テクニカルノート

振幅情報に基づく任意不規則信号の簡易的ピーク値分布評価法

中 村 大 輔[†1] 南 原 英 生[†2]

不規則信号におけるピーク値分布の評価には，瞬時値，1 階微分値に加えて 2 階微分値の情報までも必要となることから，その解析は一般に困難とされている．このような見地から，本論文では，1 階微分波をガウス分布で近似することにより，簡易的なピーク値分布評価式を試みる．具体的には，瞬時値とその微分信号の結合確率密度関数として，統計的エルミート展開表現とガウス分布の結合分布を採用し，あるレベルを横切る期待回数とそのレベル以上のピーク数との比率をガウス分布を仮定して導出する．さらに，このレベル交差数とピーク数の関係を非ガウス分布にまで拡張し，広帯域非ガウス形にも適用可能な振幅情報に基づく簡易的ピーク値分布表現を導出する．最後に，本手法の有効性をシミュレーションによって確認する．

A Simplified Evaluation Method of Peak Values Distribution for Arbitrary Random Signals Based on Amplitude Information

Daisuke Nakamura[†1] and Hideo Minamihara[†2]

In this paper, first, we introduce a bivariate joint probability density function of instantaneous values and the first derivative in the mixed form of statistical Hermite series and a Gaussian distribution assuming a Gaussian distribution for the first derivative. Next, we also introduce a practical relationship between the expected number of level-crossings of a certain level and the number of peaks exceeding this level under the condition of Gaussian distribution. Furthermore, we generalize the relationship and offer a simplified evaluation method of peak values distribution based only on the amplitude information for non-Gaussian type random signals with wide frequency band. Finally, the effectiveness of the proposed method is confirmed experimentally using digital simulation.

1. 緒 言

不規則変動波形のレベル交差やピーク値分布に関する信号処理法は，騒音・振動に対する心理音響評価や地震波の分析，海洋学における潮位変動の振動解析など数多くの工学的分野において応用されている[1),2)]．

一般に，レベル交差情報は瞬時値と 1 階微分値から評価可能であるのに対し，ピーク値分布の評価には瞬時値，1 階微分値に加えて 2 階微分値の情報までも必要となることから，ピーク値分布評価式の導出は困難とされている．しかし，周波数帯域が狭帯域の場合に限り，振幅分布が非ガウス形であっても 2 階微分値を必要とせず，レベル交差情報に基づいてピーク値分布評価が可能であることが文献 3) で示されている．また，文献 4) では振幅分布が非ガウス形であり，かつ周波数帯域が広帯域の場合であっても 2 階微分値を必要とせず，文献 3) の結果を含む形でレベル交差情報に基づき，近似的にピーク値分布の評価が可能であることが示されている．

しかし，上述のピーク値分布評価式においては，いかに 2 階微分値の情報を必要としないレベル交差に基づく手法であっても，Hermite 多項式や瞬時値と 1 階微分値に関する 2 次元の展開係数などに多くの計算時間を必要とし，リアルタイム処理や大量のデータに基づく処理の場合には不向きである．

このような観点から，本論文では，特に，計算時間の短縮とピーク値分布表現の簡便性を目指して，文献 4) で示されている広帯域非ガウス形のピーク値分布評価式に対して，1 階微分波をガウス分布で近似する手法を提案し，広帯域性，非ガウス性を反映させつつ，従来法よりも少ない計算時間で比較的精度の良い

†1 岡山理科大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Okayama University of Science
†2 岡山理科大学工学部
Faculty of Engineering, Okayama University of Science

簡易的なピーク値分布評価式を導出する．

また，本論文で提案するピーク値分布評価手法は，振幅情報のみで表される簡易手法であるので，振幅分布の非ガウス性がピーク値分布に与える影響を調べるなど様々な応用が可能となる．その一例として，ここでは従来から知られている道路騒音・振動波形における経験的関係：「ピーク値の平均値は L_{10}（累積分布の 90%点）にほぼ対応する[5),6)]」の適合性を周波数特性，振幅分布との関連において評価する．

最後に，ディジタルシミュレーションを用いて本手法の有効性を確認する．

2. 理論的考察

2.1 広帯域ガウス形のピーク値分布

いま，考察対象とする信号が平均値 0，標準偏差 1 の標準ガウス分布に従う場合，そのピーク値の確率密度関数は，レベル x および周波数帯域に関係するパラメータ ε_0 を用いて，次式で与えられることが知られている[7)]．

$$p_0(x,\varepsilon_0)=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2}+\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\times xe^{-\frac{1}{2}x^2}Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \quad (1)$$

ただし，$Q(\alpha)$ は次式のように定義される．

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \quad (2)$$

また，ε_0 はパワースペクトル密度関数の n 次モーメント m_n を用いて，次式で与えられる．

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{m_0m_4-m_2^2}{m_0m_4}} \qquad (0<\varepsilon_0<1) \quad (3)$$

2.2 狭帯域非ガウス形のピーク値分布[3)]

任意の非ガウス形不規則信号において，単位時間あたりにレベル x を正方向に横切る期待回数は，信号の瞬時値 $x(t)$ とその 1 階微分値 $\dot{x}(t)$ を用いた結合確率密度関数により，次式で求めることができる[8),9)]．

$$N(x)=\int_0^\infty \dot{x}p(x,\dot{x})d\dot{x} \quad (4)$$

このとき，考察対象とする信号が定常であるならば，その 1 階微分波は上りの勾配と下りの勾配の機会が等しいことからガウス分布で近似できると考えられる．このことは実験的にも確認でき，**図 1** に示すように，1 階微分波の分布形状は，原波形の振幅分布に比べてガウス分布に近いことが分かる．また，**表 1** に非ガウス性を反映する原波形，1 階微分波の展開係数の値を示すが，この結果からも，1 階微分波はガウス分布で近似可能であることが確認できる．

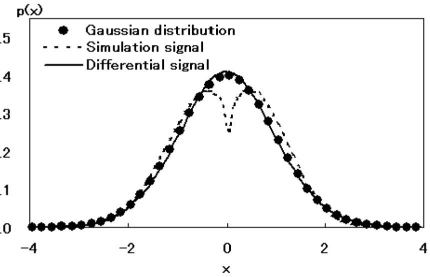

図 1 原波形，1 階微分波とガウス分布の確率密度関数
Fig. 1 Amplitude distribution of the simulation signal, differential signal and the standard Gaussian distribution.

表 1 原波形，1 階微分波の展開係数の比較
Table 1 Comparison of expansion coefficients between simulation signal and differential signal.

	$x(t)$	$\dot{x}(t)$
$A(1)$	0	0
$A(2)$	0	0
$A(3)$	−0.0088	−0.0001

以上のことから，瞬時値 $x(t)$ としてガウス分布を基幹とした Hermite 展開表現を，1 階微分値 $\dot{x}(t)$ としてガウス分布を採用し，さらに $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の独立性を仮定すると，その結合確率密度関数は次式のように表される．

$$p(x,\dot{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\dot{x}^2}\times\sum_{n=0}^{\infty}A(n)H_n(x) \quad (5)$$

このとき，あるレベル x を正方向に横切るレベル交差数の評価式は，式 (4) に式 (5) を代入することにより，次式のように表すことができる．

$$N(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}A(n)H_n(x) \quad (6)$$

ここで，$H_n(x)$ は Hermite 多項式，$A(n)$ は展開係数であり，次式のように定義されている．また，<> は平均操作を表している．

$$A(n)=\frac{1}{n!}\left\langle H_n(x)\right\rangle$$

対象とする信号の周波数スペクトルが狭帯域特性を持つ場合，あるいは，ある程度広帯域特性を持つ場合でも標本抽出の段階で大きな起伏を示すピーク値のみに着目するとき，「レベル交差回数とそのレベル以上に存在するピーク値の期待数はほぼ同数である」というピーク値に関する Powell の近似手法[10)] が適用で

き，そのピーク値分布の確率密度関数はレベル交差情報に基づいて次式のように与えられる．

$$p_N(x) = -\frac{1}{N(0)}\frac{dN(x)}{dx} \tag{7}$$

したがって，式 (7) に式 (6) などを代入することにより，狭帯域を仮定したピーク値分布評価式として次式を得ることができる．

$$p_N(x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A(n)H_{n+1}(x)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A(n)H_n(0)} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{8}$$

2.3　広帯域非ガウス形のピーク値分布

前述のレベル交差回数とそのレベル以上に存在するピーク数との関係を，広帯域特性を持つ信号に拡張するために，レベル交差回数とそのレベル以上に存在するピーク数の比率を示す評価量として，次式で表される Pu/C を導入する．

$$Pu/C \equiv \frac{\left\{\begin{array}{c}\text{単位時間あたりにレベル } x\\ \text{以上に存在するピーク数}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\text{単位時間あたりにレベル } x\\ \text{を正方向に横切る回数}\end{array}\right\}}$$

いま，Pu/C はレベル x と周波数帯域を表すパラメータ ε_0 の関数と考え，式 (1) に基づいて計算すると Pu/C 評価関数は次式のように与えられる[4]．

$$\gamma(x,\varepsilon_0) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}} Q\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right) + Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \tag{9}$$

ここで，帯域パラメータ ε_0 は平均レベルの交差回数 $N(0)$ と全ピーク数 M の比率で表されると考えられ[11]，さらに，これらが非ガウス性を考慮していることから，非ガウス性を反映させた帯域パラメータ ε_1 を次式のように定義する．

$$\varepsilon_1 \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{N(0)}{M}\right)^2} \tag{10}$$

式 (9) に式 (10) を適用することにより，非ガウス性を考慮した Pu/C 評価関数として次式が得られる．

$$\gamma(x,\varepsilon_1) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} Q\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) + Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right) \tag{11}$$

レベル交差回数とそのレベル以上のピーク数の関係が式 (11) により与えられることから，広帯域の周波数特性を有する信号についてもレベル交差情報に基づくピーク値分布評価が可能となり，その評価関数は次式に基づいて求められる．

$$p_1'(x,\varepsilon_1) \equiv -\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial x}\{\gamma(x,\varepsilon_1)N(x)\} \tag{12}$$

したがって，式 (12) に式 (6)，(11) を代入することにより，新たな広帯域非ガウス形のピーク値分布評価式として次式を得ることができる．

$$\begin{aligned} &p_1'(x,\varepsilon_1)\\ &\quad= \Biggl\{\bigl(F_1(x) - xF_0(x)\bigr)Q\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)\\ &\qquad + \sqrt{1-\varepsilon_1^2}e^{-\frac{1}{2}x^2}F_1(x)Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right)\\ &\qquad + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_1^2}F_0(x)\Biggr\}/F_0(0) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，$F_0(x)$，$F_1(x)$ は次式のように表される．

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)H_{n+1}(x)$$

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)H_n(x)$$

式 (13) は振幅情報のみに基づく簡易表現であり，スペシャルケースとして振幅分布がガウス分布である場合には式 (1) に，周波数帯域が狭帯域の場合には式 (8) と一致し，理論の範疇内でも本手法の正当性の一端が確認できる．

2.4　ピーク値の平均値と L_{10} との関連

次に，考察対象とする不規則信号の周波数帯域や振幅特性がピーク値分布に与える影響について考察する．ここでは，本手法を利用して道路騒音・振動波形における経験則：「ピーク値の平均は原波形の L_{10}（累積分布の 90%点）にほぼ対応する[5),6)]」について考察する．いま，ピーク値の平均値は新たに導出したピーク値分布評価式である式 (13) に基づき，次式のように得ることができる．

$$\mu = \int_0^{\infty} x p_1'(x,\varepsilon_1)dx \tag{14}$$

また，原波形の $L_{10} = \phi$ は以下の式について $\Phi(\phi) = 0.9$ を解くことにより求められる．

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\phi} e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty} A(n)H_n(x)dx \tag{15}$$

特に，$x(t)$ が狭帯域特性を持ち，かつガウス分布に従う場合には $\mu = \sqrt{2\pi}/2$，$\Phi(\sqrt{2\pi}/2) = 0.894$ となり，上述の経験則が成立することが理論的に確認できる．さらに，複雑な非ガウス性，広帯域性をあわせ持つ場合の解析は次章でシミュレーションにより確認

する．

3. 実験的考察

理論の正当性を確認するためにシミュレーション実験を行った．

3.1 ピーク値分布評価の比較

ここでは，三角級数モデルを用いて発生させたサンプリング周期 0.025 [s]，データ数 1,048,576 の広帯域非ガウス形のシミュレーション信号により，1 階微分値をガウス分布で近似した本手法（$p'_1(x,\varepsilon_1)$）と従来法（$p_1(x,\varepsilon_1)$）によりピーク値分布の評価を行い，実験的に求めた値と比較した．その結果を**図 2** に示す．また，参考のために狭帯域性を仮定した評価式（$p_N(x)$）もあわせ示した．ここで，展開係数は $n+m \leq 3$ まで考慮している．図より，本手法は従来法とともに，特に，ピーク値評価で重要な高いレベル値近傍でよく実験値をとらえており，本手法の有効性がうかがえる．

また，同様の信号を用いて広帯域ガウス形のピーク値分布評価式（$p_0(x,\varepsilon_0)$），狭帯域非ガウス形のピーク値分布評価式（$p_N(x)$），従来法（$p_1(x,\varepsilon_1)$）および本手法（$p'_1(x,\varepsilon_1)$）の評価を行い，実験値との MSE 値の比較を行った．その結果を**表 2** に示す．本手法は，ガウス性を仮定した $p_0(x,\varepsilon_0)$，狭帯域性を仮定した $p_N(x)$ よりも誤差が少なく，簡易表現であるにもかかわらず，非ガウス性，広帯域性が反映されていることが確認できる．

次に，本手法（$p'_1(x,\varepsilon_1)$）と従来法（$p_1(x,\varepsilon_1)$）について，反映させる展開係数の数を変化させ MSE 値の比較を行った．その結果を**図 3** に示す．図より，特に展開係数の少ない場合に本手法の誤差が少なく，簡易手法として有効であることが確認できる．

本手法は微分情報を必要としない簡易手法であるため，特に展開係数に関係する計算量が減少すると考えられる．**図 4** に本手法（$p'_1(x,\varepsilon_1)$）と従来法（$p_1(x,\varepsilon_1)$）について計算時間の比較を行った結果を示す．これらの結果より，本手法は従来法に比べ，少ない展開係数で評価可能であり，計算時間も 1/4 程度に短縮できることから，簡易手法としての本手法の有効性が認められる．

3.2 ピーク値の平均値と L_{10} の対応関係

本手法の適用例として 2.4 節で述べた「ピーク値の平均値と L_{10}」との関連性を非ガウス性と広帯域特性との関連において考察する．まず，ガウス分布を仮定し，周波数帯域に関するパラメータ ε_0 を変化させて μ と L_{10} の差を調べた．その結果を**図 5** に示す．同様な実験を非ガウス性を反映する展開係数 $A(3)$ の値を変化させて行った．その結果を**図 6** に示す．

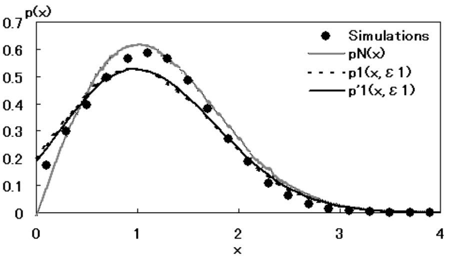

図 2 広帯域非ガウス形のピーク値分布評価における理論値と実験値との比較

Fig. 2 Comparison between theoretical values and experimental values in the peak values distribution for non-Gaussian type random signals with wide frequency band.

表 2 ピーク値分布における MSE 値の比較

Table 2 Comparison between proposed method and previous methods in MSE values of the peak values distribution.

	MSE
p_N	0.0357
$p_0(x,\varepsilon_0)$	0.0399
$p_1(x,\varepsilon_1)$	0.0282
$p'_1(x,\varepsilon_1)$	0.0257

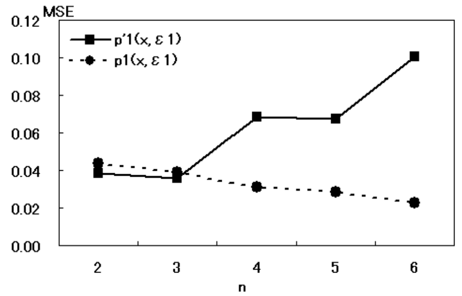

図 3 本手法と従来法の展開係数に対する MSE 値の比較

Fig. 3 Comparison of MSE values between proposed method and previous method.

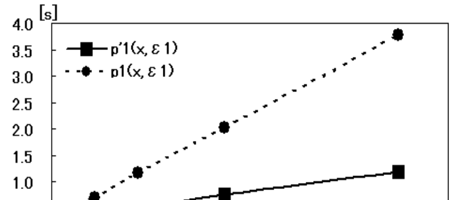

図 4 本手法と従来法の計算時間の比較

Fig. 4 Comparison of calculation time between proposed method and previous method.

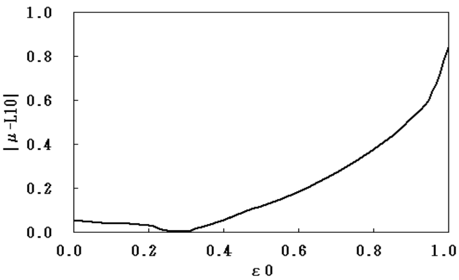

図 5 ガウス分布を仮定した場合の μ と L_{10} との関係
Fig. 5 Relation between μ and L_{10} in the peak values distribution of Gaussian type random signal.

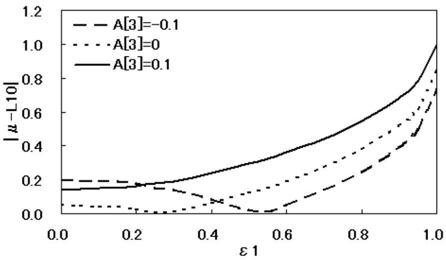

図 6 非ガウス分布の場合の μ と L_{10} との関係
Fig. 6 Relation between μ and L_{10} in the peak values distribution of non-Gaussian type random signal.

これらの結果から，狭帯域においては μ と L_{10} の一致度が高く，広帯域になるに従ってその差が大きくなっていることが確認できる．また，非ガウス性が増し，展開係数の絶対値が大きくなると μ と L_{10} の一致度が低くなることも確認できる．すなわち，前述の経験則はおおよそ，狭帯域の周波数特性を持つガウス性不規則信号について説明が可能となり，これらの条件から離れるに従って一致度が低くなると考えられる．

4. まとめ

本論文では，1 階微分波をガウス分布で近似し，振幅情報のみに基づく新たな簡易的ピーク値分布評価式を提示した．また，シミュレーション手法を用いて，反映させる展開係数による MSE 値の違いや計算時間などを示し，簡易手法ではあるが非ガウス性および広帯域性が十分反映されていることを確認した．つまり，本手法は，特に少ない展開項数において実験データとの一致性が良好であり，その場合には計算時間が従来法に比べて 1/4 程度に短縮されることから，簡易手法としての有効性を認めることができる．さらに，本手法が振幅情報のみに基づいていることから，ピーク値の平均値と L_{10} との関係を，非ガウス性および広帯域性との関連において評価できた．特に，この対応関係を帯域性との関連において説明しうる方法論を提示した点に留意する必要がある．

今後の課題としては，実分野における各種信号に対する適用や周波数帯域について，本手法の適用範囲を確認することなどがあげられる．

謝辞 本論文の作成にあたり，情報処理学会第 69 回全国大会[13)]において，有益なコメントをいただいた関係各位に深謝の意を表する．

参 考 文 献

1) Hamilton, J.: Extreme peak value vessel response combinations with wide band spectra, *Applied Ocean Research*, Vol.15, No.6, pp.373–380 (1994).
2) Gusev, A.A.: Peak factors of Mexican accelerograms: Evidence of a non-Gaussian amplitude distribution, *Journal of Geophysical Research*, Vol.101, No.B9, pp.20083–20090 (1996).
3) 南原英生，西村正文，太田光雄：任意不規則騒音・振動波形のピーク値分布に関する一評価理論と実験，音響学会誌，Vol.37, No.3, pp.116–122 (1981).
4) 中本昌由，南原英生，太田光雄：レベル交差情報を用いた広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布評価法，電子情報通信学会誌（A），Vol.J82-A, No.3, pp.471–481 (1999).
5) 日本音響学会（編）：騒音・振動（上），p.12, コロナ社，東京 (1978).
6) 工業，建設作業，道路交通，新幹線鉄道の振動に係る基準の根拠などについて，中央公害対策審議会騒音振動部会報告添付資料，p.251 (1976).
7) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The statistical distribution of the maxima of a random function, *Proc. Soc.*, Vol.A237, No.212, pp.212–232 (1956).
8) Rice, S.O.: Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, Vol.23, pp.282–332 (1944).
9) Rice, S.O.: Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, Vol.24, pp.46–156 (1945).
10) Powell, A.: On the fatigue failure of structures due to vibrations excited by random pressure field, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.30, No.12, pp.1130–1135 (1958).
11) 中本昌由，荒木勇一郎，南原英生，雛元孝夫：広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布に関する簡易評価理論，情報処理学会誌，Vol.42, No.5, pp.1272–1281 (2001).
12) 中本昌由，荒木勇一郎，南原英生，雛元孝夫：確率過程のピーク値分布における重み関数の線形結合モデル，情報処理学会論文誌：数理モデル化

と応用，Vol.42, No.SIG 14(TOM 5), pp.64–72 (2001).
13) 中村大輔，南原英生：任意不規則変動波形の簡易的ピーク値分布評価法，情報処理学会第 69 回全国大会，1, pp.299–300 (2007).

(平成 19 年 5 月 31 日受付)
(平成 19 年 10 月 2 日採録)

中村 大輔

昭和 59 年生．平成 15 年岡山理科大学工学部情報工学科入学．現在，同大学大学院修士課程在学中．不規則信号の解析に関する研究に従事．

南原 英生（正会員）

昭和 45 年立命館大学理工学部電気工学科卒業．昭和 47 年同大学大学院修士課程修了．同年広島電機大学工学部助手，同講師，同助教授，同教授を経て，現在，岡山理科大学工学部教授．工学博士．主として，不規則信号解析，環境評価（騒音・振動）の研究に従事．電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本音響学会，応用統計学会，電気学会各会員．