Vol.2013-AL-144 No.13
2013/5/17

極小剛なBody-Hingeグラフの列挙 （2013年4月15日版）

小林 祐貴[1,a)]　東川 雄哉[1,b)]　加藤 直樹[1,c)]

概要：本論文は極小剛な body-hinge グラフの列挙問題を扱っている．3 次元 bar-joint フレームワークの剛性に対する組合せ的特徴付けは知られていないが, その特殊構造である body-hinge フレームワークに対しては組合せ的特徴づけが知られている．剛体 (body) を頂点, 剛体どうしをつなぐヒンジを辺で表したグラフを body-hinge グラフとよぶ．本研究では極小剛な body-hinge フレームワークを表す body-hinge グラフをすべて列挙する問題を考察する．まず, 所与の body-hinge グラフからより大きなサイズの body-hinge グラフを生成する 4 つの操作を提案し, この操作によりすべての body-hinge グラフが生成可能であることを証明する．これにより, すべての body-hinge グラフを生成するアルゴリズムを提案する．計算時間は一つの body-hinge グラフあたり多項式時間で済む.

1. はじめに

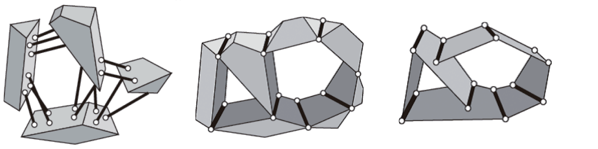
d 次元 body-hinge フレームワークはヒンジによってつながれた d 次元の剛体 (body) の集合である．ここでのヒンジとは $(d-2)$ 次元アフィン部分空間, すなわち 2 次元では点, 3 次元では直線, 4 次元では平面である．body は $\mathbb{R}^d$ において連続的に動くことが許されているため, ヒンジによってつながれたどの 2 つの剛体の動きもそのヒンジの周りの回転である．すべてのそのような動きが, 元々の構造体の合同変換である場合, フレームワークは剛であるとよぶ. body-hinge フレームワークを多重グラフ $G=(V,E)$ と写像 $p \to \mathbb{R}^d$ の組 $(G,\boldsymbol{p})$ として考える．$v \in V$ は剛体に対応し, $uv \in E$ は 2 つの剛体 u,v をつなぐヒンジ $\boldsymbol{p}(uv)$ に対応する．このとき, $\mathbb{R}^d$ 上に G が実現されたといい, このグラフ G を body-hinge グラフとよぶ．組合せ剛性理論の成果は構造物の剛性に関する基礎的知見を与えることに留まらず, 機械設計やタンパク質の挙動シミュレーション・知的 CAD の開発・センサーネットワークのローカライゼイション等, 90 年代後半から様々な分野において応用されている．幾つかの応用においては, 剛性や自由度の判定を高速に行うだけでなく, 物質や現象の物理的性質を理解するための重要な数学的ツールの一つとして着目され始めている [6].

2 次元の bar-joint フレームワークが極小剛であるための必要十分条件は Laman によって示されており [2], 特に極小剛なグラフを Laman グラフと呼ぶ．この Laman グラフを演繹的に生成する手法については, Henneberg 構築という方法が知られており, これによりすべての Laman グラフを生成できることがわかっている [3][10]．さらにマトロイドの性質を利用することで高速に列挙可能なアルゴリズムが知られている．3 次元の bar-joint フレームワークに対する一般剛性の組合せ的特徴付けの導出は未解決な状態であり, 困難であることが知られている [10]．しかし, Tay, Whiteley らによって, body-bar, body-hinge フレームワークといった特殊な構造に限った特徴付けが為されている [9]. body-bar フレームワークとは, 剛体が剛な棒材 (bar) により自由な回転を許すジョイントをもって接続された構造であり, 剛体を頂点, 棒材を辺に対応させたグラフのことを body-bar グラフとよぶ．$D=\binom{d+1}{2}$ としたとき, 極小剛な body-bar グラフに関しては, D 個の graphic matroid の合併として表現されることが知られており, matroid base の効率的アルゴリズムを用いて極小剛な body-bar グラフの列挙が効率よく実現できる.

Tay[7] と Whiteley[9] はそれぞれ, 一般的なヒンジ配置をとる剛な body-hinge フレームワークの特徴付けを示した．さらに, Katoh らは panel-hinge フレームワークに関して, パネルを剛体として扱うことで body-hinge フレームワークと同様の議論が可能であることを示している [1].

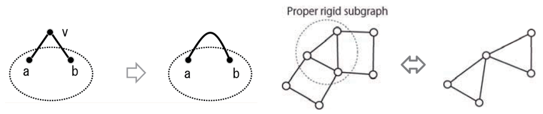
しかしながら body-hinge グラフに対しては, 2 次元 bar-joint フレームワークにおける Henneberg 構築のような演

1　京都大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Kyoto University
a)　as-kobayashi@archi.kyoto-u.ac.jp
b)　as.higashikawa@archi.kyoto-u.ac.jp
c)　naoki@archi.kyoto-u.ac.jp



(a) (b) (c)

図 1 (a) body-bar, (b) body-hinge 及び (c) panel-hinge フレームワーク



(a) (b)

図 2 (a)splitting off (b)contraction

繹的な生成方法や, 多項式時間 (出力 1 つあたり) 列挙アルゴリズムはこれまで知られていない.

一般に, グラフ G の k 本の並列な辺の複製によって各辺が置き換えられたグラフを kG と記述するが, 本論文では $(D-1)G$ を $\widetilde{G}$ と記述する.

命題 1 [1], [7], [9] 多重グラフ G が $\mathbb{R}^d$ に剛な body-hinge 及び, panel-hinge フレームワークとして実現可能であるための必要十分条件は, $\widetilde{G}$ が D 個の辺素な全域木をもつことである.

body-bar グラフと異なり, 命題 1 を満たす body-hinge グラフに対するマトロイド的な特性は存在しないので, body-hinge グラフを多項式時間で列挙するアルゴリズムを容易に構築することはできない.

研究の成果: 単純グラフである極小剛な body-hinge グラフを演繹的に生成する 4 つの操作を明らかにし, 多項式時間で列挙するアルゴリズムを開発した.

2. 準備

$G=(V,E)$ を自己ループを含まないグラフとする. $X \subseteq V$ のとき, $G[X]$ を X によって誘導されるグラフとする. $X \subseteq V$ のとき, $\delta_G(X)=\{uv \in E | u \in X, v \notin X\}$ とする. $X=v$ のとき, $\delta_G(\{v\})$ を $\delta_G(v)$ と記す. V の分割 $\mathcal{P}$ とは, 頂点集合の部分集合の族 $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}(V_i \neq \emptyset(1 \leq i \leq m), V_i \cap V_j = \emptyset(1 \leq i, 1 \leq j, i \neq j), \cup_{i=1}^{m} V_i = V)$ のことである. $m=2$ のときは $\mathcal{P}=\{V_1, V_2\}$ であり, 特に, $\mathcal{P}$ の異なる集合をつなぐ G の辺集合を $\delta_G(\mathcal{P})$ とする. $\widetilde{G}=(D-1)G$ の辺集合を $\widetilde{E}$ とし, ある辺 $e \in E$ に対して $\tilde{e}=\{e_1, e_2, \ldots, e_{D-1}\}$ とする. $\widetilde{G}=(V, \widetilde{E})$ としたとき, $\widetilde{E}$ のマトロイドを $\mathcal{M}(\widetilde{G})$ とし, $\mathcal{M}(\widetilde{G})$ の基底を B とする. $\mathcal{M}(\widetilde{G})$ のランクが $D(|V|-1)$ と等しいことは, $\widetilde{G}$ に D 個の辺素な全域木を詰込むことができることの必要十分条件であることが知られている.

辺素な全域木:

以下の定理が Tutte および Nash-williams によって示されている [4][8].

定理 1 (Tutte, Nash-Williams) あるグラフ $G=(V,E)$ が k 個の辺素な全域木を含んでいることの必要十分条件は, 頂点集合 V の任意の分割 $\mathcal{P}$ に対して以下の式が成り立つことである.

$$|\delta(\mathcal{P})| \geq k(|\mathcal{P}|-1) \tag{1}$$

定理 1 は body-hinge グラフが剛な body-hinge フレームワークとして実現可能であるための必要十分条件は, $\widetilde{G}$ が D 個の辺素な全域木をもつことである, ということを意味している.

極小剛な Body-Hinge グラフに関する性質:

極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき, より小さなサイズの body-hinge グラフを生成する 2 つの操作が知られている [1].

1 つは剛な真部分グラフを縮約する操作 **contraction**(図 2(a)) である ($G'=(V',E')$ が G の剛な部分グラフで $1<|V'|<|V|$ を満たすとき剛な真部分グラフとよばれる). もうひとつの操作は **splitting off** と呼ばれる操作 (図 2(b)) が知られている. ここでグラフ G の頂点 v について, v に隣接する頂点集合を $N_G(v)$ とする. splitting off とは, 次数 2 の頂点 v に対して $N_G(v)=\{a,b\}$ とするとき, G より v(及び v に接続する辺) を取り除き, 新たな辺 ab を追加する操作のことである. 得られたグラフを G_v^{ab} とする. G_v^{ab} は G において va または vb のどちらかを縮約することと同等である.

splitting off は, 一般には極小性は保証されていない [1]. しかし剛な真部分グラフを持たないグラフに限定した場合, splitting off による極小性は保証される.

以下の 5 つの補題が示されている [1].

補題 1 [1] グラフ G を剛な body-hinge グラフとしたとき, G は二辺連結グラフである.

補題 2 [1] $G=(V,E)$ を極小剛な body-hinge グラフ, $G'=(V',E')$ を G の剛な部分グラフとするとき, G から E' を縮約してえられるグラフは極小剛な body-hinge グラフである.

補題 3 [1] 剛な真部分グラフをもたない, 多重グラフを含んだ極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ について考える. このとき, 以下の式が成り立つ.

$$(D-1)|E| < D(|V|-1)+D-1 \tag{2}$$

補題 4 [1] 剛な真部分グラフをもたない 2 辺連結である極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ について考える. このとき, G は頂点数が高々 D のサイクルグラフであるか, $0 \leq i \leq d-1$ の $v_i v_{i+1} \in E$ かつ $0 \leq i \leq d-1$ の $d_G(v_i)=2$ であるような長さ d の点列 $v_0 v_1 \ldots v_d$ をもつ.

補題 5 [1] 剛な真部分グラフをもたない極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ について考える. このとき, $N_G(v)=a,b$ である任意の次数 2 の頂点 v にたいして, splitting off の操作をおこなったとき, G_v^{ab} は極小剛な

body-hinge グラフである.

3. 単純グラフである極小剛な Body-Hinge グラフを演繹的に生成する操作

本章では, はじめにより大きな単純グラフである極小剛な body-hinge グラフを演繹的に生成する操作を示す. 4.1 では, それらの操作によって生成される body-hinge グラフの極小性と剛性が保証されていることを示す. 4.2 では, 導入した操作を繰り返し用いることで任意の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフが生成可能であることを証明する.

単純グラフである頂点数 $n(n \geq 3)$ の極小剛な body-hinge グラフ $G = (V, E)$ について考える. ここで, 以下の 4 つの操作を定義する.

操作 1(edge split). ある辺 $e \in E$ に対して $\tilde{e} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{D-1}\}$ としたとき, $|B \cap \tilde{e}| \leq D - 2$ であるような $\mathcal{M}(\widetilde{G})$ の基底 B が存在する場合. (図 3(1))

(1) 新しく頂点 v を加える.

(2) 辺 $e \in E$ の端点 $a, b \in V$ に対して v から辺 va, vb を引く.

(3) 辺 $e \in E$ を取り除く.

操作 2(edge split plus 1-addition). ある $\mathcal{P}$ に対して $5|\delta_G(\mathcal{P})| = 6(|\mathcal{P}| - 1)$ を満たす場合. (図 3(2))

(1) 新しく頂点 v を加える.

(2) 辺 e の端点 $a, b \in V$ に対して v から辺 vb, va を引く.

(3) 辺 e を取り除く.

(4) 頂点分割 $\mathcal{P}$ より v からなる頂点集合を加えたものを頂点分割 $\mathcal{P}'$ とするとき, 異なる 2 つの頂点集合 $V_x \in \mathcal{P}', V_y \in \mathcal{P}'$ にそれぞれ含まれる頂点 $x \in V_x, y \in V_y$ を端点とする辺 xy を加える. このとき, xy を加えてできるグラフが剛となるように追加する.

操作 3(vertex 2-addition). 以下の操作を行ってできるグラフもまた, 極小剛な body-hinge グラフの場合.(図 3(3))

(1) 新しく頂点 v を加える.

(2) $a, b \in V(a, b \neq v)$ を任意に選び v から辺を引く.

操作 4(triangle-addition). (図 3(4))

(1) 新しく頂点 v_1, v_2 および辺 v_1v_2 を加える.

(2) 頂点 $a \in V$ を任意に選び v_1 および v_2 から辺 v_1a, v_2a を引く.

操作 2 の条件を満たすような $\mathcal{P}$ をみつけることは, [5] より多項式時間で実行可能である.

3.1 各操作の正当性について

定理 2 定義した 4 つの操作によってできるグラフ $H = (V', E')$ もまた極小剛な body-hinge グラフである.

証明 1. edge split(図 3(1))

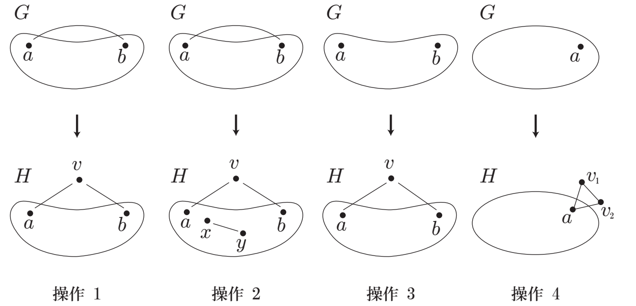


図 3 極小剛な panel-hinge グラフを演繹的に生成する操作

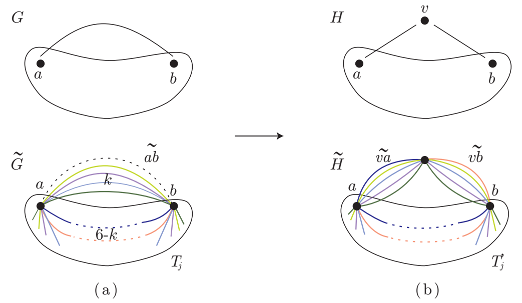


図 4 (a) 極小剛な body-hinge グラフ G 及び G を $D-1$ 重化したグラフ (b) 操作 1 によりできるグラフ H 及び H を $D-1$ 重化したグラフ $\widetilde{H}$(ただし, $D = 6$)

はじめに, 極小剛な body-hinge グラフ $G = (V, E)$ に操作 1(edge split) を行ったグラフ $H = (V', E')$ が, 剛であることを示す.

$\widetilde{G}$ に詰込むことのできる, D 個の辺素な全域木を $T_j(1 \leq j \leq D)$ とする. $\widetilde{H}$ における辺素な全域木 $T_1', \ldots, T_D'$ を, 各々 $T_1, \ldots, T_D$ から構成できることを以下に示す.

操作 1 の条件より辺 $ab_i(1 \leq i \leq D-1)$ を使用する全域木は高々 $D-2$ 本で, それらを $T_1, \ldots, T_k(k \leq D-2)$ としたとき, $\widetilde{ab}$ を使用しない全域木 $T_{k+1}, \ldots, T_D$ は, $(D-k)$ 個となる (図 4(a)).

辺 $ab_i(1 \leq i \leq D-1)$ を使用していた全域木 $T_j(1 \leq j \leq k)$ に対して T_j' は va_i, vb_i を使用することとし, $T_j' = T_j \setminus ab \cup \{va_i, vb_i\}(1 \leq j \leq k)$ とする. このとき $D-k$ 個の全域木 $T_{k+1}', \ldots, T_D'$ が v に到達するためには, $\widetilde{va}, \widetilde{vb}$ の残りの辺を使用する必要がある. すなわち $2(D-1-k) \geq D-k$ を満たす必要があるが, これは $k \leq D-2$ より満たされており, グラフ H は剛な body-hinge グラフである.

次に H が極小であることを背理法により示す.

H が極小ではないと仮定し, 矛盾を示す. すなわち E' に取り除いても H が剛であるような冗長な辺が存在していることである. ここで, H の頂点 v に splitting off を行ったグラフを $H_v^{ab} = (V, E)$ とし, 冗長な辺を辺 st とする. このとき, 頂点 v の次数は 2 で, 辺 va, vb を取り除くことはできないので取り除くことが可能な辺 st は $st \in E$ となる. ここで, グラフ H より辺 st を取り除き, さらに頂点 v に対して, 操作 1 の逆操作 (splitting off) を行ったグラフを

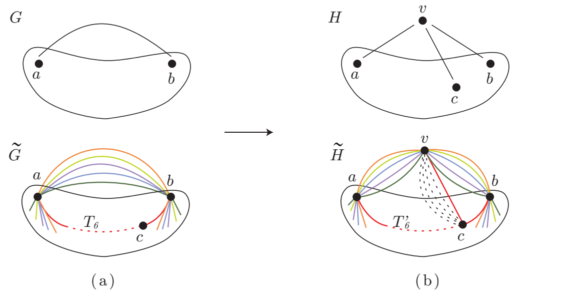


図 5 (a) 極小剛な body-hinge グラフ G 及び G を $(D-1)$ 重化したグラフ $\widetilde{G}$ (b) 操作 2 によりできるグラフ H 及び H を $(D-1)$ 重化したグラフ $\widetilde{H}$ (ただし, $D = 6$)

$\{H \setminus st\}_v^{ab}$ とする．$\{H \setminus st\}_v^{ab}$ もまた剛となるが, これはグラフ H_v^{ab} に冗長な辺が存在したこととなり, グラフ H_v^{ab} が極小であることに矛盾.

よって H は極小剛な body-hinge グラフである．□

2. edge split plus 1-addition(図 3(2))

はじめに, グラフ H が剛な body-hinge グラフであることを示す.

$\widetilde{G}$ に詰込むことのできる, D 個の辺素な全域木を $T_j(1 \leq j \leq D)$ とする．辺 $ab_i(1 \leq i \leq D-1)$ を使用する全域木を $T_1, \ldots, T_{D-1}$ とし, $\widetilde{ab}$ を使用しない全域木を T_D とする (図 5(a)).

$\widetilde{H}$ の D 個の辺素な全域木を $T_j'(1 \leq j \leq D)$ とし, 辺 $ab_i(1 \leq i \leq D-1)$ を使用していた全域木は va_i, vb_i を使用することとし, $T_j' = T_j \setminus ab \cup \{va_i, vb_i\}(1 \leq j \leq k)$ とする．このとき T_D' が頂点 v に到達するためには, 辺 $\widetilde{vc}$ を使用すればよいので, グラフ H は剛な body-hinge グラフである.

次に H が極小であることを示す．H に冗長な辺 f が存在すると仮定し, 背理法を用いて示す.

G の各頂点をそれぞれ一つの頂点の部分集合とするような頂点分割 $\mathcal{P}$ を考える．操作 2 を行う際の条件より, $\widetilde{G}$ の辺の本数と D 個の辺素な全域木が必要とする辺の本数が一致することから,

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D(|\mathcal{P}|-1) \quad (3)$$

が成立している.

$\mathcal{P}$ に新たに加えた頂点 v を単独の集合として加えた, $H \setminus f$ の頂点分割を $\mathcal{P}'$ としたとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の関係は

$$|\delta_{H\setminus f}(\mathcal{P}')| = (|\delta_G(\mathcal{P})|+1) \quad (4)$$

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|+1 \quad (5)$$

である.

定理 1 より $\mathcal{P}'$ に対して冗長であることを仮定しているので,

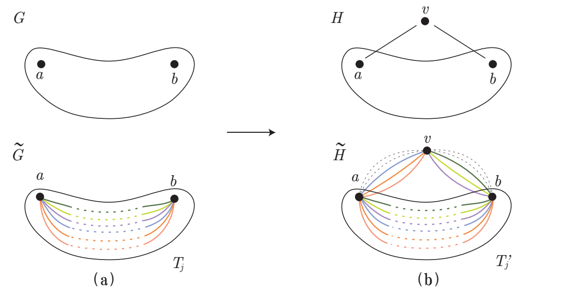


図 6 (a) 極小剛な body-hinge グラフ G 及び G を $D-1$ 重化したグラフ $\widetilde{G}$ (b) 操作 3 によりできるグラフ H 及び H を $(D-1)$ 重化したグラフ $\widetilde{H}$

$$\begin{aligned}&(D-1)|\delta_{H\setminus f}(\mathcal{P}')| - D(|\mathcal{P}'|-1)\\ &= (D-1)(|\delta_G(\mathcal{P})|+1) - D|\mathcal{P}| = -1 < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となり矛盾．よって H は極小剛な body-hinge グラフである．□

3. vertex 2-addition(図 3(3))

はじめに, グラフ H が剛な body-hinge グラフであることを示す．$\widetilde{G}$ に詰込むことのできる, D 個の辺素な全域木を $T_j(1 \leq j \leq 6)$ とする.

$\widetilde{H}$ を $\widetilde{G}$ に, 頂点 v 及び $\widetilde{va}, \widetilde{vb}$ を追加したグラフとする (図 6(b))．$\widetilde{H}$ の D 個の辺素な全域木を $T_j'(1 \leq j \leq D)$ とし, $T_j' = T_j \cup \{va_i, vb_i\}(1 \leq j \leq k)$ とする．このとき T_j' が頂点 v に到達するためには, D 本の辺が必要であるが, $\widetilde{va}, \widetilde{vb}$ は合わせて $2(D-1)$ 本あるので, グラフ H は剛な body-hinge グラフである.

このように, vertex 2-addition を行ってできるグラフ H もまた剛ではあるが, 極小であるとは限らない．そのため, 操作後のグラフが極小であるかどうかをペブルゲームを用いてテストし, 極小である場合にのみ, この操作を実行する.

4. triangle-addition(図 3(4))

はじめに, H が剛な body-hinge グラフであることを示す.

グラフ G は極小剛な body-hinge グラフであるので, $\widetilde{G}$ に D 個の辺素な全域木を詰め込むことが可能である．追加する三角形グラフを F としたとき, $\widetilde{F}$ もまた D 個の辺素な全域木を詰め込むことが可能である．全域木同士を 1 つの頂点を共有してできるグラフもまた全域木となることから, H もまた剛な body-hinge グラフである.

H が極小であることは G と F が極小であることから明らかである.

以上より H は極小剛な body-hinge グラフである．□

3.2 任意の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフの生成

定義した 4 つの操作の操作列により, 任意の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフを生成することが可能であることを示すために, 以下の補題を示す.

補題 6 頂点数3以上の単純グラフである極小剛なbody-hingeグラフには, 次数2の頂点が少なくとも1つ存在する.

証明 背理法を用いて, 次数2の頂点が存在することを示す. すべての頂点の次数が3以上の単純グラフである極小剛なbody-hingeグラフの存在を仮定する. 以下では, 剛な真部分グラフを持たない場合と持つ場合の, 2つの場合にわけて考える.

Case 1. 剛な真部分グラフを持たない場合.
剛な真部分グラフをもたないグラフ G について考える.
補題4から以下の条件を満たしている.

$$(D-1)|E| < D(|V|-1) + (D-1) \tag{7}$$

このとき頂点数と辺の関係は, すべての頂点次数が3以上なので,

$$3|V| \leq 2|E| \tag{8}$$

が成り立つ. (7)(8) より、

$$3(D-1)|V| \leq 2(D-1)|E| \leq 2D(|V|-1)+2(D-1) \tag{9}$$

を得る. これより, $(D-3)|V| \leq -2$ となるが $|V| \geq 3$ に反する. よって, 次数が2の頂点が存在する.

Case 2. 剛な真部分グラフを持つ場合.
剛な真部分グラフを持つグラフの中で頂点数の最も少ないものを G とする. G における極小剛な真部分グラフのうち, 頂点数の最もすくないものを $G' = (V', E')$ とする. $|V'| \geq 3$ より V' により誘導された G の部分グラフ $G[V']$ を考える.
ここで以下の主張を示す.

主張 1 頂点数3以上の単純グラフである極小剛なbody-hingeグラフが, 剛な真部分グラフを持つ場合, その誘導部分グラフには次数2の頂点が3個以上存在する.

証明 $G[V']$ の次数が2の頂点が k 個あるとき, 次数が3以上の頂点は $|V'| - k$ 個存在することとなる. このとき頂点数と辺の関係は, すべての頂点次数が3以上なので,

$$2k + 3(|V'| - k) \leq 2|E| \tag{10}$$

(7)(10) より,

$$\begin{aligned} 2(D-1)k + 3(D-1)(|V'| - k) &\leq 2(D-1)|E| \\ &\leq 2D(|V'| - 1) + 2(D-1) \\ k &\geq (D-3)|V'|/(D-1) + 2/(D-1) \end{aligned} \tag{11}$$

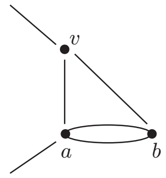


図 7 二重辺を縮約して再び二重辺ができる場合

$|V'| \geq 3$ より次数2の頂点が (11) より3個以上存在する. □

G は次数2の頂点をもたないという仮定より, $|\delta(V')| \geq 3$ であるので, V' の各頂点は G において次数が3以上となっていることに注意しておく. 以下では G' を縮約して出来るグラフを G'' とし, G'' が多重辺をもつ場合と持たない場合の2つの場合にわけて考える.

Subcase 2A. G'' が多重辺をもたない場合.
このとき, G'' はすべての頂点の次数が3以上の単純グラフである極小剛なグラフであり, G よりも頂点数が少ない. よって矛盾.

Subcase 2B. G'' が多重辺を1つ以上もつ場合.
ここで, 以下の主張を示す.

主張 2 $G = (V, E)$ を極小剛なbody-hingeグラフとする. G が多重辺をもつとき, それは二重辺であり, 二重辺を縮約することにより, あらたな多重辺は生じない.

証明 G が多重辺をもつとき, 三重辺以上の場合はそのうちの1辺が冗長であるので極小性に反する. なぜならば, G' は極小剛なbody-hingeフレームワークであることから, G' と $G \setminus G'$ の間の2辺が1つの頂点 $v \in G \setminus G'$ を共有する場合もまた剛であるので, 3辺のうち1辺は冗長である. 二重辺は剛な真部分グラフであるので, 補題2より二重辺を縮約しても極小性は失われない.
二重辺を縮約して再び二重辺ができる場合があると仮定する. そのような場合は, 頂点 $a, b \in V$ があいだに二重辺 ab_1, ab_2 をもち, さらに共有点 v をもつときである (図7). このとき, 辺 ab_1 は冗長となっており, 補題2に反する. したがって, 二重辺を縮約することにより, 多重辺は生じない. □

主張 3 G'' において G' を縮約した頂点を s としたとき, s に隣接する頂点が3つ以上ある場合は, s を端点にもつすべての多重辺を縮約した場合にも, 次数2の頂点が生じることはない.

証明 頂点 s に隣接する頂点が l 個存在するとし, 各頂点を $v_1 \ldots v_l$ とする. そこで二重辺が存在する場合について考える. s, v_l 間に二重辺があると仮定しても一般性は失わない. このとき

$$|\delta(v_l)| \geq 3 \tag{12}$$

が成り立っている (図8).

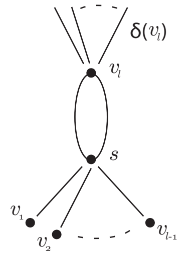


図 8 頂点 s' に隣接する点

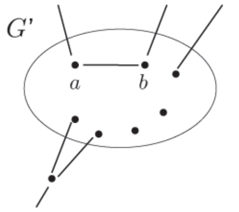


図 9 G' の頂点数が $D+1$ 以上の場合 ($D=6$)

s, v_l 間の二重辺を縮約してできる頂点を s' とすると,

$$|\delta(s')| \geq l - 1 + |\delta(v_l)| - 2 \tag{13}$$

が成り立つ. よって (12) より $\delta(s') \geq l$ である. ここで s に接続する多重辺を縮約して出来る頂点を s^* とすると, $|\delta(s^*)| \geq l$ であるので, 以上より $l \geq 3$ のとき, すべての多重辺を縮約した場合にも, 次数 2 の頂点が生じることはない. □

補題 4 より, G' は長さ D 以下のサイクルグラフである場合か, 頂点数が $D+1$ 以上の連続する $(d-1)$ 個の次数 2 の頂点をもつグラフの場合のいずれかである.

Case 1. G' の頂点数が $D+1$ 以上の場合.
このとき G' を縮約してできるグラフを G'' とする. G' が極小であることと, 剛な真部分グラフをもたないことから, (11) より $(D+1)$ 以上なので, G' は $G \setminus G'$ との間に $(D-1)$ 本以上の辺をもつ. G' と $G \setminus G'$ を結ぶ辺が $G \setminus G'$ 側に共有点をもたない場合, G'' に次数 2 の頂点が生じることはない. 以下では G' と $G \setminus G'$ を結ぶ辺が共有点をもつ場合を考える. 主張 2 より, 二重辺を縮約して再び二重辺ができる場合はないので, 縮約していくことにより次数 2 の頂点が生じることはない.

Case 2. G' が長さ D 以下のサイクルグラフである場合.
G' と $G \setminus G'$ の間の 3 辺が 1 つの頂点 $v \in G \setminus G'$ を共有する場合は, そのうちの 1 辺が冗長であるので G が極小剛であることに反する. そこで, G' と $G \setminus G'$ をつなぐ 2 辺が 1 つの頂点 $v \in G \setminus G'$ を共有する場合を考える. そのような 2 辺を va, vb とする.
このとき, 補題 1 より, 剛な body-hinge グラフは 2 辺連結であることから, 頂点 $a, b \in G'$ の間には辺素な辺列 P_1, P_2 のパスが存在する (図 10).

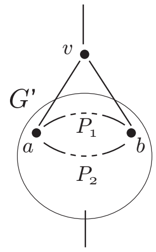


図 10 G' がサイクルグラフである場合

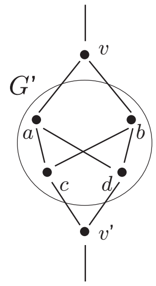


図 11 G'' において G' を縮約した頂点に隣接する頂点が, 2 つの場合

このとき, G' は点数最小の極小剛な真部分グラフであることから,

$$|P_1| + |P_2| \leq |P_1| + 2 \tag{14}$$
$$|P_1| + |P_2| \leq |P_2| + 2 \tag{15}$$

が成り立つ. なぜなら, そうでなければ $P_1 \cup \{va, vb\}$ または $P_2 \cup \{va, vb\}$ のサイクルグラフが, G' より点数が小さいので, G' の最小性に反する. よって $|P_1| \leq 2, |P_2| \leq 2$ であるので, 以下の場合について考える.

Subcase 2A. $|P_1| = 1, |P_2| = 1$ のとき
多重グラフとなり G が単純グラフであることに反する.

Subcase 2B. $|P_1| = 2, |P_2| = 1$ のとき
このとき G' は長さ 3 のサイクルグラフであるが, $G' \cup v$ で誘導されるグラフは明らかに冗長であり, G が極小剛であることに反する.

Subcase 2C. $|P_1| = 2, |P_2| = 2$ のとき
P_1, P_2 に含まれる頂点をそれぞれ c, d とし, $x \in V'$ と $G \setminus G'$ をつなぐ辺の集合を E_x とする. 主張 3 より, G'' において G' を縮約した頂点に隣接する頂点が, 2 つ以下の場合を考える.
1 つの場合は冗長な辺が存在することとなる.
2 つの場合, $\delta(V') \geq 4$ より, $e \in E_c$ と $e' \in E_d$ が共有点 $v' \in G \setminus G'$ をもつ場合 (図 11) のみである.
このとき, v, a, c, v', d, b を頂点とする六角形グラフが存在し, 辺 ad, bc は冗長であるので, G が極小であることに反する.
以上のことから, 縮約した後の頂点が次数 2 とはならない

ことがわかった．したがって縮約してできるグラフもまた, すべての頂点の次数が 3 以上の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフであり, G が頂点数の最も少ない, すべての頂点の次数が 3 以上の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフであるという, 仮定に反する．
以上より単純グラフである極小剛な body-hinge グラフには, 次数 2 の頂点が少なくとも 1 つ存在する． □

定理 3 定義した 4 つの操作により, 任意の単純グラフである極小剛な body-hinge グラフを生成することが可能である．

証明 帰納法を用いて示す．$n \geq 4$ である頂点数 $n-1$ 以下の任意の極小剛な body-hinge グラフは, 三角形グラフを初期グラフとし, 4 つの操作の操作列により生成可能であると仮定する．頂点数 n の任意の極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき, 4 つの操作の逆操作によって, 頂点数が $n-1$ または $n-2$ の極小剛な body-hinge グラフを生成できることを示す．
ここで G の辺集合 E が 2 つの空でない部分集合 E_1, E_2 に分割され, E_1, E_2 を辺集合とする G の辺誘導部分グラフを, それぞれ $G[E_1], G[E_2]$ とする．以下では $G[E_1]$ と $G[E_2]$ がちょうど 1 点 v だけで共有するとき, v を G の切断点 (cut point) と呼ぶ．
極小剛な body-hinge グラフ G が切断点をもち, 切断点により分割してできるグラフのうち, 少なくとも 1 つが三角形グラフのときには, 操作 4 の逆操作を行うことで, 頂点数が 2 小さい極小剛な body-hinge グラフとなる．
以下では, 操作 4 の逆操作を行うことができない場合を考える．さらに操作 1 の逆操作, 操作 2 の逆操作, 操作 3 の逆操作の順に各操作が行えない場合を考えていき, いずれかの操作が可能であることを示す．

以下では剛な真部分グラフをもたない場合ともつ場合の, 2 つの場合にわけて考える．

Case 1. 剛な真部分グラフをもたない場合．
補題 6 より次数 2 の頂点が少なくとも 1 つ存在するので, この場合には操作 1 の逆操作 (splitting off) を行う．このとき, 補題 5 より, 極小剛な body-hinge グラフとなり, 頂点数が G より 1 小さいグラフ G' を得ることができ, 帰納法の仮定をみたす．

Case 2. 剛な真部分グラフをもつ場合．
はじめに操作 1 の逆操作 (splitting off) を行うことを考える．このとき, 剛ではあるが極小性は保証されていない．極小のときには, 頂点数が G より 1 小さいグラフ G' を得ることができ, 帰納法の仮定をみたす．
そこで, 操作 1 の逆操作によって冗長となる場合を考える．グラフ G より頂点 v(及び v に接続する辺) を取り除き, 新たな辺 ab を追加したグラフ, すなわち操作 1 の逆操作を

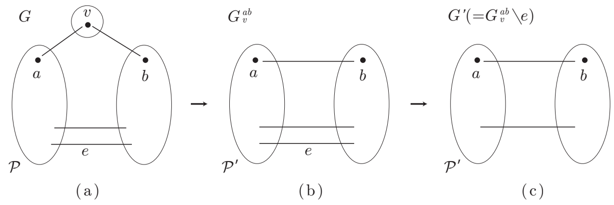


図 12 操作 1, 操作 2 の逆操作

行ったグラフを G_v^{ab} とする．このとき, 辺 ab が冗長な辺である場合は, 辺 ab を取り除くこととする．この操作は, 操作 3 の逆操作 (vertex 2-addition) を行うことに相当する．
ここで, グラフ $G=(V,E)$ に対して操作 3 の逆操作を行ってできるグラフ G' が極小であることを示す．G' が冗長であると仮定する．このとき, 操作 3 の逆操作を行う G の次数 2 の頂点を v, v に隣接する頂点を a, b とする．G' が冗長であるとき, G に冗長な辺が存在することとなり, G が極小であることに反する．
すなわち, 頂点数が 1 少ない極小剛な body-hinge グラフとなり, 帰納法の仮定を満たす．
そこで, 辺 ab 以外の辺 $e \in E \setminus \{av, bv\}$ が冗長な辺である場合について考える．
以下では頂点分割 $\mathcal{P}=\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ において, v, a, b の含まれ方について 4 つの場合に場合分けして考える．

Subcase 2A. $v, a, b \in V_1$ のとき．

$\mathcal{P}$ より v からなる頂点集合を除いた頂点分割を $\mathcal{P}'$ とするとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の関係は

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| \tag{16}$$
$$|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})| - 1 \tag{17}$$

Subcase 2B. $v \in V_1, a, b \in V_2$ のとき．

$\mathcal{P}$ より v からなる頂点集合を除いた頂点分割を $\mathcal{P}'$ とするとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の関係は

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| - 1 \tag{18}$$
$$|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})| - 3 \tag{19}$$

Subcase 2C. $v, a \in V_1, b \in V_1$ のとき．

$\mathcal{P}$ より v からなる頂点集合を除いた頂点分割を $\mathcal{P}'$ とするとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の関係は

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| \tag{20}$$
$$|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})| - 1 \tag{21}$$

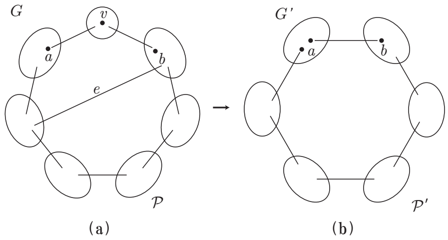


図 13 操作 2 の逆操作

Subcase 2D. $v \in V_1, a \in V_2, b \in V_3$ のとき.
それぞれ異なる頂点の部分集合に含まれ, かつ頂点 v は単独である G の頂点分割 $\mathcal{P}$ をとるような場合.

ここで $G_v^{ab} \setminus e$ を G' とする.
G は剛な body-hinge グラフであることから, 定理 1 より任意の頂点分割 $\mathcal{P}$ に対して

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| \geq D(|\mathcal{P}|-1) \tag{22}$$

が成り立つ.
極小であることから, 辺 e を除くと剛ではなくなるので, $e \in \delta_G(\mathcal{P})$ を満たすある頂点分割 $\mathcal{P}$ に対して, 定理 1 より以下の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(D-1)|\delta_{G\setminus e}(\mathcal{P})| &< D(|\mathcal{P}|-1)\\ (D-1)(|\delta_G(\mathcal{P})|-1) &< D(|\mathcal{P}|-1)\\ (D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| &< D|\mathcal{P}|-1 \end{aligned} \tag{23}$$

一方, $\mathcal{P}$ より v からなる頂点集合を除いた頂点分割を $\mathcal{P}'$ とするとき, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の関係は

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|-1 \tag{24}$$

$$|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})|-2 \tag{25}$$

G_v^{ab} は剛であり, さらに辺 e は冗長な辺であるので, G' もまた剛な body-hinge グラフであることから定理 1 より,

$$(D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| \geq D(|\mathcal{P}'|-1) \tag{26}$$

(24)(25)(26) より

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| \geq D|\mathcal{P}|-2 \tag{27}$$

(23)(27) を満たす整数の組 $(|\mathcal{P}|, |\delta_G(\mathcal{P})|)$ は

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D|\mathcal{P}|-2 \tag{28}$$

ここで,

$$|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})|-2 \tag{29}$$

とすると (24)(28)(29) より

$$\begin{aligned}(D-1)(|\delta_{G'}(\mathcal{P}')|+2) &= D(|\mathcal{P}'|+1)-2\\ (D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| &= D(|\mathcal{P}'|-1)\end{aligned} \tag{30}$$

となり, $\delta_{G'}(\mathcal{P}')$ を $(D-1)$ 重化した辺のすべてが全域木に使用されている状況であり, 操作 2 を行う際の条件と一致する. すなわち, 極小剛な body-hinge グラフ G に対して, 操作 2 の逆操作をすることで頂点数が 1 小さい極小剛な body-hinge グラフとなり, 帰納法の仮定を満たす.
以上より, 頂点数 n の任意の極小剛な body-hinge グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき, 4 つの操作の逆操作によって, 頂点数が $n-1$ または $n-2$ の極小剛な body-hinge グラフを生成可能である. □
以上の議論から, 逆探索法を用いて 1 個あたり多項式時間の列挙アルゴリズムを作ることが可能である. 単純グラフである極小剛な body-hinge グラフについて議論を行ったが, 多重グラフを許した場合にも同様な議論を行うことが可能である. その場合, 必要となる操作は, 操作 4(triangle-addition) を除く, 3 つの操作で十分である.
謝辞 多項式時間での計算可能性について, 九州大学の神山直之准教授にご教示頂いたことを深謝する.

参考文献

[1] N.Katoh, S.Tanigawa: A Proof of the Molecular Conjecture. Discrete Comput Geom, 45, pp.647-700, 2011.
[2] G.Laman: On graphs and rigidity of plane skeltal structures. Joунal of Engineering mathematics, 4(4), pp.331-340, 1970.
[3] L.C.Lomeli, L.Moshe, W.Whiteley: Bases and circuits for 2-rigidity: Constructions via tree partitions. Technical Report, York Univercity, http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley /menu.html
[4] Nash-Williams, C.: Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. J. Lond. Math. Soc. 1(1), 445-450, 1961.
[5] A.Schrijver: Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer,Berlin, Volume B, p.881, Corollary 51.3b, 2003.
[6] S.Tanigawa: 構造物の組合せ剛性:計数条件とグラフ分割. Proceedings of the Twenty-Second RAMP Symposium, pp.31-48, 2010.
[7] T.Tay: Linking $(n-2)$-dimentional panels in n-space II:$(n-2,2)$-frameworks and body and hinge structures. Graphs and Combinatrics, 5(1), pp.245-273, 1989.
[8] Tutte, W.T.: On the problem of decomposing a graph into n connected factors. J. Lond. Math. Soc.36, 221-230, 1961.
[9] W.Whiteley: The union of matroids and the rigidity of frameworks. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1(2), pp.237-255, 1988.
[10] W.Whiteley: Some matroids from discrete applied geometry. Contemporary Mathematics, vol.197, pp.171-311, 1996.