

時分割演算方式における待合せおよび改善率について*

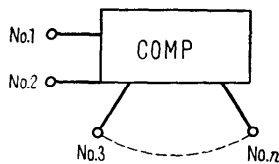
石井 善 昭**

1. 序 言

筆者は、先に NEAC-2202 トランジスタ計算機を開発したが¹⁾、この計算機は本邦ではじめて時分割演算方式を適用したもので、その使用実績は時分割演算方式の有用性を十分に示した。その後、NEAC-2202 の拡張として NEAC-2204 計算機を開発した²⁾。これらの開発を通じ、筆者は時分割方式の諸問題を検討してきた³⁾。

本論文には、これらの諸問題のうち、待合せおよび情報処理能力の改善率につき記載する。

時分割方式の計算システムでは(第1図)の如く一組の計算機構に対し、No. 1~No. n の複数個の入出力装置あるいは、外部記憶装置が接続される。



第1図 時分割方式のシステム構成

このように複数個の入出力装置が一組の計算機構を共用するため待合せの問題が生ずる。時分割方式には考慮すべき待合せとして、入出力の待合せと計算の待合せがある。

前者は、入出力の際に計算機が計算に占有されており、かつ入出力バッファレジスタに入力情報が満ちている(入力)、あるいは入出力バッファレジスタの出力情報が出力し終わって(出力)、入出力が行えないときに発生する。

後者は、計算段階に入っても他の計算を計算機が行っている間は待たなければならないことから発生する。これらの待合せが大きくなると、計算システムの使用に不便を生ずると共に、時分割方式の有効性を損ずるようになる。

* Waiting and improvement factor in time-sharing system, by Yoshiteru Ishii (Nippon Electric Co. Ltd., Kawasaki Japan)

** 日本電気株式会社

時分割方式の有効性は、計算機の情報処理能力の改善率で規定するのが適当であると考えられる。改善率は、時分割方式によるときの単位時間内の情報処理量の数学的期待値と時分割方式によらないときの単位時間内の情報処理量の数学的期待値の比で定義する。

時分割方式の計算機のシステム設計の基本的な問題は、これらの待合せおよび改善率を検討することによって解明できる。

計算機による情報の処理特に事務計算では、データの入力、計算、結果の出力の繰返しが主要部分を占める。また、かかる過程に時分割方式は特に有効である。本論文ではこのような ergodic な過程について論ずる。

この場合には、計算は入出力の間にはさまれて行われ第1図の No. 1~No. n の各々に対して入出力要求の流れと計算要求の流れが考えられる。各々の計算要求の流れ(成分の流れと呼ぶ)は待合せがあまり大きくないときは独立で、定常かつ通常の流れと見なしてよい。計算機が実際に受入れるのは、これらの合成した流れである。計算機を回線とみると、単一回線の待合せ理論が適用できる。

本論文には、これらの点に着目して考察を進め、さらに例として実用されている計算機の一つの典型と考えられるものについてその値を求める。このため、その計算機の入出力の間隔、命令の実行時間、プログラムの実行時間の確率的な性質についても記述する。

2. 入出力の待合せ

2.1 入出力の待合せの発生条件

入出力には m 文字分のバッファ・レジスタがあり、一区切りの計算が終ると、その区切りですべての入出力装置に対して、入出力バッファ・レジスタにある入力情報はすべて内部記憶に格納され、また出力情報は内部記憶よりバッファ・レジスタが満たされるまでバッファ・レジスタに移送されるものとする。すなわち、入出力バッファ・レジスタは入力のときは空になり、出力のときは満たされる。かつ、これらの入出力バッファ・レジスタと内部記憶間の入出力情報の移送に要する時間は充分小さく無視できるものとする。

かかる場合は、待合せは次の条件で生ずる。

(i) 入力待合せ

入出力バッファ・レジスタが空きの状態で入力が行われたとき計算が行われており、その後 (m+1) 文字目の入力が行われようとしたとき、なおその計算が継続していると待合せが生ずる。このときは、既に入出力バッファ・レジスタは満たされていて (m+1) 文字目の入力は受入れられない。

(ii) 出力待合せ

入出力バッファ・レジスタが満ちた状態で出力が行われたとき計算が行われており、その後 (m+1) 文字目の出力が行われようとしたとき、なおその計算が継続していると待合せが生ずる。このときは、既に入出力バッファ・レジスタが空きになっていて (m+1) 文字目の出力は行うことができない。

(i)(ii) を総合して、入出力ともに計算の始まったすぐ次の入出力 #1 より (m+1) 文字目の出力 #(m+1) まで計算が継続して行われると待合せが発生する。

2.2 入出力の待合せの確率および待合せ時間の数学的期待値

いま、#1 の入出力とその一つ前の入出力 #0 の時間間隔を T_1 、#1 の出力より #(m+1) の入出力までの時間を T_2 とする。また、#1 の入出力が生じた時点は第2図の如く計算の始めより x の時点とする。

#1 が、計算が始まってから最初の入出力である必要十分条件は次式で与えられる。

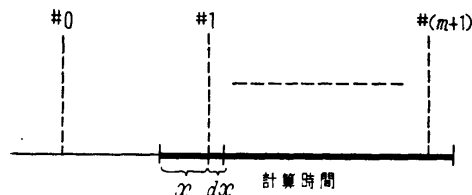
$$0 \leq x < T_1 \tag{1}$$

計算時間を t とすると、計算の残りの時間は $t-x$ である。 $t-x$ が T_2 より小であれば待合せは生じない。すなわち、待合せが生ずる必要十分条件は次式で与えられる。

$$t-x > T_2 \tag{2}$$

第2図の如く、任意に時点を選んだとき、 dx が計算の行われている時間内にあり、しかもその計算の長さが t である確率 p' は (附録参照)

$$\left. \begin{aligned} p' &= -\lambda dx dF(t) & (t > x) \\ &= 0 & (t \leq x) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$



第2図

ここで、 $F(t)$ は任意に選んだ計算の長さが t より大きい確率を表わす。 λ は対象としている入出力装置を除くすべての入出力装置に対する計算要求の合成流のパラメータである。時分割方式の計算要求の流れの如く定常かつ通常の流れにおいてはパラメータ λ は自己以外の入出力装置の単位時間内の計算要求の数の数学的期待値に等しい。(3)式により、求むる待合せの確率 p は (1)(2) 式を考慮して次式で与えられる。

$$p = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dG_2(T_2) \int_{-\infty}^{\infty} dG_1(T_1) \int_0^{T_1} dx \int_{T_1+x}^{\infty} dF(t) \tag{4}$$

ここで $G_2(T_2)$ 、 $G_1(T_1)$ はそれぞれに T_2 、 T_1 の分布法則を示す。(4)式は x と t の積分順序の交換を行い、かつ T_1 と T_2 が独立な確立事象であることに着目して $T_1+T_2=T_3$ とおき、その確率分布を $G_3(T_3)$ とすると次のように変形できる。

$$\begin{aligned} p &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dG_2(T_2) \int_{T_2}^{\infty} (t-T_2) dF(t) \\ &\quad - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dG_3(T_3) \int_{T_3}^{\infty} (t-T_3) dF(t) \end{aligned} \tag{5}$$

(5)式は待合せの確率を求める一般式を与える。

次に待合せ時間の数学的期待値を求めよう。 p を求めたとき、 $t-x > T_2$ の時に待合せを生ずることを述べたが、このときの待合せ時間は明らかに

$$t-x-T_2$$

で与えられる。したがって、待合せ時間の数学的期待値 t_w は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} t_w &= -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dG_2(T_2) \int_{-\infty}^{\infty} dG_1(T_1) \int_0^{T_1} dx \int_{T_2+x}^{\infty} \\ &\quad (t-x-T_2) dF(t) \end{aligned} \tag{6}$$

(6)式は(4)式を(5)式に変形したと同様にして次の如く変形される。

$$\begin{aligned} t_w &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dG_2(T_2) \int_{T_2}^{\infty} (t-T_2)^2 dF(t) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} dG_3(T_3) \int_{T_3}^{\infty} (t-T_3)^2 dF(t) \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

(7)式は待合せ時間の数学的期待値の一般式である。

2.3 直列式計算機における入出力の待合せ

2.2 で述べた入出力の待合せの一例を求めてみよう。(5)(7)式より $G_2(T_2)$ 、 $G_3(T_3)$ 、 $F(t)$ を求めれば、 p および t_w は求まる。

現在普通に使用されている計算システムとして、入力はテープ読取機と鍵盤よりの直接入力、出力はテープさん孔機あるいは印字機とし、計算機はランダム・アクセスの内部記憶をもつ直列式計算機を例としてと

り上げる。計算時間の確率的性質は論理設計により変わるが、ここでは筆者が典型的と考えるものにつき考察する。直列式計算機では、後述するごとく、正数の加算時間および減算時間がほぼ一定と考えることができ、乗除算時間の確率的性質が比較的容易に規定できる。

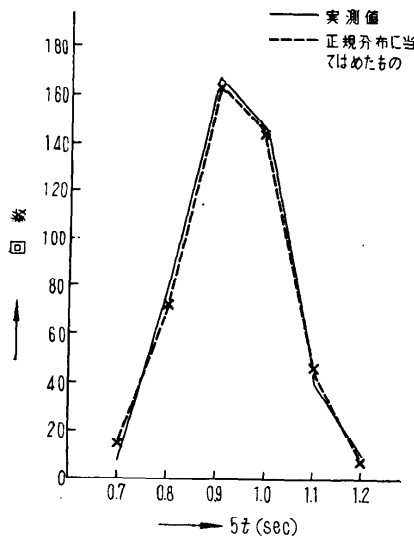
2.3.1 入出力間隔

テープ読取機、テープさん孔機および印字機ではその文字間の間隔は機械的に決まって、1台の入力装置あるいは出力装置に対しては一定と見なせる。

鍵盤入力においては、その間隔はオペレータにより決定される。もちろん、この間隔の下限は機械的な制限を受けるが、通常のオペレータの打鍵速度ではかかる機械的な制限までは達しない。オペレータの打鍵速度はオペレータの熟練度により相違するが、オペレータ1人について打鍵の間隔を考えると、そのばらつきは偶然的な変動によるものと考えられるので、打鍵間隔は正規分布に従うことが予想される。かつ、計算機への入力情報を考えると、相続く文字間には強い相関はないと考えられ、少なくとも第1近似として各打鍵間隔は確率的に独立の事象と考えてよいであろう。

筆者は、打鍵間隔が正規分布に従うことを確かめるため、証券会社の代表的なオペレータ3人につき各々150個の測定を行った。第3図は実測値と正規分布に従うときの値とを示したものである。

この結果に対し、 χ^2 検定を行って打鍵間隔を正規



第3図 打鍵間隔 (T) の分布

分布と見なして差支えないことがわかる³⁾。

第3図は3人のオペレータに対する測定結果を総合したものであるが、各オペレータごとの測定結果についても同様に正規分布への適合性が確かめられる³⁾。

測定結果から1文字分の時間間隔の平均値 \bar{T} 、分散 σ_T^2 を求めると、次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} &= 0.187 \text{ [sec]} \\ \sigma_T^2 &= 0.196 \times 10^{-2} \\ \sigma_T &= 0.0442 \text{ [sec]} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

かつ、確率分布は次の確率密度関数で規定される。

$$g(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma_T^2}} \quad (9)$$

時間々隔が一定なテープ読取機などでは、 \bar{T} を機械的に決まる値とし σ_T^2 が0に近づいた極限としてやはり(9)式で考えられる。オペレータの打鍵においては実際は下限は機械的な制約で決まるが、(8)式より下限を $-\infty$ と考えても大差ない。

2.3.2 計算時間

計算時間は、プログラム内の命令実行時間の和で求められる。したがって、ランダムアクセスの内部記憶をもつ直列式計算機の命令実行時間の確率的性質を考えよう。

(1) 命令の実行時間

命令の実行時間は、演算回路で演算が行われている時間とその他の時間に分れる。

後者は、命令の読出し、解説、数値の読出し、格納、プログラム進行のための動作などの時間を含み、少なくとも一つの命令については、ランダム・アクセスの内部記憶をもつ計算機では一定である。

前者は、加減算、シフト、判断などの命令では直列式計算においては一つの命令については一定であるとする。論理設計により、シフトの桁数により変化することがあるが、前述した命令のその他の時間と併せて考えたとき、その違いは無視できるものとする。

乗除算は、通常、分散の比較的大きいものとなる。

以下、正数の加算の演算時間を一定値 b 、正数の減算の演算時間を一定値 c とする。

(i) 乗算の実行時間

乗算に最も普通に用いられる繰返し加算による方法を考えよう。

繰返し加算による乗算では、被乗数を乗数の各桁の数字の回数だけ次々に加算する。乗数の各桁ごとに途中結果のシフトを行うことがあるが、このシフトは被乗数の加算に重複して行われ、特にそのための時間は

要しないものとする。(シフトの時間を要するとき
は、一定の時間を加えればよい)。

このときは、乗数の各桁の数字の和を x 、被乗数の
1個の加算に要する時間を前述の如く一定値 b とする
と、乗算の演算時間 t' は

$$t' = xb \quad (10)$$

したがって、 t' の確率分布を求むるには x の確率
分布を求めればよい。一般的に、計算機は p 進法で
乗数の桁数は m であるとする。したがって、各桁は
 $0, 1, 2, \dots, p-1$ の p 個の値のどれかをとる。

各桁はこれらの p 個の値を無作為にとるものとする。
 m 桁の数字の和が x となる組合せの数は母関数 $\chi(y)$
の y^x の係数として求められる。

$$\begin{aligned} \chi(y) &= (1+y+y^2+\dots+y^{p-1})^m \\ &= [(1-y)^{-1}(1-y^p)]^m \quad (11) \end{aligned}$$

組合せの全数は p^m であるから m 桁の数字の和が
 x となる確率 $P(x)$ は

$$P(x) = \frac{1}{p^m} \sum_{R=0}^{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor} (-1)^R \binom{m}{R} \binom{x-Rp-1}{m-1} \quad (12)$$

で与えられる。

ここで $\binom{x}{p} = \frac{x}{p}$ の整数部

$$\binom{m}{R} = mC_R \text{ である。}$$

一般に $P(x)$ は (12) 式で与えられる離散的な確率
分布となるが、後の計算の便宜上、それらの計算結果
の近似値を得るための連続的な確率分布に近似する。

(12) 式は x の平均値 \bar{x} を用い、母関数を鞍部点
の近傍で展開して複素積分することにより P の漸近
値が求められる⁴⁾。

$$\bar{x} = \frac{m(p-1)}{2} \quad (13)$$

$$P(x) \doteq \sqrt{\frac{6}{\pi m(p^2-1)}} \exp\left(-\frac{6(x-\bar{x})^2}{m(p^2-1)}\right) \quad (14)$$

(14) 式は σ_x^2 を次の如くおけば (16) 式で与えられ
る。

$$\sigma_x^2 = \frac{m(p^2-1)}{12} \quad (15)$$

$$P(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x-\bar{x}}{2\sigma_x^2}} \quad (16)$$

(10) 式より t' の確率密度関数 $f(t')$ は $t'\sigma$ を次
のように定義すれば (19) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} t' &= \bar{x}b \\ &= \frac{m(p-1)}{2}b \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_x^2 b^2 \\ &= \frac{mb^2(p^2-1)}{12} \quad (18) \end{aligned}$$

$$f(t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t'-\bar{t}')^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

したがって乗算命令の所要時間 t の確率分布は、命
令の読出し、解読などに要する一定時間を a とすれば
次の確率密度関数 $f(t)$ で近似的に表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \bar{t}' + a \\ &= a + \frac{m(p-1)}{2}b \quad (20) \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}} \quad (21)$$

この近似は2項分布を正規分布に近似するラプラス
の定理⁷⁾と類似のもので、通常、1語は10進8桁以上
で、 $m \geq 8$ 、 $p=10$ であり、今後の議論はこの近似を使
用して進める。実際は t が負になることはないが、 $-\infty$
までと考へても大差ない。

(ii) 除算の時間

除算は、乗算と同様、最も普通に用いられる Resto-
ring 法によるものを考察する。

Restoring 法による除算は、繰返し加算による乗算
において加算を減算に置き換えたものとはほぼ同じ過程
となる。ただし、除算の場合は商の1桁について実際
より1度だけ多過ぎるところまで減算を行い、剰余が
負となることを検知しても一度加算して補正を行うか
ら、 q なる商のディジットを得るのに $(q+1)$ 回の減
算と1回の加算を行わなければならない。したがって、
商の各桁が p 個の値を無作為にとるものとする、(i)
と同様にして除算の実行時間が求められる。すなわち、
やはり、確率分布は正規分布で近似でき、その平均値
 \bar{t} 、分散 σ^2 は次のように与えられる。

$$\bar{t} = \frac{m}{2}c + b + a \quad (22)$$

$$\sigma^2 = \frac{mc^2(p^2-1)}{12} \quad (23)$$

以上で四則演算、シフト、判断の命令は、一定である
か、正規分布で近似できることを示した。実際の計算機
には、この他に多くの命令もっているであろうが、そ
れらはこれらの命令の複合の命令と見なせるものが多い。
かつ実際のプログラムの入出力以外にあらわれる
命令は、その多くはこれらの命令あるいはこの複合し
た形式の命令である。したがって、計算時間を考える
ときは、以上の命令を考察すれば満足できるであろう。
すなわち、命令の所要時間は、ランダム・アクセス

の内部記憶をもつ直列式計算機では、一定であるか正規分布に従うものと考えてよく、一定なものを分散 0 の正規分布とみれば、一般に次の如くいえる。

命令の所要時間は正規分布で表わされる。

(2) ステップ数が一定のときの計算時間

m 個の命令が実行されるものとする、計算時間はこれら m 個の命令の実行時間の和で与えられ、かつ命令の実行時間は互いに独立と考えられる。

したがって、ランダム・アクセスの内部記憶をもつ直列式計算機では、計算時間は、やはり正規分布に従い、その平均値 \bar{i} と分散 σ^2 は各命令の実行時間の平均値 $\bar{i}_i (i=1, 2, \dots, m)$ と分散 $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, m)$ の和に等しい。すなわち、

$$\bar{i} = \sum_{i=1}^m \bar{i}_i \quad (24)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \quad (25)$$

(3) ステップ数が変化する場合の計算時間

計算プログラムの中に r 個の iteration の部分がありそれぞれの iteration の回数の平均値を $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, r)$ 分散を $\sigma_{x_i}^2 (i=1, 2, \dots, r)$ とする。計算プログラムによっては判断命令でいくつかの異なったサブプログラムのどれかを行うことがあるが、このときも \bar{x}_i が 1 より小さいものと考えて現在の議論に含めて考えられる。

さて、各 iteration の 1 回の計算時間は平均値 \bar{i}_i 、分散 $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, r)$ の正規分布に従い、計算プログラムの残りの部分は平均値 \bar{i}_0 分散 σ_0^2 の正規分布に従うものとする。

かかる計算プログラムの計算時間の平均値と分散を求めてみよう。

各 iteration の部分についてその所要時間は iteration の回数とその 1 回に要する時間との複合分布で与えられる。iteration の回数とその 1 回に要する時間は確率的に独立の事象と考えられることに着目して、積率母関数を用いて複合分布の平均値と分布は求められる。

i 番目の iteration についてその所要時間の平均値 \bar{i}_i' と分散 $\sigma_i'^2$ は次式で与えられる。

$$\bar{i}_i' = \bar{x}_i \bar{i}_i \quad (26)$$

$$\sigma_i'^2 = \bar{x}_i \sigma_i^2 + \bar{i}_i^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (27)$$

iteration のループの中にさらに iteration のループのあるときも上式の繰返しで容易に求められる。

したがって全計算時間の平均値 \bar{i} と分散 σ_i^2 は次式で与えられる。

$$\bar{i} = \bar{i}_0 + \sum_{i=1}^r \bar{x}_i \bar{i}_i \quad (28)$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^r \bar{x}_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^r \bar{i}_i^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (29)$$

(28), (29) の両式はステップ数の変化する計算時間の平均値および分散を与え、したがって任意のプログラムの計算時間の平均値と分散がこれより求められる。

2.3.3 待合せの確率および待合せ時間の数学的期待値

2.3.1 および 2.3.2 の議論からランダム・アクセスの内部記憶をもつ直列式計算機の入出力の待合せについては、(5) 式および (7) 式において $G_2(T_2)$, $G_3(T_3)$, $F(t)$ 共に正規分布の確率密度関数を有するものとして求められる。この場合、(5) 式および (7) 式は次の W および W' を T と t がそれぞれ平均値 \bar{T} 、分散 σ_T^2 および平均値 \bar{t} 、分散 σ_t^2 をもつ正規分布に従うものとして求めれば所要の結果が得られる。

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_T^{\infty} (t-T) dG(T) dF(t)$$

$$W' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_T^{\infty} (t-T)^2 dG(T) dF(t)$$

W, W' は次のように t, T を x, y に変数変換すると求められる。

$$t - \bar{t} - T + \bar{T} = x$$

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_t} t + \frac{\sigma_t}{\sigma_T} T = y$$

結果だけを記すと

$$W = \sqrt{\frac{\sigma_T^2 + \sigma_t^2}{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{T})^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_t^2)}} + \frac{(t-\bar{T})}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{t-\bar{T}}{\sqrt{2(\sigma_T^2 + \sigma_t^2)}} \right) \right\} \quad (30)$$

$$W' = \frac{1}{2} \left\{ (\bar{t} - \bar{T})^2 + \sigma_T^2 + \sigma_t^2 \right\} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{\bar{t} - \bar{T}}{\sqrt{2(\sigma_T^2 + \sigma_t^2)}} \right) \right\} + (\bar{t} - \bar{T}) \sqrt{\frac{\sigma_T^2 + \sigma_t^2}{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{t} - \bar{T})^2}{2(\sigma_T^2 + \sigma_t^2)}} \quad (31)$$

ここで $\Phi(r)$ は確率積分で、ここでは文献 (8) に従って次式で定義する。

$$\Phi(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-t^2} dt$$

$\Phi(r)$ は r が正に大になると急激に 1 に近づき、 r が負で絶対値が大になると急激に -1 に近づく関数である。

(5) 式および (7) 式において、 T_2 は m 個の入出力間隔の和で、各々の間隔は独立の正規分布に従うものと考えているから、一つの間隔を平均値 \bar{T} 、分散 σ_T^2 の正規分布とすると、 T_2 は平均値 $m\bar{T}$ 、分散

$m\sigma_T^2$ の正規分布に従う。同様に T_3 は平均値 $(m+1)\bar{T}$ 、分散 $(m+1)\sigma_T^2$ の正規分布に従う。

このことを考慮して (5) 式と (7) 式より次の結果が得られる。

$$p = \lambda \left\{ \frac{\bar{i} - m\bar{T}}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\bar{i} - m\bar{T}}{\sqrt{2(\sigma_i^2 + m\sigma_T^2)}} \right) \right] + \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + m\sigma_T^2}{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{i} - m\bar{T})^2}{2(\sigma_i^2 + m\sigma_T^2)}} - \frac{\bar{i} - (m+1)\bar{T}}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\bar{i} - (m+1)\bar{T}}{\sqrt{2\{\sigma_i^2 + (m+1)\sigma_T^2\}}} \right) \right] - \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + (m+1)\sigma_T^2}{2\pi}} e^{-\frac{[\bar{i} - (m+1)\bar{T}]^2}{2\{\sigma_i^2 + (m+1)\sigma_T^2\}}} \right\} \quad (32)$$

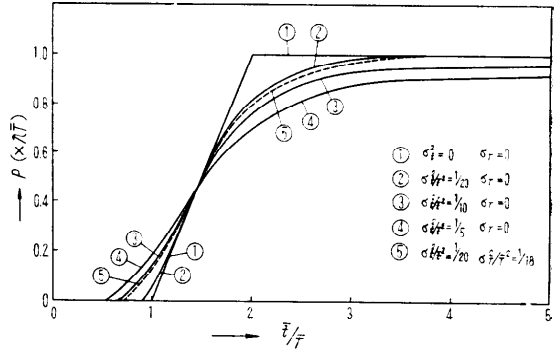
$$t_w = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2} \{ (\bar{i} - m\bar{T})^2 + m\sigma_T^2 + \sigma_i^2 \} \left[1 + \Phi \left(\frac{\bar{i} - m\bar{T}}{\sqrt{2(m\sigma_T^2 + \sigma_i^2)}} \right) \right] + (\bar{i} - m\bar{T}) \sqrt{\frac{m\sigma_T^2 + \sigma_i^2}{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{i} - m\bar{T})^2}{2(m\sigma_T^2 + \sigma_i^2)}} - \frac{1}{2} \{ [\bar{i} - (m+1)\bar{T}]^2 + (m+1)\sigma_T^2 + \sigma_i^2 \} \left[1 + \Phi \left(\frac{\bar{i} - (m+1)\bar{T}}{\sqrt{2\{(m+1)\sigma_T^2 + \sigma_i^2\}}} \right) \right] - [\bar{i} - (m+1)\bar{T}] \sqrt{\frac{(m+1)\sigma_T^2 + \sigma_i^2}{2\pi}} e^{-\frac{[\bar{i} - (m+1)\bar{T}]^2}{2\{(m+1)\sigma_T^2 + \sigma_i^2\}}} \right\} \quad (33)$$

(33) 式より σ_T^2 , σ_i^2 が小さくなるに従って, t_w は小さくなるのがわかる。 $\sigma_T^2 = \sigma_i^2 = 0$ とおくと同式より

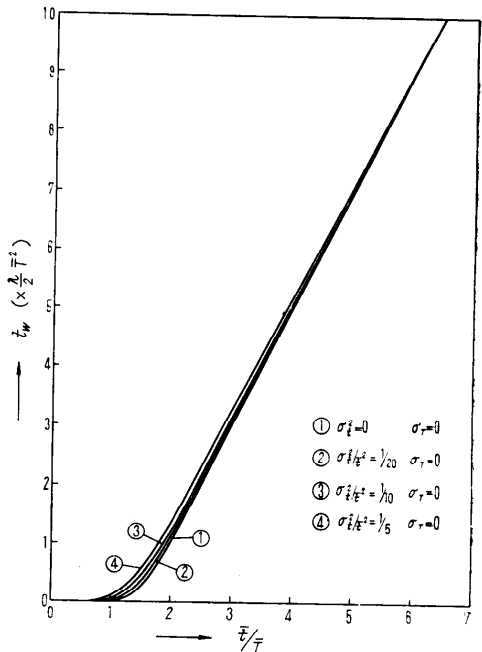
$$\begin{aligned} \bar{i} > (m+1)\bar{T} \text{ のときは} \\ t_w &= \frac{\lambda\bar{T}}{2} [2\bar{i} - (2m+1)\bar{T}] \\ m\bar{T} < \bar{i} < (m+1)\bar{T} \text{ のときは} \\ t_w &= \frac{\lambda}{2} (\bar{i} - m\bar{T})^2 \\ \bar{i} < m\bar{T} \text{ のときは} \\ t_w &= 0 \end{aligned}$$

となる。即ち, \bar{i} が $m\bar{T}$ より小さいときは 0 で, $m\bar{T}$ と $(m+1)\bar{T}$ の間は拋物線, $(m+1)\bar{T}$ より大きいときは直線的に t_w は大きくなる。

第4図および第5, 6図はそれぞれに p および t_w を
 ① $\sigma_T^2 = \sigma_i^2 = 0$, ② $\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 = \frac{1}{20}$, $\sigma_T^2 = 0$, ③ $\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 = \frac{1}{10}$, $\sigma_T^2 = 0$, ④ $\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 = \frac{1}{5}$, $\sigma_T^2 = 0$ および ⑤ $\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 = \frac{1}{20}$, $\left(\frac{\sigma_T}{\bar{T}}\right)^2 = \frac{1}{18}$ の各々について $m=1$ の場合に計算したもので第5図では⑤は他の曲線と重なるので省略した。



第4図 入出力の待合せの確率



第5図 入出力の平均待合せ時間 (1)

(8) 式より, 打鍵入力では

$$\left(\frac{\sigma_T}{\bar{T}}\right)^2 = \left(\frac{0.0442}{0.187}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

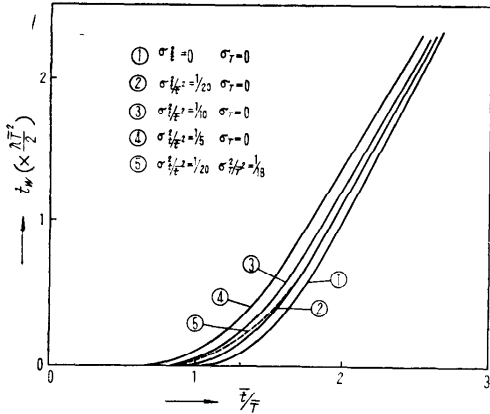
機械的な入出力では $\sigma_T^2 = 0$ と考えてよい。

また 2・3・2 の議論より $\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2$ が最も大きくなるのは乗算のみでなるときで, (18), (20) の両式より

$$\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 \leq \frac{(p+1)}{3m(p-1)}$$

ここで 10 進法 8 桁の数値について考えると $p=10$, $m=8$ であるから

$$\left(\frac{\sigma_i}{\bar{i}}\right)^2 \leq \frac{1}{20}$$



第6図 入出力の平均待合せ時間(2)

前に述べた如く t_w は σ_i^2, σ_T^2 が大になると大きくなるから、⑤の曲線について考えておけば10進法8桁以上の数値については余裕のあるものとなる。

ただし、これらの曲線から、この程度の σ_i^2, σ_T^2 では $\sigma_i^2 = \sigma_T^2 = 0$ と考えた①の曲線で考えてもあまり差がないことがわかる。

同図から、入出力の待合せは i/T を適当に選べば充分小さくできることがわかる。時分割方式では入出力装置により T が決まるから、 i を適当になるように計算を分割して実施し、その切れ目で入出力動作を行わせることにより、入出力の待合せは充分小さくすることができる。

3. 計算の待合せ

計算の待合せを考えるには計算を行う姿態を規定する必要がある。

3.1 全計算が順次に時分割方式で行われる場合

ある時点で計算機が一つの計算で占有されているとき、待合せしている計算は現在実行されている全計算(分割した個々の計算ではなく分割された計算の全部)が行われたのち、引続いて計算要求を發した順序で行われるものとして考える。

入出力の待合せでは、入出力バッファ・レジスタと内部記憶の間の情報移送に要する時間は、非常に小さいもので無視できるものとしたので、そのときいくつかの入出力の要求が待合せしているかは考慮に入れなくて良かったが、計算の待合せではいくつかの計算要求が待合せしているかが関連してくるので複雑になる。

各入出力装置の計算要求の流れを、成分の流れと呼ぶ、時分割方式では計算機への計算要求の流れは各成

分の流れの合成流であり、各成分の流れのパラメータは小さい。また各成分の流れは定常で、かつ通常とみなしうる。

このような成分の流れが非常に多数合成されたとき、すなわち入出力装置の数が非常に多いときには、合成された流れは最単純流に漸近することは、合成流に関する極限定理⁹⁾によって示される。したがって、かかる場合は合成された流れは Poisson 分布に従う。すなわち、 k 個の計算要求が長さ t の時間間隔の間に到着する確率 $P_k(t)$ は、

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (34)$$

ここで各成分の流れのパラメータを $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ とすると、 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (35)$$

かかる最単純流については、計算の待合せは厳密に求められるが、通常の時分割方式では成分の流れの数は10以下の程度のもので、合成流は最単純流と見なすのは難がある。したがって、このような場合には簡単のため実際の条件の下での最大値を求めてみよう。

(1) 成分の流れの数が少ないとき

最悪のケースは、対象とする成分の流れの計算要求が発生した場合、計算機が塞がっているときは常に他の成分の流れがすべて計算要求を發しており、しかも対象の計算要求の発生時点が計算機を占有している計算が、ちょうど始ったばかりの時点にあたる時である。

かかる条件の下で対象とした成分の流を n 番目の流れとし、他の $(n-1)$ 個の全計算時間の平均値を $\bar{s}_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ とすると、 n 番目の成分の流れの計算要求が発生したとき計算機が塞がっている確率 α_n は

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \bar{s}_i \quad (36)$$

前述の最悪のケースでの平均待合せ時間は、 $\sum_{i=1}^{n-1} \bar{s}_i$ であるから、 n 番目の成分の流れの待合せ時間の数学的期待値の最大値 $\bar{r}_{n \max}$ は、

$$\bar{r}_{n \max} = \alpha_n \sum_{i=1}^{n-1} \bar{s}_i \quad (37)$$

(2) 成分の流れの数が大きいとき

成分の流れの数が非常に大きくなると合成した流れは前述したとおり最単純流に近づく。

前にも述べたとおり、通常の時分割方式では成分の流れの数が小さく、このように見なすことは難しいが、

簡単に触れておく。

このことは、すべての成分の流れの全計算時間の平均値 \bar{s} と分散 σ^2 を知ることに、待合せ時間の数学的期待値 \bar{r} は $\alpha = \lambda \bar{s}$ とおくと次のように求められる^{3), 5)}。

$$\bar{r} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \frac{\bar{s}^2 + \sigma^2}{s} \quad (38)$$

\bar{s} , σ^2 は 2・3・2 の (3) で述べたようにして求められる。

3・2 分割された計算が順次に時分割演算される場合

ここでは成分の流れの数が小さいときについてのみ考えることとする。

ある成分の流れの計算時間が特に長くなることがある。たとえば、1台の入出力装置が多量の資料を入れてこれを複雑に処理しており、一方他の入出力装置で簡単な伝票計算を行う場合がある。

このような場合、全計算を順次時分割式に処理すると、全計算の所要時間が小さい入出力装置の待合せ時間は不釣合に大きいものとなる。

かかる場合は、分割された計算を順次時分割式に処理すればよい。この方式の計算の平均待合せ時間の最大値を求めてみよう。

最悪の条件は、ある成分の流れ（ここでは n 番目の成分の流れとする）の計算要求が発生したとき、計算機が塞がっているときは常に他の $(n-1)$ 個の成分の流れの計算が待合せしているときである。

いま、 n 番目の成分の流れの計算は平均 \bar{q}_n 個に分割され、各々の分割された計算の計算時間の平均値を \bar{s}' とする。

分割して計算を行うときは \bar{s}' はすべての成分の流れについて同一と考えてよい。

分割したときは、各々の分割された計算が行われようとするとき、計算機が塞がっている確率は 3・2 の (1) と同じく、 $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \bar{s}_i$ であり、最悪の条件では各々 $(n-1)\bar{s}'$ の時間を待合せしなければならないから、 n 番目の成分の流れの計算が全計算を完了するまでの待合せ時間の平均値の最大値 $\bar{r}_{n \max}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{r}_{n \max} &= \alpha_n \bar{q}_n (n-1) \bar{s}' \\ &= \alpha_n (n-1) s_n \end{aligned} \quad (39)$$

4. 時分割方式による改善率

4・1 時分割方式による改善率の定義

時分割方式の有効さを示す測度は、同じ計算機が時分割方式によるときとよらないときの情報の処理能力の比で表わすことが適当であろう。情報の処理能力の比は、あるプログラムを実行するとき、単位時間内に処理される情報の量の数学的期待値の比で表わすことができる。

この情報処理能力の比を時分割方式による改善率と呼ぶこととする。

4・2 一つのプログラムに関する改善率

時分割方式によらないとき、 i 番目の成分の流れは平均として単位時間内に λ_{i0} 個の計算およびそのための入出力が行われるものとする。すなわち λ_{i0} はこの成分の流れのパラメータである。

時分割方式によるときは、この i 番目の成分の流れは平均として単位時間内に λ_i 個の計算およびそのための入出力が行われるものとする。すなわち λ_i はこのときの i 番目の成分の流れのパラメータである。このとき

$$\lambda_i \leq \lambda_{i0}$$

である。なぜならば λ_i は入出力の待合せおよび計算の待合せを含むからである。

入出力の待合せは 2・3・3 で述べたことから、一区切りの計算時間を適当にとることにより充分小さくすることができるから、ここでは無視できるものとする。

このときは、計算の待合せ時間の平均値を \bar{r}_i とすると、容易に次式が得られる。

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{i0}}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i} \quad (40)$$

ただし、ここでは時分割方式によるときとよらないときの計算プログラムは同一とする。もし、時分割方式によるときは、よらないときより多くのステップを必要とするときは、その過剰時間を計算の待合せ時間に含めればよい。

時分割方式では、計算機から見た合成流のパラメータ λ は

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{i0}}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i} \end{aligned}$$

各成分の流れが同一のプログラム j を実行するとき λ_{i0} , \bar{r}_i はすべての i について等しいと考えてよく、これを λ_{j0} , \bar{r}_j と書くと

$$\lambda = \frac{n \lambda_{j0}}{1 + \lambda_{j0} \bar{r}_j}$$

このプログラムについての改善率は、明らかに λ と

λ_{j0} の比で与えられる。改善率を η_j とおくと

$$\eta_j = \frac{n}{1 + \lambda_{j0} \bar{r}_j} \quad (41)$$

η_j “をプログラム j に関する時分割方式による改善率”と呼ぶこととする。

η_j は \bar{r}_j を知るにより求められる。一例として成分の流れの数が小さいときの \bar{r}_j の最大値は (37) 式と (39) 式より全計算あるいは分割された計算が順次時分割方式に行われる両方のケースで同じく

$$\bar{r}_{j \max} = \alpha_j (n-1) \bar{s}_j$$

で与えられる。ここで α_j, \bar{s}_j はそれぞれプログラム j を行うとき、ある一つの成分の流れより見た計算機が塞がっている確率と全計算時間の平均値を示す。

$$\alpha_j = (n-1) \lambda_j \bar{s}_j \quad (42)$$

この $\bar{r}_{j \max}$ に対する η_j を $\eta_{j \min}$ と書くと、明らかに

$$\eta_{j \min} \leq \eta_j \leq n \quad (43)$$

$$\eta_{j \min} = \frac{n}{1 + \alpha_j (n-1) \lambda_{j0} \bar{s}_j} \quad (44)$$

(4) 式と (4) 式とから

$$\lambda_j = \frac{\eta_j}{n} \lambda_{j0}$$

ここで $\eta_{j \min} = \eta_j (1-\delta)$, $\lambda_{j0} \bar{s}_j = \alpha_{j0}$ とおいて (42) (44) 式から η_j を求めると

$$\eta_j = \frac{2n}{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)^2 \alpha_{j0}^2 (1-\delta)}}$$

したがって、この式で $\delta=0$ とおいて得られる η_j はやはり実際の η_j より小さいものとなるから、これを

あらためて $\eta_{j \min}$ と書くとして

$$\eta_{j \min} = \frac{2n}{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)^2 \alpha_{j0}^2}} \quad (45)$$

この $\eta_{j \min}$ についても (43) 式は成立する。 α_{j0} はプログラム j については決まるから (45) 式から $\eta_{j \min}$ と n との関係が求められる。第 7 図は α_{j0} をパラメータとして、 $\eta_{j \min}$ と n との関係を図示したものである。

(45) 式で $(n-1)^2 \alpha_{j0}^2$ が小さいときは、次のように表わせる。

$$\eta_{j \min} \approx n [1 - (n-1)^2 \alpha_{j0}^2] \quad (46)$$

したがって、 η_j の最大値、すなわち n よりの低下度は次の如くなる。

$$\frac{n - \eta_{j \min}}{n} \approx (n-1)^2 \alpha_{j0}^2 \quad (47)$$

改善率の低下が小さい範囲では、計算機の典型的なプログラムから α_{j0} が決まると、(47) 式から改善率の低下度を定めると n の許容値が決まる。

4.3 一般の時分割方式における改善率

n 個の成分の流れが同一のプログラムを行うときは、計算機の情報処理量は流れのパラメータに比例するが、異なるプログラムを実行するときはそれぞれの情報の重みは異なるであろう。

i 番目の成分の流れはプログラム i を実施し、プログラム i は 1 回の計算の情報の重みが w_i であるとする。この i 番目の成分の流れの単位時間内の情報処理量は

$$w_i \lambda_i = \frac{w_i \lambda_{i0}}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i}$$

に比例する。

したがって、 n 個の合成された流れでは情報処理量は、

$$\sum_{i=1}^n w_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \lambda_{i0}}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i}$$

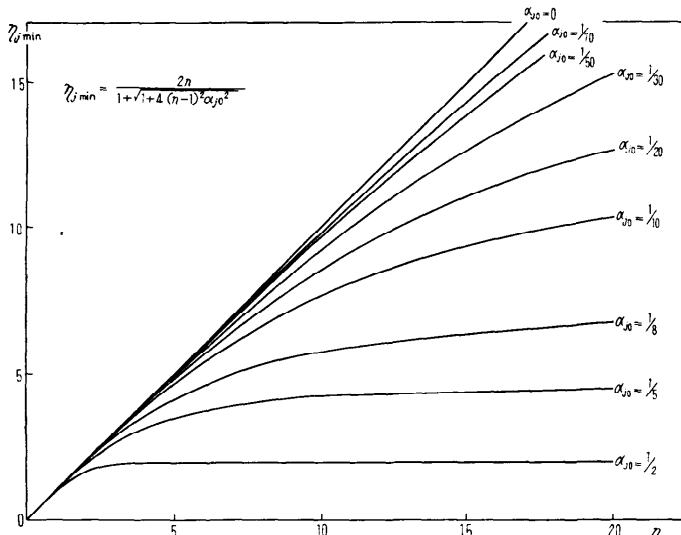
に比例する。

時分割方式によらないでプログラム i ($i=1, 2, \dots, n$) を各々単位時間ずつ実施すると、 n 単位時間を要し、この情報処理量は

$$\sum_{i=1}^n w_i \lambda_{i0}$$

に比例する。

したがって、一般の時分割方式における改善率 η は



第 7 図 同一のプログラムを実行するときの改善率

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^n w_i \lambda_{i0}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i \lambda_{i0}}{\sum_{i=1}^n w_i \lambda_{i0}} \right) \left(\frac{n}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \eta_i \end{aligned} \quad (48)$$

ここで

$$p_i = \frac{w_i \lambda_{i0}}{\sum_{i=1}^n w_i \lambda_{i0}} \quad (49)$$

$$\eta_i = \frac{n}{1 + \lambda_{i0} \bar{r}_i} \quad (50)$$

p_i は単位時間内の i 番目の成分の流れの情報量の重みの比率 (比重と呼ぶこととする) である。 η_i は (41) 式と表現が一致し、便宜上このケースにおける i 番目のプログラムの改善率と呼ぶ。

(48) 式は、 η が各成分の流れのプログラムの改善率に単位時間内の情報量の比重をかけた和で与えられることを示している。

w_i は i 番目のプログラムの情報量の測定と考えられ広義の情報量とみなすことができる。

時分割方式の計算機で、特に重要なプログラムには優先権を与えることがあるが、これは w_i の大きいプログラムに対する \bar{r}_i を小さくかつ p_i を大きくして η を大きくする手段であると考えられる。

この場合のように、異なるプログラムを実行するときは 3.2 で述べたように分割された計算を時分割演算するのが有利であると考えられるが、このときの η を考えてみよう。ただしここでは優先権はないものとする。

各成分の w_i , λ_{i0} はプログラムで決まるから p_i は求まる。したがって、 η を求めるには η_i が求まればよい。

(41) 式の n を i に置換して得られる $\bar{r}_{i \max}$ を (50) 式に入れて得られる η_i を $\eta_{i \min}$ と置く。この $\eta_{i \min}$ を (48) 式に入れて求まる η_{\min} は η の下限を与える。

η_{\min} は次のようになる。

$$\eta_{i \min} = \frac{n}{1 + (n-1) \alpha_i \alpha_{i0}} \quad (51)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{s}_j \\ \alpha_{i0} &= \lambda_{i0} \bar{s}_i \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

ただし $\sum_{j=1}^n$ は $j=1$ から n までの内 $j=i$ だけを除いて加え合わせることを意味するものとする。

簡単のため、 α_i において λ_j を λ_{j0} で置換して、これを α_i' とおくと、

$$\alpha_i' \geq \alpha_i$$

したがって、 α_i' を α_i の代りに (51) 式に入れた η_i を η_i' と書けば、 $\eta_{i \min}$ はやはり η_i の下限と考えてよく、これから得られる η'_{\min} は η の下限である。

実際には α_i' は 1 を越えることはないから、これを考慮し、 $\eta'_{i \min}$, η'_{\min} は次のようになる。

$$\eta'_{i \min} = \frac{n}{1 + (n-1) [\alpha_i'] \alpha_{i0}} \quad (53)$$

$$\eta'_{\min} = \sum_{i=1}^n p_i \eta'_{i \min} \quad (54)$$

ここで $[\alpha_i'] = \sum_{j=1}^n \lambda_{j0} \bar{s}_j$ ($\sum_{j=1}^n \lambda_{j0} \bar{s}_j \leq 1$ のとき)

$$= 1 \quad (\quad > 1 \text{ のとき})$$

λ_{j0} , \bar{s}_j は各成分の流れのプログラムで決まるから $\eta'_{i \min}$, η'_{\min} は求められる。

5. 結 言

本論本の要旨は次の如くである。

(1) 時分割方式では待合せが重要な問題であり、待合せは入出力の待合せと計算の待合せに分れる。

(2) 入出力の間隔および計算時間の確率分布より入出力の待合せの確率および待合せ時間の数学的期待値を求める一般式が得られる。

(3) 一般的に入出力の間隔は正規分布と見なして差支えないことを示した。

(4) 一例としてランダムアクセスの内部記憶をもつ直列式計算機(事務用計算機にはかかるものが多い)については通常、計算時間も正規分布と見なすことができる。かつプログラムの実行時間の平均値および分散を各命令実行時間の平均値、分散より求めることができる。

(5) (4) に与えた形式の計算機について、入出力の待合せの確率および待合せ時間の数学的期待値を求めた。このことから、計算を分割実施することにより入出力の待合せは充分小さくできることがわかる。なお附言すれば、計算を過度に細かく分割して実施するときは、入出力の掃引などに要する時間が一区切りの計算時間に比較して無視できなくなり、時分割方式によるときのプログラム実行時間は時分割方式によらないときのそれよりこのために大きいと考えなければ

ならず、改善率を求めるときにはこれを考慮しなければならぬ。このことは改善率の低下を伴うので、過度に細かく分割することは不利である。

(6) 計算の待合せについて、一般的にはその上限を求めた。入出力装置の数が非常に大きくなると、合成した流れは、最単純流は漸近し、このときは厳密に求められる。

(7) 時分割方式による情報処理能力の改善率を定義し、関係式を求めた。改善率は計算の待合せ時間により決まり、一般的にはその下限が求められる。このことから、代表的な計算プログラムを決めると、入出力装置の数による改善率の一応の評価ができ、逆に改善率の低下度を与えたときは許容できる入出力装置の数の下限が求められる。

なお本論文では計算の待合せ、したがってこれに伴う改善率は大雑把な上限あるいは下限を求めたが、これらについてはさらに検討しあらためて発表したい。

本論文では入出力装置を対象としたが、かかる考察は外部記憶装置についても同様に行うことができる。

終りに常日頃御指導鞭撻をいただいている東大尾佐竹教授、猪瀬助教授および当社出川電子機器事業部長に厚くお礼申上げる。また NEAC-2202, 2204 の設計を通じ、多大の御助力をいただいた当社電子機器計算機技術部の芥藤、山田、坂口の各氏に深謝する次第である。

参考文献

- 1) 石井: トランジスタ計算機 NEAC-2202, 信学誌 (昭 34-11)
- 2) 金田, 石井, 芥藤, 山田: NEAC-2204 電子計算システムについて, 電子計算機専門委資料 (1961-3)
- 3) 石井: 時分割演算による計算機の研究, 日電電機技資料 114 (1961-2)
- 4) 伏見: 確率論及統計論, 河出書房応用数学第 8 巻 (昭 18)
- 5) А.Я. ХИНЧИН: Математические Методы Теории Массового обслуживания, (ステク

ロフ数学研究所報告 49, 1955)

(邦訳, 森村: 待合せ理論入門, 広川書店 1960)

6) 河田: 確率過程論の応用, 岩波現代応用数学 (1957)

7) 国沢: 近代確率論, 岩波全書 (1952)

8) 林: 高等函数表, 岩波書店 (昭 22)

附 録

$0 < a < b$ とおけば、任意に選ばれた時点において計算機が塞がっており、その時の計算の長さが a と b との間に含まれる確率は次のようになる⁵⁾。

$$-\lambda \int_a^b u dF(u)$$

(文献 (5) には、最単純流についてこのことが証明してあるが、本論文の場合には λ に自己の成分の流れのパラメータを含まないものと同様にして証明できる)

したがって、かかる計算の長さの分布関数 $G(t)$ は

$$G(t) = -\lambda \int_t^{\infty} u dF(u)$$

ただし、ここでは文献 (5) に従って分布関数として上述の表現を採るものとする。

故にかかる計算の長さが t である確率 p_1 は

$$p_1 = -\frac{dG(t)}{dt} = -\lambda t dF(t)$$

任意に時点を選んだとき、そこで長さ t の計算が進行中とするとその時点が $(x, x+dx)$ にある確率 p_2 は、その計算の任意の時点について等しいと考えられるから

$$p_2 = \begin{cases} \frac{dx}{t} & (x < t) \\ 0 & (x \geq t) \end{cases}$$

したがって、 dx が計算の上であり、しかもその計算の長さが t である確率 p' は

$$p' = p_1 p_2 = \begin{cases} -\lambda dx \cdot dF(t) & (x < t) \\ 0 & (x \geq t) \end{cases}$$

(昭和 36 年 12 月 19 日受付, 37 年 2 月 5 日再受付)