤上に少なくとも１つ，畳を全く含まない形の配置が存在するかどうかで判定することが出来る. しかし，現実的には任意の畳敷きを考えることは不可能であることから，次の方法で畳敷き戦略に対して勝ち型であることを示す.

(1) 盤の大きさを無限大とし，初期状態として盤上には畳は存在しないものとする.
(2) 既に敷かれた畳で防がれないように (ペアとなっているマスを両方含まないように) 目標とする形を盤上の一カ所に置く.
(3) 置かれた目標とする形を防ぐように畳を重複がないように敷く.
(4) 2, 3 を繰り返していき，目標とする形を防げなくなった状態を末端状態とし「勝ち」とする.

ルートノードを初期状態，2 の状態を OR ノード，3 の状態を AND ノードとする，つまり OR ノードでは子ノードのどれか 1 つが勝ちであるならば「勝ち」，AND ノードでは子ノードの全てが勝ちであるならば勝ちとし，AND/OR 木で表した結果として初期状態が勝ちであることがいえるならば目標とする形は勝ち型である．またゲーム OR の場合目標とする形が複数あるが，2 の状態で置く形の選択肢としては，どちらの形も選択することができる．この手法について次のことを示す.

定理 2. 上記の方法において，盤の大きさを有限にしても「勝ち」であるならば，目標とした形は畳敷き戦略に対して勝ち型である.

Proof. 目標とする形を置くときはどれか 1 つが「勝ち」になればよく (もし勝ちであれば結果的にはどこに置いても「勝ち」にはなるが)，畳を敷くときは置かれた目標とする形を防ぐ畳の敷き方を考える．従って盤の大きさを有限としても，畳の敷き方の選択肢は制限されることはなく，目標とする形の置き方の選択肢を制限しても「勝ち」であるのでこの補題は成り立つ. □

実際に「勝ち」であるかどうかを調べるために，証明数探索を用い計算機で解析を行った. 上記の方法において「勝ち」であることを示すためには，AND/OR 木の探索が必要である. AND/OR 木の探索アルゴリズムとして証明数探索[9] が詰め将棋やオセロ，チェッカーの解析に用いられている. そのなかでも DAG 構造に強い WPNS[10] を用いて探索を行った. その結果，勝ち型か負け型か証明がついていない組について I と L は 5 × 5 マスより大きい盤，I と UU，I と SS，I と ZZ は 6 × 6 マスより大きい盤で「勝ち」であることがわかった. よってこれらの組は後手が畳敷き戦略をとった場合に対しては勝ち型であることが確認できた.

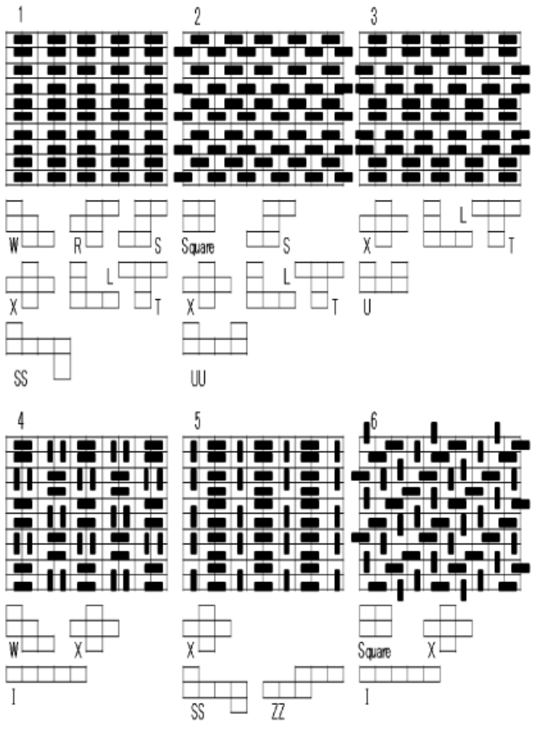

表 3 畳敷きと負け型の一覧の最終結果

8. まとめと今後の課題

自明な結果に加えて，新たに 24 組の二つ組について「勝ち型」の，1 組の二つ組について「負け型」の証明がついた．また，残された 4 組の二つ組に対しては未解明としながらも，後手が畳敷き戦略をとった場合には負け型にならないことを併せて確認することができた．よって自明な結果も合わせると，合計 66 の組み合わせのうち 62 組の二つ組で勝敗判定が確定し，残り 4 組の二つ組で条件付きながら後手が畳敷き戦略の場合には負け型にならないことを示すことができた. 最終的に得た結果として，表 3 に畳敷きと負け型一覧，表 4 にすべての二つ組に対する勝敗判定を与えた.

今後の課題としては，未解明な残り 4 組の二つ組についての勝敗を確定させることなどがある．また，単独として未解明な Snaky の勝敗判定を求めるための手掛かりとして，Snaky とそれに似たある形の二つ組

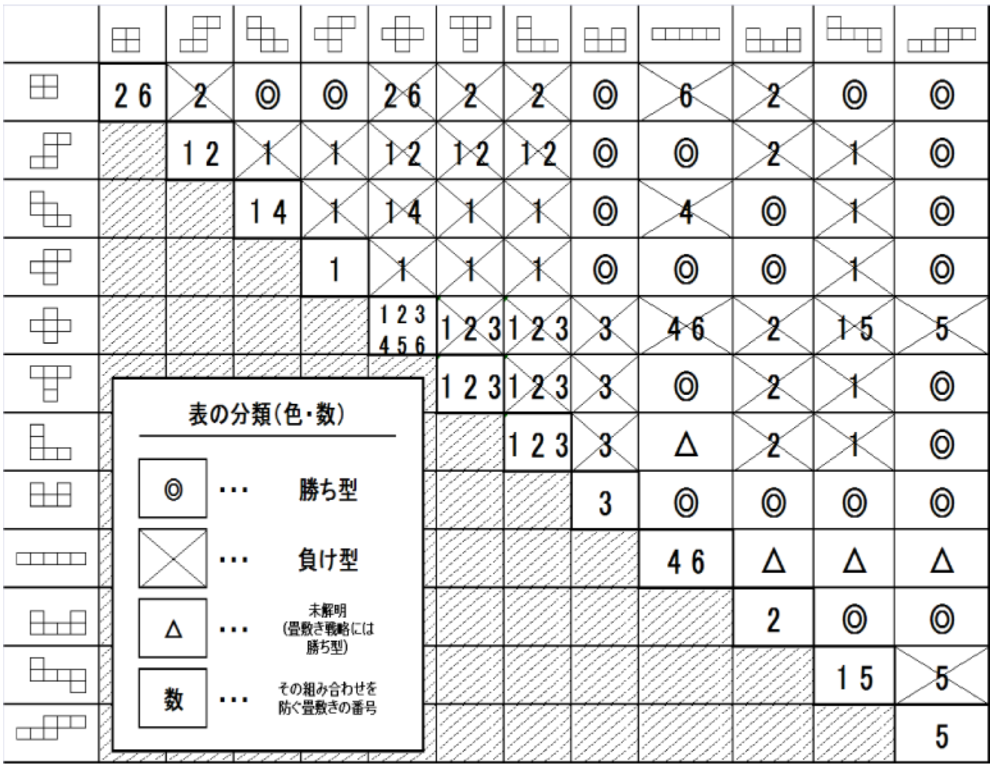

表 4 二つ組と勝敗判定の一覧の最終結果

における勝敗判定をすることも非常に興味深い研究である.

参　考　文　献

1) F. Harary. Achieving the skinny animal. *Eureka*, Vol.42, pp. 8–14, 1982.
2) F.Harary and H.Harborth. Achievement and avoidance games with triangular animals. *J. Recreat. Math*, Vol.18, pp. 110–115, 1985-1986.
3) F. Harary. Is snaky a winner. *Geombinatorics*, Vol.2, pp. 79–82, 1993.
4) Hiro Ito and Hiromitsu Miyagawa. Snaky is a winner with one handicap. *HERCMA*, pp. 25–26, 2007.
5) L.V. Allis, H.J. vanden Herik, and M.P.H. Huntjens. *Go-Moku and Threat-space Search*. University of Limburg, Department of Computer Science, 1993.
6) H. Harborth and M. Seemann. Snaky is a paving winner. *Bull. inst. Combin. April*, Vol.19, pp. 71–78, 1997.
7) H.Harborth and M.Seemann. Snaky is an edge-to-edge loser. *Geombinatorics*, Vol.5, No.4, pp. 132–136, 1996.
8) I. Halupczok and J. Schlage-Puchta. Achieving snaky. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol.7, No.1, 2007.
9) L. V. Allis, M. Meulen, and H. J. Herik. Proof-number search. *Artificial Intelligence*, Vol.66, No.1, pp. 91–124, 1994.
10) T. Ueda, T. Hashimoto, J. Hashimoto, and H. Iida. Weak Proof-Number Search. In *Proceedings of the 6th international conference on Computers and Games*, pp. 157–168. Springer, 2008.