

古典油彩画グレース技法シミュレーションの高速化

篠澤 和恵^{1,a)} 榎沢 順² 高田 雅美¹ 城 和貴¹

受付日 2012年8月22日, 再受付日 2012年10月12日,
採録日 2012年11月26日

概要: コンピュータ上での絵具の発色シミュレーションは, グラフィックソフトウェアへの応用が期待できる. 古典油彩画における「グレース」は, 薄く溶いた透明な絵具の層を重ねる技法であり, 混色で表現できない色調を, 重色によって表現するものである. その発色は, 放射伝達方程式を解くことによって求められる. しかし従来手法は, 異なる絵具でグレースを行う方法が示されておらず, 高精度な解を得るには計算量が大きくなるため, グラフィックソフトウェアへの応用には不向きである. 本研究では, まず従来手法を異なる絵具の層に対応できるように拡張する. さらに, 係数行列を分解し, 刻み幅を固定することにより, 高精度な解を小さい計算量で得ることが可能な数値解法を提案する. また, 実際の油絵具のデータを用いて数値実験を行い, 高精度な解が, 従来手法の約 4%~7%の計算時間で求められることを示す.

キーワード: 油彩モデル, 放射伝達方程式, グレース技法, コンピュータグラフィックス, 絵具

Fast Simulation of Glazes in Classical Oil Paintings

KAZUE SHINOZAWA^{1,a)} JUN KURUMISAWA² MASAMI TAKATA¹ KAZUKI JOE¹

Received: August 22, 2012, Revised: October 12, 2012,
Accepted: November 26, 2012

Abstract: Computer simulations of paint color formation are potentially applicable to graphics software. In the “glazing” technique of the classical oil painting, one or more thin transparent layers of paints are applied to an opaque layer to create delicate color tones that cannot be achieved by color mixture. Its coloring can be simulated by solving a radiative transfer equation. However, the conventional technique is not suitable for application to graphics software because it is limited to one color and computational complexity rapidly increases with precision. Accordingly, we have developed a technique for multiple different paints, and also propose a numeric solution with high precision and small computational complexity by decomposing a coefficient matrix and fixing a step size. Furthermore, numerical simulations using data of actual oil paints shows that computation time for highly precise solutions is reduced to about 4%~7% compared to the conventional technique.

Keywords: oil painting model, radiative transfer equation, glazing, computer graphics, pigments

1. はじめに

現実の絵画の効果をコンピュータグラフィックスで実現させることは, 重要な研究テーマの 1 つであり, 水彩画に関する研究 [1], 絵具モデルに関する研究 [2], 色鉛筆画に

関する研究 [3] などが行われている. 一方, 油彩のタッチを模した効果を与え, 油絵風な絵画に加工する技術は, すでにグラフィックソフトウェアとして提供され, 広く使われている [4]. しかし, それはあくまでタッチの模倣であり, 画材としての油絵具の発色特性をシミュレートしたものではない.

油彩には, 主に 2 つの代表的な技法がある. 1 つは「アラプリマ」と呼ばれる近代的な技法であり, 1 つは「グレース」と呼ばれる古典油彩画で用いられた技法である. 前者は, 下塗りをせずに油絵具が湿った状態で一気に描く技法

¹ 奈良女子大学
Nara Women's University, Nara 630-8506, Japan

² 千葉商科大学
Chiba University of Commerce, Ichikawa, Chiba 272-8512, Japan

a) shino@ics.nara-wu.ac.jp

であり、コンピュータグラフィックスの分野では、先に述べた油絵風な絵画に加工するソフトウェアや、油絵シミュレータの研究 [5] などがある。後者は「グラッシ」や「透層法」とも呼ばれる透明な層を重ねて表現する技法であり、混色では表せない微妙な色調を、重色によって表現するものである。

現在普及している 2 次元グラフィックソフトウェアにおいても、各レイヤで透明度と下層との演算方法を設定することが可能である [4]。しかし、擬似的に減法混色に基づく演算（乗算）を選んだとしても、実際の絵具の塗り重ねとは違った色になる。現在の 2 次元グラフィックソフトウェアでは、レイヤの透明度を上げると色が薄くなってしまいうため、油彩のように透明感とともに色の存在感を持たせることは困難である。グレースのシミュレーション技術により、グレースの技法をコンピュータ上で再現し、古典油彩画で行われているような重色が可能なグラフィックソフトウェアの実現が期待できる。

既存のコンピュータグラフィックス研究として、コンピュータカラーマッチングで広く使われている Kubelka-Munk モデル [6] により、分光反射率を推測して色を求めるアプローチがある [1], [2]。これは光の吸収と散乱を上下方向に進む光に単純化したモデルであり、散乱が考慮されるため、現実の絵画の発色により近い混色や重色計算が可能である。また分光反射率を求めるため、照明条件の変更などにも対応できる。しかし、3 次元的存在である現実の絵画に対し、1 次元モデルである Kubelka-Munk モデルでは光の入射角や観測角を変更した場合の計算ができないなど、方向依存性を取り扱えないという問題がある。

これに対し、3 次元空間における放射伝達方程式を用いたモデルが提案されている [7], [8], [9]。放射伝達方程式とは光の伝搬を表す式で、消散で光が失われる効果と、光が入ってくる効果の双方を考慮した方程式である。Elias らは、放射伝達方程式の解法として補助関数法 (AFM) を提案している [10]。補助関数法は、放射伝達方程式中の多重散乱項の関数を変数と見なし、微積分方程式で表される放射伝達方程式を線形積分方程式に変換して解く手法である。そのため、離散座標法やモンテカルロ法などの他の解法のように、角度の離散化などの問題が発生しないという利点がある。また、層内で連続的に散乱係数と吸収係数を変化させることや、基層の反射、多重散乱、単一散乱の 3 種類の項に分離して評価することも可能である [8]。

補助関数法には角度の離散化の問題はないが、線形積分方程式の数値解法に精度が依存する。精度を高めるには、線形積分方程式を離散化する際に求める連立 1 次方程式の係数計算コストが大きくなる。そのため、入射角、観測角、厚さなどのパラメータを変更したうえで分光反射率を再計算するには時間を要する。これは、グレースの発色シミュレーションによる重ね塗りの色調整や、グラフィックソフ

トを開発する際の障害となっている。

そこで我々は、より高速にグレースシミュレーション計算を行うため、補助関数法における数値計算の高速化手法を提案する。

まず、Elias らが提示したモデル式を、吸収係数と散乱係数の変化に対応した式に拡張する。さらに、それに応じた離散的なモデル式を提示する。そこから、対称テプリッツ行列とハンケル行列の計算に着目し、重複する計算を除くことにより、解の精度を保った高速化を行う。また、刻み幅を固定し、最大行数の行列を計算してその部分行列を利用することにより、分光反射率を求める際の重複する計算を回避し、高速計算を可能とする。さらに、実験により計算時間の比較を行い、解の精度を検証する。

2. グレースとそのモデル化

本章では、古典油彩画で用いられたグレース技法とそのモデル化について詳しく述べる。まず、2.1 節で、グレース技法に関して述べ、2.2 節で、放射伝達方程式を用いたモデル式について述べ、2.3 節で、解法である補助関数法について述べる。

2.1 グレース (透層法) とは

油絵具の展色材、つまり、顔料と混ぜる溶剤である乾性油は、乾燥時、酸化重合によって固化する。そのため、展色材が蒸発してしまう水彩、アクリルなどの絵具とは違い、顔料を包み込む形で油の層が存在する。つまり、他絵具のように固着成分が揮発して下地層が見えている状態とは異なり、本質的な透明性を持ち合わせているといえる [11]。また、固化した油の中に顔料が分散した形で発色するため、顔料だけでなく、固着成分の屈折率の影響を受けるのも特徴の 1 つである。

この油絵具の透明性を生かした技法に、「グレース」がある。これは、油彩の古典的な技法の 1 つで「グラッシ」「透層法」とも呼ばれている。「透層 (ラズール)」を何層も重ねて色を作り出す技法で、乾燥している不透明色の下地の上に、透明色を数回薄く塗り重ねるものである。17 世紀のヨーロッパの画家であるベラスケス、レンブラントなどはこの技法を巧みに使ったといわれており、30 層～40 層もの重色が行われる場合もある [12]。この技法では層を重ねるため明度が低下する。そのため下地には明るい色を使用することが多い。また、上層ほど透明度の高い絵具を使用するのが一般的である。グレースにより、混色では表現できない微妙な色調が表現できるといわれている。

2.2 グレースのモデル化

Elias らは、グレースシミュレーションを行うために、技法を使える現代の画家によって作成されたサンプル断面を電子顕微鏡で観察し、その結果を報告している [7]。それに

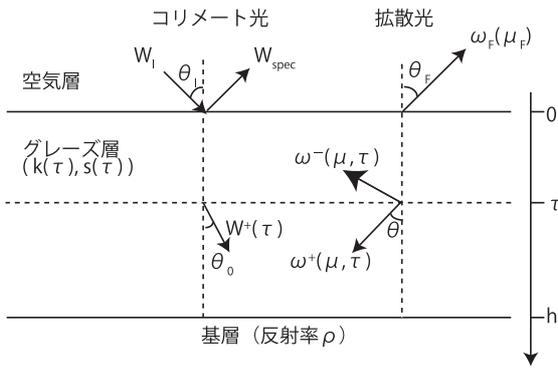


図 1 グレーズモデル模式図

Fig. 1 A schematic view and our notation of the glaze model.

よると、2.3%程度の顔料容積濃度で顔料が分散し、顔料粒子は直径およそ $5\mu\text{m}$ であり、顔料の大きさ、形、および方位にはランダムネスがあるとしている。また、1層の厚さは各層ほぼ同じで $12\mu\text{m}$ であり、層の境界面は平面であるが、同じ絵具を塗り重ねた場合には層の境界面は観測されないとしている。さらに、グレーズで使用されている展色材であるリンシードオイルは屈折率が $n = 1.478$ 、基層の展色材に含まれるにかわは屈折率が $n = 1.456$ であるとしている。

それらに基づき、Elias らは、以下を仮定しモデル化を行っている。

- 空気層とグレーズ層の境界、および、グレーズ層と基層の境界は平面かつ平行
- 顔料のランダムネスから、散乱は等方的
- 基層の反射はランバート反射を適用

また、パラメータとして以下を用いている。

- 1層の厚さは $12\mu\text{m}$ とし、全体の厚さは層数の乗算
- すべての展色材に対して屈折率 n は 1.5

図 1 に、グレーズモデルの模式図を示す。

$k, s (k \geq 0, s \geq 0)$ を吸収係数と散乱係数とする。吸収係数と散乱係数はそれぞれ、光が単位長さ進む間の吸収・散乱の強さを表す量で、値が大きいほど吸収・散乱が強くなる。単位長さを 1m とする場合、 k, s の単位は m^{-1} となる。反射の比率となるアルベド q を $q = s/(k + s)$ とする。 $q < 1$ の場合は $k \neq 0$ であり吸収があることを示す。また、 z を層の深さを表す変数とすると、 τ は光学的深さで、 $\tau = \int_{x=0}^z (k + s) dx$ である。 k と s が定数なら $\tau = (k + s)z$ となる。光学的深さ τ は、不透明さの程度を示す尺度であり、吸収と散乱が強い場合に大きい値をとる。光学的深さ τ およびアルベド q は単位がない無次元数となる。 $\tau = 0$ を空気層とグレーズ層の境界、 $\tau = h$ をグレーズ層と基層の境界とする。 h をグレーズ層の光学的厚さと呼ぶ。 h は τ 同様無次元数であり、厚さの実測値と k, s 値によって決まる。

また、 (θ_I, φ_I) を入射角の天頂角と方位角、 (θ_F, φ_F) を観測角の天頂角と方位角とする。光の方向は θ と φ の組に

よって定義されるが、このモデルは方位角 φ において等方的であるため、天頂角 θ のみに依存する。以下、式を簡単にするため変数 $\mu = \cos \theta$ を用いる。 μ は $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $0 \leq \mu \leq 1$ の範囲で一意に決まる。 θ_0 は θ_I の、屈折率 n である媒体において対応する角度で、 $\sin \theta_I = n \sin \theta_0$ を満たす。以下、 $\mu_I = \cos \theta_I, \mu_F = \cos \theta_F, \mu_0 = \cos \theta_0$ とする。

$W^+(\tau), W^-(\tau)$ を光学的深さ τ におけるコリメート光に対する分光放射照度、 $\omega^+(\mu, \tau), \omega^-(\mu, \tau)$ を光学的深さ τ における方向 μ への拡散光束に対する分光放射輝度とする。コリメート光とは、収束や拡散をしない平行な光のことである。空気層から基層への垂直方向を $\theta = 0$ とすると、それぞれ、上付き文字+は上流の方向 ($0 < \theta < \pi/2$)、上付き文字-は下流の方向 ($\pi/2 < \theta < \pi$) を示す。 $W^+(\tau)$ は、ランバートベールの法則にしたがって減少し、以下で表される。

$$W^+(\tau) = W^+(0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) \quad (1)$$

基層はランバート反射と仮定するため、負の方向にコリメート光はない。よって、 $0 < \tau < h$ において、 $W^-(\tau) = 0$ となる。境界面 $\tau = 0$ においては、 $W^+(0) = T(\mu_I), W_{spec} = R(\mu_I)$ である。ここで $R(\mu_I)$ と $T(\mu_I) = 1 - R(\mu_I)$ は、フレネル法によって与えられる反射係数と透過係数である。

このとき、放射伝達方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^\pm(\mu, \tau)}{d\tau} = & \mp \frac{\omega^\pm(\mu, \tau)}{|\mu|} \\ & \pm \frac{q}{4\pi} \int_0^1 [\omega^+(\mu_1, \tau) + \omega^-(\mu_1, \tau)] \frac{2\pi}{\mu_1} d\mu_1 \\ & \pm \frac{q}{4\pi} \frac{W^+(\tau)}{\mu_0} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。第1項は、吸収と散乱による拡散光束の減衰、第2項は、すべての方向 μ_1 からの拡散光束の方向 μ への散乱(多重散乱)、第3項は、 μ_0 方向から来たすべてが方向 μ へ拡散するコリメート光束の変化(単一散乱)である。この式の第2項と第3項をそれぞれ次のようにおく。

$$f(\tau) = \int_0^1 [\omega^+(\mu_1, \tau) + \omega^-(\mu_1, \tau)] \frac{d\mu_1}{\mu_1} \quad (3)$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{W^+(\tau)}{\mu_0} \quad (4)$$

$t(\tau) = f(\tau) + g(\tau)$ を全体の散乱に対する増分とすると、放射伝達方程式は、

$$\frac{d\omega^\pm(\mu, \tau)}{d\tau} = \mp \frac{\omega^\pm(\mu, \tau)}{\mu} \pm \frac{q}{2} t(\tau) \quad (5)$$

となる。

Elias らは同じ絵具による塗り重ね実験を行っているため、式(5)のように q を定数として式を提示している。し

かし、異なる絵具を塗り重ねる場合は q の値が深度方向で変化するため、 q は τ の関数となる。その場合、式 (5) は次式となる。

$$\frac{d\omega^\pm(\mu, \tau)}{d\tau} = \mp \frac{\omega^\pm(\mu, \tau)}{\mu} \pm \frac{1}{2} q(\tau) t(\tau) \quad (6)$$

式 (6) により、式 (5) では計算できない、異なる絵具の塗り重ねを行っているグレーズ層における光の伝搬が計算可能となる。

2.3 補助関数法

補助関数法 [10] とは、放射伝達方程式を、 $f(\tau)$ を補助関数とし、 $f(\tau)$ の線形積分方程式の形に変換して解く手法である。Elias らは補助関数法の利点として、層内でアルベド q や屈折率 n などのパラメータが変化する場合にも解くことが可能であるという点をあげ、一般的な式を示している [13]。しかしそれらは複雑であり扱いにくい。グレーズモデルに限る場合、式は比較的簡単となる。しかし、Elias らはグレーズモデルに補助関数法を応用する際、式 (5) を使用し、単一の絵具の塗り重ね計算を行っている [7]。そのため、そのままでは異なる絵具の塗り重ねの計算ができない。本節では、異なる絵具の塗り重ね計算に対応可能とするため、グレーズモデルの仮定に基づいた境界条件を式 (6) に適用し、補助関数法により解く過程を説明する。そして、異なる絵具を塗り重ねた層の反射率計算式を示し、既存研究で使われている式との差異を示す。

$0 < \mu < 1$, $0 < \tau < h$ において式 (6) を解くと以下となる。

$$\omega^+(\mu, \tau) = \omega^+(\mu, 0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_0^\tau q(s) t(s) \exp\left(\frac{s-\tau}{\mu}\right) ds \quad (7)$$

$$\omega^-(\mu, \tau) = \omega^-(\mu, h) \exp\left(\frac{\tau-h}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_\tau^h q(s) t(s) \exp\left(\frac{\tau-s}{\mu}\right) ds \quad (8)$$

$H(\tau, s)$ を指数積分関数

$$H(\tau, s) = \int_0^1 \frac{\exp(-|\tau-s|/\mu)}{\mu} d\mu \quad (9)$$

とすると、式 (3), (7), (8) より、

$$f(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^h H(\tau, s) q(s) t(s) ds + \int_0^1 \left\{ \omega^+(\mu, 0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \omega^-(\mu, h) \exp\left(\frac{\tau-h}{\mu}\right) \right\} \frac{d\mu}{\mu} \quad (10)$$

グレーズ層と空気の境界面 ($\tau = 0$) における境界条件と、グレーズ層と基層の境界面 ($\tau = h$) における境界条件は、以下で与えられる。

$$\omega^+(\mu, 0) = R(\mu) \omega^-(\mu, 0) \quad (11)$$

$$\omega^-(\mu, h) = \frac{\rho}{\pi} B \mu \quad (12)$$

ただし、 ρ は基層の反射率とする。 B は基層に届く光束全体であり、以下で表す。

$$B = W^+(h) + 2\pi \int_0^1 \omega^+(\mu, h) d\mu \quad (13)$$

第1項は基層に到達するコリメート光束、第2項は基層に到達する拡散光束である。式 (7), (8) に境界条件 (11), (12) を適用し、 $\tau = 0$, $\tau = h$ を代入することにより、境界付近での拡散光が以下のように求められる。

$$\omega^+(\mu, h) = R(\mu) \left\{ \frac{\rho}{\pi} B \mu \exp\left(\frac{-h}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_0^h q(s) t(s) \exp\left(\frac{-s}{\mu}\right) ds \right\} \exp\left(-\frac{h}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_0^h q(s) t(s) \exp\left(\frac{s-h}{\mu}\right) ds \quad (14)$$

$$\omega^-(\mu, 0) = \frac{\rho}{\pi} B \mu \exp\left(\frac{-h}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_0^h q(s) t(s) \exp\left(\frac{-s}{\mu}\right) ds \quad (15)$$

式 (10) に境界条件 (11), (12) および式 (14), (15) を代入し整理すると、

$$f(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^h \{H(\tau, s) + U(\tau, s)\} q(s) t(s) ds + \frac{\rho}{\pi} B M(\tau) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$U(\tau, s) = \int_0^1 R(\mu) \frac{\exp(-(\tau+s)/\mu)}{\mu} d\mu \quad (17)$$

$$M(\tau) = \int_0^1 \left\{ \exp\left(\frac{\tau-h}{\mu}\right) + R(\mu) \exp\left(\frac{-(h+\tau)}{\mu}\right) \right\} d\mu \quad (18)$$

B は最終的に次式で表される。

$$B = \frac{T(\mu_i) \exp(-h/\mu_0) + \pi \int_0^h M(s) q(s) t(s) ds}{(1 - \rho K)} \quad (19)$$

ただし、

$$K = 2 \int_0^1 R(\mu) \mu \exp(-2h/\mu) d\mu \quad (20)$$

式 (16), (19) より、以下の線形積分方程式を得る。

$$f(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^h \left[H(\tau, s) + U(\tau, s) + \frac{2\rho}{1 - \rho K} M(\tau) M(s) \right] q(s) t(s) ds + \frac{\rho}{1 - \rho K} \frac{T(\mu_I) \exp(-h/\mu_0)}{\pi} M(\tau) \quad (21)$$

また、 $n^2(1 - \mu^2) = 1 - \mu_F^2$, $\omega_f(\mu_f) = T(\mu)\omega^-(\mu, 0)$ より、システムの拡散反射 $\rho_F(\mu_I, \mu_F)$ は、次式で求められる。

$$\rho_F(\mu_I, \mu_F) = \frac{\pi}{n^2} \frac{T(\mu)}{\mu} \omega^-(\mu, 0) \quad (22)$$

ここで μ は μ_F に対応する媒質内の角変数である。

既存研究 [7] で示されている式は、式 (21) における $q(s)$ が一定値をとる場合である。 q が定数の場合は積分記号の外側に出すことが可能になり、既存研究の式と一致することが分かる。

3. 数値解法

3.1 反射率の求め方

2.3 節の式 (21) は、層内での絵具による吸収や散乱、基層からの反射、空気層との境界で戻る光の効果などの入った複雑な積分方程式となっており、解析的に解くことは困難である。そのため、数値解を得るため式 (21) を離散化する。数値解法は Elias らが使用した手法 [10] に従う。ただし、式 (21) は既存研究 [7] の線形積分方程式と、アルベド q が関数として積分項にあるという点で異なるため、本節では節点の考え方について述べ、アルベドを表す対角行列 \mathbf{P} を導入し、数値解を求める。

光学的厚さを h 、刻み幅を Δh とするとき、 $[0, h]$ を $[(i-1)\Delta h, i\Delta h]$ ($i = 1, \dots, Q$) の Q セグメントに分割する。刻み幅 Δh を小さくとることにより、積分を精度良く数値計算することが可能である。

各セグメントの中点を節点と呼び、 $\tau_i = i\Delta h - \Delta h/2$ ($i = 1, \dots, Q$) とおく。セグメント内の $f(\tau)$, $g(\tau)$ は一定値をとると見なし、節点における代表値で近似する。アルベド関数 $q(\tau)$ に関しても微小領域の変化は小さいと考えられるため、同様に節点における代表値で近似する。 τ_i における値を、 $f_i = f(\tau_i)$, $g_i = g(\tau_i)$, $t_i = f(\tau_i) + g(\tau_i)$, $q_i = q(\tau_i)$ ($i = 1, \dots, Q$) とする。これらは各セグメントで一定のため、積分記号の外に出すことができる。式 (21) より、

$$f_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q \left(\int_{\tau_j - \Delta h/2}^{\tau_j + \Delta h/2} (H(\tau_i, s) + U(\tau_i, s) + \frac{2\rho}{1 - \rho K} M(\tau_i)M(s)) ds \right) q_j t_j + \frac{\rho}{1 - \rho K} \frac{T(\mu_I) \exp(-h/\mu_0)}{\pi} M(\tau_i) \quad (23)$$

となることから、

$$f_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q \left(H_{i,j} + U_{i,j} + \frac{2\rho}{1 - \rho K} M_i M'_j \right) q_j t_j + \frac{\rho}{1 - \rho K} \frac{T(\mu_I) \exp(-h/\mu_0)}{\pi} M_i \quad (24)$$

と書ける。ただし、 $M_i = M(\tau_i)$ であり、

$$\begin{aligned} H_{i,j} &= \int_{\tau_j - \Delta h/2}^{\tau_j + \Delta h/2} H(\tau_i, s) ds \\ U_{i,j} &= \int_{\tau_j - \Delta h/2}^{\tau_j + \Delta h/2} U(\tau_i, s) ds \\ M'_j &= \int_{\tau_j - \Delta h/2}^{\tau_j + \Delta h/2} M(s) ds \end{aligned} \quad (25)$$

である。行列 \mathbf{A} , \mathbf{P} および、ベクトル \mathbf{t} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{m} を以下のように定義する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & A_{1,Q} \\ & \ddots & \\ A_{Q,1} & & A_{Q,Q} \end{pmatrix} \quad (26)$$

ただし、 $A_{i,j} = H_{i,j} + U_{i,j} + \frac{2\rho}{1 - \rho K} M_i M'_j$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_Q \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_Q)^t, \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_Q)^t, \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_Q)^t \quad (28)$$

$$\mathbf{m} = \left(\frac{\rho}{1 - \rho K} \frac{T(\mu_I) \exp(-h/\mu_0)}{\pi} M_1, \dots, \frac{\rho}{1 - \rho K} \frac{T(\mu_I) \exp(-h/\mu_0)}{\pi} M_Q \right)^t \quad (29)$$

このとき、 $\mathbf{P}\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{P}\mathbf{g} = (q_1 t_1, \dots, q_Q t_Q)^t$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{P}\mathbf{g}) + \mathbf{m} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{f} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{g} + \mathbf{m} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$\mathbf{b} = 1/2\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{g} + \mathbf{m}$, および、 \mathbf{E} を Q 次の単位行列とすると以下の連立 1 次方程式を得る。

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{E} \right) \mathbf{f} = -\mathbf{b} \quad (31)$$

この式 (31) を解くことにより、 \mathbf{f} が求められる。最終的な反射率は、以下で求められる。

$$\rho_F(\mu_I, \mu_F) = \frac{\pi}{n^2} \frac{T(\mu_{out})}{\mu_{out}} \omega^-(\mu_{out}, 0) \quad (32)$$

ただし、 μ_{out} は観測角 μ_F に対応するグレース層における角変数であり、

$$\begin{aligned} \omega^-(\mu_{out}, 0) &= \frac{\rho}{\pi} B \mu_{out} \exp(-h/\mu_{out}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q \left(\int_{\tau_j - \Delta h/2}^{\tau_j + \Delta h/2} \exp(-s/\mu_{out}) ds \right) q_j t_j \end{aligned} \quad (33)$$

$$B = \frac{T(\mu_i) \exp(-h/\mu_0) + \pi \sum_{j=1}^Q M'_j q_j t_j}{(1 - \rho K)} \quad (34)$$

である。

本節で導入した対角行列 \mathbf{P} は、アルベドを q から $q(\tau)$ に拡張したため必要となる行列である。対角行列 \mathbf{P} の存在により、 \mathbf{P} を求め、積をとる計算過程は増えるが、異なる絵具の塗り重ねに対応できるため、より実用的となる。

3.2 分光反射率の計算

人間が知覚する色を求めるためには、分光反射率、つまり、可視領域の波長にわたり $\rho_F(\mu_I, \mu_F)$ を計算する必要がある。通常、絵具層の吸収係数 $k(\tau)$ 、散乱係数 $s(\tau)$ は波長 λ で異なる値をとるため、アルベド $q(\tau)$ と光学的厚さ h は波長 λ で異なる。

また、入射角 μ_I と観測角 μ_F はベクトル \mathbf{b} には影響するが、行列 \mathbf{A} には影響しない。

以上の内容から計算手順は以下となる。

ある波長 λ に対して次を実行する。

- (1) 絵具層の構成から、アルベド関数 $q(\tau)$ を求め、行列 \mathbf{P} を計算
 - (2) 行列 \mathbf{A} を計算
 - (3) 入射角 μ_I 、観測角 μ_F についてベクトル \mathbf{b} を計算
 - (4) 連立1次方程式を解き、ベクトル \mathbf{f} を計算
 - (5) 反射率 $\rho_F(\mu_I, \mu_F)$ を計算
 - (6) $\mu_I = \mu_F$, $|\varphi_I - \varphi_F| = \pi$ の場合は、鏡面反射 $W_{spec} = R(\mu_I)$ を $\rho_F(\mu_I, \mu_F)$ に加算
- 以上を、可視領域の波長 λ ($380\text{ nm} \leq \lambda \leq 780\text{ nm}$) に対して繰り返し計算する。

4. 高速化の検討

4.1 行列の分解

この計算過程では、離散化数 Q の増加にともない、行列 \mathbf{A} の項の値を求める部分の計算量が増大する。そこで本研究では、行列を分解することにより計算量の削減を図る。

式 (25), (26) より、 \mathbf{A} は以下の3つの行列の和の形に変形できる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{Q,1} & \cdots & H_{Q,Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{1,1} & \cdots & U_{1,Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{Q,1} & \cdots & U_{Q,Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cM_1M'_1 & \cdots & cM_1M'_Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cM_QM'_1 & \cdots & cM_QM'_Q \end{pmatrix} \quad (35)$$

ただし、 $c = 2\rho/(1 - \rho K)$ 。ここで、 $\mathbf{H} = (H_{i,j})$ は対称テプリッツ行列、 $\mathbf{U} = (U_{i,j})$ はハンケル行列となっている。

対称テプリッツ行列とは、対称行列でさらに主対角線および副対角線に沿って一定の要素を持つ行列であり、以下のような形となる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

つまり、 a_1, \dots, a_n を計算すると行列 \mathbf{H} が決定する。ハンケル行列とは、正方行列で逆の対角成分が等しい行

列であり、以下のような形となる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

つまり、 a_1, \dots, a_{2n-1} を計算すると行列 \mathbf{U} が決定する。

以上から Q 次の行列 \mathbf{H} , \mathbf{U} に関して、 \mathbf{H} は Q 回、 \mathbf{U} は $2Q - 1$ 回の計算で $Q \times Q$ 個の項の値が決定することが分かる。また、 $\mathbf{M} = (M_i)$, $\mathbf{M}' = (M'_i)$ は Q 次のベクトルであるため、 Q 回の計算で決定される。つまり \mathbf{A} をダイレクトに計算するのではなく、 \mathbf{H} , \mathbf{U} , \mathbf{M} と3つに分けて計算することにより、計算結果を同一とする計算量の削減が可能となる。

4.2 刻み幅の統一

光学的厚さ h 、刻み幅 Δh に対して、離散化数は $Q = h/\Delta h$ で求められるが、 Q は2以上の整数である必要がある。たとえば、 $h = 2.33$, $\Delta h = 1/50$ のとき、 $Q = h/\Delta h = 116.5$ となるが、 Q は整数であるため 116 もしくは 117 となり、丸め誤差が生じる。この丸め誤差の問題は、単一層の場合でも起こる。

この丸め誤差を解消する方法として、2つの方法が考えられる。1つは、 Q に合わせて刻み幅 Δh を調整する方法、もう1つは光学的厚さ h を調整する方法である。つまり上記の例で $Q=117$ を選択する場合、前者は、 $\Delta h = h/Q = 2.33/117 = 0.0199\dots$ であり、後者は、 $\Delta h = 0.02$ (定数)、 $h = Q\Delta h = 117 * 0.02 = 2.34$ である。

行列 \mathbf{H} , \mathbf{U} の各項の値は光学的厚さ h には依存しないが、刻み幅 Δh には依存する。つまり、 Δh を定数にして統一する場合、1度計算した項の値は再利用が可能である。一方 Δh を変更する場合は、 \mathbf{H} , \mathbf{U} の項の値が h と Q によって変わるため、そのつど再計算が必要となる。

そこで、 Δh は一定とし、光学的厚さ h を変更する方法を選択することにより、分光反射率を求める際の、行列 \mathbf{H} , \mathbf{U} の計算量を削減する。具体的には、各 λ に対して、 $Q(\lambda)$ の最大値 Q_{max} をあらかじめ求め、 $Q_{max} \times Q_{max}$ の行列 \mathbf{H}_{max} , \mathbf{U}_{max} を計算する。 $Q_{max} \geq Q(\lambda)$ となる $Q(\lambda)$ については、 \mathbf{H}_{max} , \mathbf{U}_{max} の $Q(\lambda) \times Q(\lambda)$ 部分行列を使用し、再計算を回避する。また、計算結果を保存し、 $Q \leq Q_{max}$ の場合に使用することが可能である。 $Q > Q_{max}$ の場合は再計算し、 Q を新たに Q_{max} として更新する。

5. 実験

実験により、提案手法と従来手法の計算時間の比較と計算精度の検証を行う。MATLAB プログラムを開発し、組み込みのストップウォッチ関数 (tic, toc) により、プログ

表 1 プログラムの実行時間の比較 (秒)

Table 1 Comparison of the execution time of programs (in seconds).

離散化数	30	60	90	120
従来手法	31.10	99.44	185.40	294.21
提案手法	1.64	2.56	3.23	3.92

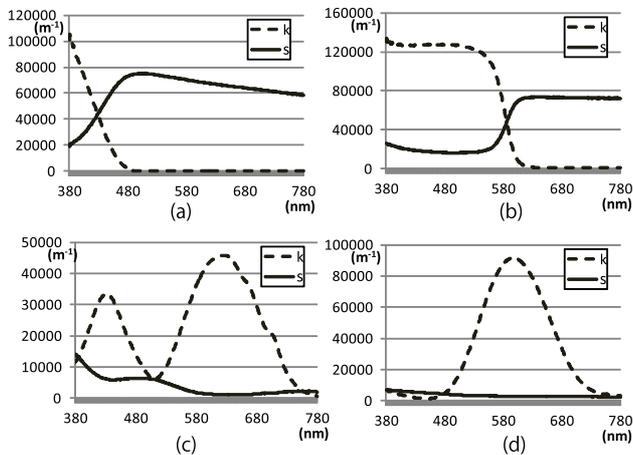


図 2 使用する絵具の吸収係数 k と散乱係数 s のグラフ. (a) Yellow lead and tin (Kremer 社製), (b) Vermillion (Kremer 社製), (c) Viridian green (Kremer 社製), (d) Ultramarine blue (Sennelier 社製)

Fig. 2 Absorption and scattering coefficients of (a) Yellow lead and tin, (b) Vermillion, (c) Viridian green, and (d) Ultramarine blue.

ラムの実行時間を計測する.

実験に使用する計算機環境は以下となる.

- ハードウェア: SGI UV100
- メモリ容量: 768 GB (8 GB×96)
- OS: SUSE Linux Enterprise Server 11
- プログラミング言語: MATLAB Version 7.13.0.564

なお, 実験において明示的な並列化は行っていない.

まず, 4.1 節で述べた行列を分解する効果を確認するため, A を分解しない場合と, H, U, M の 3 つの行列に分けて計算する場合の比較を行う. 媒体の屈折率 n を 1.5, 基層の反射率 ρ を 1 とし, 行列 A を分解せず計算する結果を従来手法, 分解する場合の結果を提案手法とし, それぞれ 100 回実行した平均値を表 1 に示す. 刻み幅 Δh は既存研究で推奨している 0.02 を使用している [7].

この結果から分かるように, 行列を分解することにより, 離散化数 30 の場合で 5%, 離散化数 120 の場合で 1% 程度まで計算時間を短縮することが可能となる.

次に, 4.2 節で述べた刻み幅の統一を行う場合と, 行わない場合の計算時間を計測し比較する. まず, 既存研究 [14] において計測された, 絵具の吸収係数・散乱係数データから, 黄系, 赤系, 緑系, 青系の絵具を 1 種類ずつ選択し使用する. 使用する絵具データを図 2 に示す.

本実験では 4 種類のデータから 2 種類を選び, 厚さ $12 \mu\text{m}$

の 2 層で塗付する場合の反射率を計算する. なお, 先の実験同様, 媒体の屈折率 n を 1.5, 基層の反射率 ρ を 1 とし, 行列 A は, 先の実験で高速化が確認された, 分解して計算する方法で求める. 求めた A について, 入射角を 0, 観測角を 0 とし, LU 分解を使用して連立方程式を解き, 反射率を計算する. さらに, 380 nm から 780 nm まで 10 nm 刻みで分光反射率を求め, 24 ビットの RGB 値へ変換する. 表 2 および表 3 に, 刻み幅を統一しない場合と, 統一する場合の計算時間を示す. 計算時間は刻み幅の大きさに依存するため, それぞれ刻み幅 0.01~0.04 について計算している. 刻み幅の統一をしない場合については, 刻み幅は表に示す数値前後の値をとる. 使用する絵具は, 図 2 のグラフの番号の組合せで, 「第 1 層/第 2 層」としている. 層の順序が異なると計算される反射率は異なるが, 計算時間はほぼ同一であるため, ここでは絵具の組合せが異なる場合の結果のみを示す.

また, 刻み幅の統一による再利用率を調べ, 計算時間短縮に対する効果を検証する. 再利用率とは, H, U で計算が必要な項のうち, 再利用を行った項の比率とする. 絵具層の構成が同じ場合は刻み幅によらず再利用率はほぼ同一であるが, ここでは 4 種類の刻み幅による平均値をとり, 表 3 に示す. また, 表 3 の実行時間を表 2 の数値で割った値を短縮率とし, 4 種類の刻み幅による平均をとった平均短縮率も同様に示す.

この実験結果より, 統一する場合の計算時間は, 統一しない場合の 4%~7% 程度に短縮されており, 統一することで計算時間を大幅に短縮できることが分かる. また, 再利用率が高い場合は計算時間の短縮効果が大きいことから, 本手法が計算時間短縮に効果的であることが分かる.

なお参考のため, 同等のプログラムを以下のスペックのパソコンで実行する場合の処理時間を示す.

- プロセッサ: Intel(R) Core(TM) i5-2500K CPU @ 3.30 GHz
- 実装メモリ (RAM): 16.0 GB
- OS: Windows 7 Professional 64 bit
- プログラミング言語: Gnu Octave version 3.4.3

Gnu Octave は, MATLAB と互換性を持ったフリーの数値解析ソフトウェアである. この場合, 表 2 の「a/b」については, 刻み幅 0.01 の場合 2951.57 秒, 0.04 の場合 863.60 秒であり, 表 3 の「a/b」については, 刻み幅 0.01 の場合 102.51 秒, 0.04 の場合 29.765 秒である.

次に, 計算値の精度について検証する. 表 2 に示す, 「刻み幅を統一しない」かつ「刻み幅が約 0.01」である場合の計算結果を最も高精度と仮定して, 基準値に設定する. 刻み幅を大きくして計算時間を短縮する場合と, 刻み幅を統一して計算時間を短縮する場合について, 基準値との差を比較する. 比較のため, 入射角と観測角を $0 \sim \pi/2$ に $\pi/36$ 刻みで変化させた計 19×19 の値についてそれぞれ RGB 値を

表 2 プログラムの実行時間 (秒) : 刻み幅を統一しない場合

Table 2 The execution time of programs (in seconds): segment widths are not unified.

刻み幅	a/b	a/c	a/d	b/c	b/d	c/d	平均
約 0.01	270.74	181.42	192.1	221.94	229.94	127.25	203.90
約 0.02	149.73	104.57	108.83	123.93	128.71	72.16	114.66
約 0.03	106.95	74.679	78.306	88.95	92.652	51.707	82.207
約 0.04	84.687	59.892	63.278	71.38	73.219	40.929	65.564

表 3 プログラムの実行時間 (秒) と再利用率 : 刻み幅を統一する場合

Table 3 The execution time of programs (in seconds) and reuse rates: segment widths are unified.

刻み幅	a/b	a/c	a/d	b/c	b/d	c/d	平均
0.01	10.628	6.7048	7.1751	7.7433	8.3379	6.9017	7.9151
0.02	5.5547	4.1015	4.3042	4.5125	4.7493	4.4489	4.6119
0.03	3.9944	3.1588	3.3068	3.3573	3.5241	3.5650	3.4844
0.04	3.2254	2.726	2.8005	2.8443	2.9449	3.1513	2.9487
平均短縮率	0.0379	0.0410	0.0408	0.0372	0.0379	0.0655	
平均再利用率	0.9769	0.9836	0.9842	0.9843	0.9765	0.9476	

表 4 RGB 値の比較

Table 4 Comparison of RGB values.

		a/b	a/c	a/d	b/c	b/d	c/d
刻み幅を	平均	0.2881	0.3047	0.2798	0.0083	0.0259	0.0803
大きくする方法	分散	0.2051	0.2119	0.2015	0.0082	0.0252	0.0739
刻み幅を	平均	0.0203	0.0092	0.0139	0.0018	0.0055	0.0480
統一する方法	分散	0.0199	0.0091	0.0137	0.0018	0.0055	0.0457

求め、基準値との差の絶対値をとり、平均と分散を求める。

表 4 に以下の 2 つの方法について比較した結果を示す。

- 刻み幅を大きくする方法 : 「刻み幅を統一しない」かつ「刻み幅が約 0.04」
- 刻み幅を統一する方法 : 「刻み幅を統一する」かつ「刻み幅が 0.01」

表 4 に示す 6 種類の組合せのすべてにおいて、刻み幅を統一する場合の方が基準値からのずれが小さくなっている。以上の結果から、刻み幅を統一する方法は、刻み幅を大きくして計算時間を短縮する方法より、計算精度を保ち、かつ、より計算時間の短縮が可能となっていることが分かる。

6. まとめ

我々は、古典油彩画の技法であるグレイズの、多様な色の塗り重ねが可能となるように、放射伝達方程式によるモデル式を、絵具層のアルベドの変化に対応する式に拡張した。

また、放射伝達方程式の補助関数法における数値計算の行列の形状に着目し、シミュレーションの高速化を行った。具体的には、係数行列を対称テプリッツ行列とハンケル行列の計算に分解し、重複する計算を削減した。刻み幅を固定し、最大行数の行列を計算してその部分行列を利用することにより、さらに計算コストを削減した。

実際の油絵具のデータを用いて数値実験を行い、高精度な解が、従来手法の約 4%~7%の計算時間で求められることを示した。

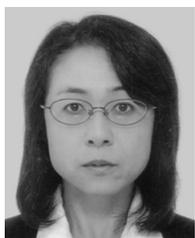
今後は、行列計算の並列化などによるさらなる高速化を目指すとともに、水平方向への吸収係数と散乱係数の変化への拡張などの検討を行い、より実用的なシミュレーションを目指す。

謝辞 絵具データをご提供いただき、有意義なご助言をくださった、Mady Elias 氏、および、有益な情報をくださった蔡東生氏に、謹んで感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Curtis, C.J., Anderson, S.E., Seims, J.E., Fleischer, K.W. and Salesin, D.H.: Computer-Generated Watercolor, *SIGGRAPH 97*, pp.421-430 (1997).
- [2] 齋藤 豪, 中嶋正之: Kubelka-Munk の理論を用いたデジタルペインティングのための絵の具モデル, 電子情報通信学会論文誌 D-II, 情報・システム, II-情報処理, Vol.82, No.3, pp.399-406 (1999).
- [3] 高木佐恵子, 藤代一成, 中嶋正之: 色えんぴつ画のポリウムモデリング, 情報処理学会論文誌, Vol.40, No.3, pp.1177-1187 (1999).
- [4] GIMP — The GNU Image Manipulation Program, available from <http://www.gimp.org/>.
- [5] 藤幡正樹: 「デジタルメディアを基盤とした 21 世紀の芸術創造」研究終了報告書, 戦略的創造研究推進事業 CREST

- 平成 21 年度研究終了報告書.
- [6] Kubelka, P. and Munk, F.: Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche, *Zeitschrift für technische Physik*, pp.593-601 (1931).
 - [7] Simonot, L., Elias, M. and Charron, E.: Special visual effect of art glazes explained by the radiative transfer equation, *Applied optics*, Vol.43, No.12, pp.2580-2587 (2004).
 - [8] Elias, M. and Simonot, L.: Separation between the different fluxes scattered by art glazes: Explanation of the special color saturation, *Applied optics*, Vol.45, No.13, pp.3163-3172 (2006).
 - [9] Elias, M. and Cotte, P.: Multispectral camera and radiative transfer equation used to depict Leonardo's sfumato, *Applied optics*, Vol.47, No.12/20 (2008).
 - [10] Elias, M., Elias, G.: New and fast calculation for incoherent multiple scattering, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol.19, No.5, pp.894-901 (2002).
 - [11] ホルベイン工業技術部 (編): 絵具の科学, 中央公論美術出版 (1994).
 - [12] マックス・デルナー: 絵画技術体系, 美術出版社 (1980).
 - [13] Elias, M. and Elias, G.: Radiative transfer in inhomogeneous stratified scattering media with use of the auxiliary function method, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol.21, No.4, pp.580-589 (2004).
 - [14] Latour, G., Elias, M. and Frigerio, J.: Determination of the Absorption and Scattering Coefficients of Pigments: Application to the Identification of the Components of Pigment Mixtures, *Applied Spectroscopy*, Vol.63, Issue 6, pp.604-610 (2009).



篠澤 和恵 (学生会員)

1966 年生。1990 年津田塾大学大学院理学研究科博士前期課程修了。同年日本電信電話(株)入社。画像処理研究に従事。横浜創英短期大学専任講師等を経て、現在は奈良女子大学大学院博士後期課程において古典油彩画のシ

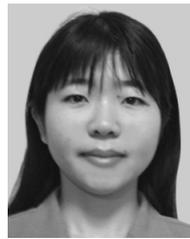
ミュレーション研究に従事。



棚沢 順

千葉商科大学 (Chiba University of Commerce) 教授, 早稲田大学国際情報通信研究センター (Waseda University Global Information and Telecommunication Institute) 客員研究員 (非常勤), 現代芸術, メディア芸術が専門。

美術解剖学会 (Society of Artistic Anatomy) 理事, ACM SIGGRAPH 会員。



高田 雅美 (正会員)

1977 年生。2004 年奈良女子大学大学院人間文化研究科複合領域科学専攻修了。博士(理学)を同大学より取得。2004 年独立行政法人科学技術振興機構戦略的創造研究推進事業において、京都大学大学院情報学研究科にて委嘱

研究院。2006 年奈良女子大学大学院人間文化研究科助手。2007 年奈良女子大学大学院人間文化研究科複合現象科学専攻助教。2012 年奈良女子大学大学院自然科学系助教。数値計算アルゴリズムの開発, 並列プログラムの開発に関する研究に従事。



城 和貴 (正会員)

大阪大学理学部数学科卒業。日本 DEC, ATR 視聴覚研究所 (日本 DEC より出向), (株)クボタ・コンピュータ事業推進室で勤務の後, 1993 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程入学, 1996 年同研

究科後期課程修了, 同年同研究科助手。1997 年和歌山大学システム工学部講師, 1998 年同助教授。1999 年奈良女子大学理学部情報科学科教授, 現在に至る, 博士(工博)。情報処理学会論文誌数値モデル化と応用編集委員長。