

## 手術シミュレータ/ナビゲーションへの応用をめざした 軟組織計算モデルの確立

緒 方 正 人<sup>†</sup> 長 坂 学<sup>†</sup> 山 田 貴 博<sup>††</sup>

手術シミュレータやナビゲーションなどの医療応用において軟組織の変形を忠実に再現する必要がある。この応用では、従来のゲーム応用と異なり軟組織の変形と応力の高精度再現が要求される。筆者らは微圧縮超弾性体に対して圧力安定化を導入する事により、従来 LBBK 条件を満たせず計算の信頼性が低かった 4 面体要素 (4 節点, 圧力 1 点) での実現を可能にした。連立方程式の求解に帰着する有限要素法の実時間化においては次元数削減が必須である。

### Soft Tissue Modeling for Surgical Simulator and Navigation System

MASATO OGATA<sup>†</sup>, MANABU NAGASAKA<sup>†</sup>  
and TAKAHIRO YAMADA<sup>††</sup>

In medical applications especially for surgical simulator and navigation, there is a growing need to represent the deformation of soft tissues and their pressure faithfully. Unlike traditional game applications, these applications request precise representation of the tissue deformation and the pressure. By introducing a pressure stabilization into a hyperelastic model, we have improved computational reliability for tetrahedral elements of P1-P0 scheme (4 nodal points for displacements and 1 point for the pressure). Usually, the calculation using tetrahedral elements with P1-P0 scheme cannot have reliability in calculation, because it does not satisfy the LBBK criteria. For realtime calculation using finite element method which reduces to solving simultaneous equation, it is important to reduce the dimension of unknowns.

#### 1. はじめに

近年、内視鏡下手術やロボット手術に代表されるように手術の高度化・複雑化が著しい。このため手術の安全性を高めるために専門医の手技訓練装置や、手術ナビゲーションなど精緻な手術支援機器の開発が期待されている。これには、中核技術として生体軟組織の「視覚表現」や「形状変形」を融合してより現実に近く呈示することが必要であり、コンピュータグラフィックス技術が活躍できる分野である。これら二つの技術は、境界領域を研究対象とする CG の中でも主要課題として、車の両輪のように発展してきた。

視覚情報の表現においては、ここ 20 年の成果として光反射や散乱等を巨視的に物理的に正しく模擬し、半導体技術の急激な進歩による計算能力の向上もあり、現実と区別がつかない画像が実時間で容易に表現できる程までに進歩した。他方、形状変形に関しては、

OpenGL に代表されるように剛体を複合した物体に限定して、その構成要素の相似変換と平行移動の組合せを扱うことで発展した。しかし、相似変形以外の形状変形に関しては、物理的に正しく変形をモデル化しようとするとその複雑さから未だ満足できる状態には到達していない。両者は相補な形で発展すべきである。

このような状況の下、我々は手術の安全を高めることを目的として専門医の手技訓練が可能な手術シミュレータを段階的に開発している<sup>12)</sup>。このためには物理的に正しい生体の挙動の模擬が必要になる。例えば、専門医の手技向上や術前訓練に必要な血管操作や結合組織の剥離での部位による微妙な感覚の差異、あるいは手術ナビゲーションで必要となる体位の変化による臓器の変形と位置のシフトなどである。

本報告はこの変形モデルに関するものであり、2 章に変形モデルの概観を行い、3 章に注目する微圧縮超弾性体の弱形式を示す。次に、有限要素を 4 面体 4/1(P1/P0) とした場合の圧力振動とこれを解決する圧力安定化処理を 4 章に示す。また、その実装の同定を 5 章に示す。各モデルの評価と比較を 6 章に示し、7 章にまとめを述べる。

<sup>†</sup> 横浜市立大学大学院医学研究科/三菱プレジジョン (株)  
Mitsubishi Precision Co. Ltd.

<sup>††</sup> 横浜国立大学大学院 環境情報研究院  
Yokohama National University.

表 1 医療応用の観点からの変形モデル

変形計算モデル	扱う変形量	長所	短所
バネモデル	小～中	・計算が単純で早い	・数値計算が不安定性 ・モデルデータが物性値と対応困難 →CT 等からモデルの構築が困難
線形 FEM	小	・計算が比較的早い ・数値計算が安定 ・データが物性値と直接対応	・大変形時体積が著しく増加 ・歪・応力間の非線形性が扱えない
線形 (回転補正)	小～大	・計算量比較的早い ・データが物性値と対応可能	・歪・応力間の非線形性が扱えない ・内部圧力の精度が低い
幾何的非線形	小～大	・数値的安定性 ・データが物性値と直接対応	・歪・応力間の非線形性が扱えない ・内部圧力の精度が低い
超弾性 (Mooney)	小～大	・歪・応力間の非線形性を扱える ・データが物性値と直接対応 ・内部圧力を計算可能	・計算量が大 ・数値計算が不安定

## 2. 生体の変形モデル

生体の変形を模擬するモデルとしてバネモデル、線形 FEM, Co-Rotated FEM などが医療応用として実際に使われており、幾何的非線形 FEM, 非線形 FEM などの応用が研究されている。それぞれ用途により長短がある。手術ナビゲーションやトレーニング装置への応用を念頭に精度に重点をおき長短をまとめたものが表 1 である。多くの実験的考察から生体軟組織は応力と歪の関係において非線形性を持つことと、変形に伴う体積の変化が少ないことが認められている。この非線形性と体積を一定に保つ変形に関しては高分子材料の変形解析として超弾性体が連続体の研究として行なわれている<sup>1)~3),6),7),9)</sup>。変形計算はその出自から物理・数学を基盤とした多くのコミュニティで研究が盛んに行われている。国内の学会に限っても、応用物理学会、応用数学会、機械学会、計算工学会等多数ある。これらは共通部分を核として各学会特有の立ち位置を持つ。例えば、物理は連続体としての物性、数学は偏微分方程式の数値解の一意性や誤差に主眼を置いている。コンピュータグラフィックスの観点からこれを考えると、共通部は連続体に基づく有限要素法の理論であり、個別部は実時間処理であろうか。医療応用を目指すためには実時間化と大変形が壁となりこの分野においては実用的な段階ではない。我々は、この観点から微圧縮超弾性体の医療への応用を研究している。

## 3. Perturbed 法による微圧縮超弾性体の有限要素解析

超弾性体の弾性ポテンシャル関数として、Mooney-Rivlin 体がよく用いられる。すると  $W^M$  を一次の Mooney-Rivlin 体による弾性ポテンシャルエネルギー密度として、

$$W^M = c_1(\tilde{I}_C - 3) + c_2(\tilde{II}_C - 3) \quad (1)$$

$$\tilde{I}_C \equiv I_C \mathbb{III}_C^{-\frac{1}{3}}, \quad \tilde{II}_C \equiv II_C \mathbb{III}_C^{-\frac{2}{3}}$$

また  $I_C, II_C, III_C$  は、 $\mathbf{C}$  を右 Cauchy-Green 変形テンソルとして、その第一、第二および第三不変量である。

弾性ポテンシャルエネルギーに微圧縮によるエネルギー変化の項を付加し、これに体積一定の条件を加味して全領域  $\Omega$  および境界面  $S$  でのポテンシャルエネルギー  $\tilde{\Phi}_{ptb}$  を求めたものが次の Perturbed Lagrange-multiplier<sup>1),2),6),7)</sup> である。

$$\tilde{\Phi}_{ptb} = \int W^M d\Omega + \int \underbrace{\lambda(J-1)}_{W^V} d\Omega - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\kappa} \lambda^2 d\Omega + \underbrace{\int R dS + \int B d\Omega}_{\Phi_{ext}} \quad (2)$$

ここに、 $\lambda$  は未定乗数、 $J$  は体積、 $\kappa$  は体積弾性率に対応する定数であり、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{B}$  はそれぞれ表面力および体積力によるポテンシャルエネルギーを示す。外力によるポテンシャルエネルギーの変化は無いとして、変位  $\mathbf{u}$  とラグランジュ未定定数  $\lambda$  による第 1 変分  $\delta \mathbf{u} \tilde{\Phi}_{ptb}$  と  $\delta \lambda \tilde{\Phi}_{ptb}$  を求めることにより、次の停留条件が得られる<sup>7),8)</sup>。上のエネルギー最小化問題を解くことは、 $\mathbf{t}$  を表面力、 $\rho_0 \mathbf{g}$  を体積力として以下の 2 式を解くことに対応する。

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W^M}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial W^V}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (3)$$

$$\int \left[ (W^V - \frac{\lambda}{\kappa}) \delta \lambda \right] d\Omega = 0 \quad (4)$$

## 4. 有限要素近似

これを有限要素近似して微圧縮超弾性体を実装した。当初、射影混合法<sup>5),11)</sup> で実現したが計算が安定せず、Perturbed 法を試みた。しかし、射影混合法と Perturbed 法では基本のエネルギー式は異なる\*が導いた弱形式 (3)(4) は、射影混合法の弱形式と同じとなった<sup>8)</sup>。従って両者は等価と考える。また、計算が安定しない理由は剛性マトリクスが正定値でないことに帰因し<sup>4)</sup>、Newton 法での繰り返し計算における計

\*  $\tilde{\Phi}_{prj} = \int W^M d\Omega + \frac{\kappa}{2} \int (P W^V)^2 \lambda d\Omega + \Phi_{ext}$ ,  $P(\kappa W^V) = \lambda$

Displacement ●			
Pressure ×			
	4/1 P1/P0 Unsatisfied	5/1 P1/P0 Unsatisfied	10/1 P2/P0 Unsatisfied
	4/4 P1/P1 Unsatisfied	5/4 P1/P1 Unsatisfied	10/4 P2/P1 Unsatisfied
	4/4c P1/P1 Unsatisfied	5/4c P1/P1 Satisfy	10/4c P2/P1 Satisfy

図 1 4 面体要素分割における各種補間と LBBK 条件との関係：  
 5/4c(P1/p1) と 10/4c (P2/P1) が LBBK 条件を満たし  
 他は満たさない。

算刻みの問題であり、これは両者に共通であった。

#### 4.1 4 面体 P1/P0 要素での離散化の課題

手術シミュレータのモデルは形状近似の観点と実時間化の観点から 4 面体要素分割を用いることが有利である。有限要素法の計算の最終段階では大規模な連立方程式を解く必要があるので次数  $n$  が低いことが重要であるためである。しかし、離散化を無定見に行なうと変位が実際より小さくなるロッキングが生じる。変位と圧力を未知数として解く混合型では圧力の振動も生じる<sup>11)</sup>。線形弾性体の場合、この数値計算の信頼性を保証する必要十分条件が LBBK (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi-Kikuchi) 条件である<sup>4)</sup>。Mooney Rivlin 体等非線形物性の場合には十分条件はなく必要条件のみとなる。即ち、少なくともこの条件を満たす必要がある。

図 1 に 4 面体を用いた場合の LBBK 条件を満たす離散化を示す。5/4c は評価が分かれるので除外して LBBK 条件を満たし実用上安定して動くためには最低でも変位 10 節点、圧力 4 点が必要である。連立方程式を解く次数は要素当たり 34 次元である。最悪条件下で連立方程式を解くための計算量は次数の 2 乗や 3 乗となるので次元数が低くなる P1/P0 の実装が好ましいが LBBK 条件を満たさず数値解の信頼性が低い問題が生じる。

#### 4.2 圧力安定化処理

以上の問題を解決するために非圧縮超弾性体へ圧力安定化項を入れた処理が提案されている<sup>9),10)</sup>。これを数値安定性がより高い微圧縮超弾性体へ適用したのが本報告である。次の式 (5) が微圧縮条件式 (4) に圧力安定化項を追加した弱形式である。

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \left( W^V - \frac{\lambda}{\kappa} \right) d\Omega - \sum_e \frac{\beta h}{\kappa} \int_{\partial \omega_e} [\lambda] [\delta \lambda] dS = 0 \quad (5)$$

ここに  $[\cdot]$  はジャンプ演算を示す。

・安定化による要素  $e$  の剛性マトリクス  $K_e^S$   
 式 (5) 左辺 2 項の要素  $e$  に対応する要素剛性マトリクスは次式となる。

$$K_e^S = \frac{\beta h}{\kappa} \begin{bmatrix} S_{ej_1} + S_{ej_2} + S_{ej_3} + S_{ej_4} & -S_{ej_1} & & & & \\ & -S_{ej_1} & S_{ej_1} & & & \\ & -S_{ej_2} & & 0 & & \\ & -S_{ej_3} & & & 0 & \\ & -S_{ej_4} & & & & 0 \\ & -S_{ej_2} & -S_{ej_3} & -S_{ej_4} & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & S_{ej_2} & 0 & 0 & & \\ & & 0 & S_{ej_3} & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & S_{ej_4} & \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに  $S_{ej_i}$  は要素  $e$  と要素  $j_i$  の接する面積を示す。

・安定化による要素  $e$  の内力ベクトル  $Q_e^S$   
 有限要素  $e$  を囲む要素を  $j_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) とし、要素  $e$  による内力ベクトル  $Q_e^S$  は式 (7) である。

$$Q_e^S = [q_e, q_{j_1}, q_{j_2}, q_{j_3}, q_{j_4}]^T = K_e^S [\lambda_e, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}, \lambda_{j_4}]^T \quad (7)$$

#### 4.3 数値解法

以下、全体剛性マトリクスを  $K$ 、同外力ベクトルを  $F = (F_u, F_\lambda)^T$ 、同内力ベクトルを  $Q = (Q_u, Q_\lambda)^T$  とし説明する。計算は微圧縮超弾性体処理を基本として圧力安定化処理に帰する追加すべき要素剛性マトリクス  $K_e^S$  と内力ベクトル  $Q_e^S$  を全体剛性マトリクス  $K$ 、全体内力ベクトル圧力部  $Q_\lambda$  の該当部にそれぞれ加算して次のように Newton-Raphson 法で解いた。

- (1) 初期化  
 $u = 0, \lambda = \text{初期圧力}$
- (2) 繰り返し計算
  - (a) 境界条件の更新  
 $F_u \leftarrow \text{外力, 固定部等},$   
 $F_\lambda \leftarrow \text{外部圧力等}$
  - (b) 微圧縮に対応した  $K, Q_u, Q_\lambda$  の計算
  - (c) 圧力安定化処理のための追加処理  
 $\forall$  要素  $e : K \leftarrow K_e^S$  の反映  
 $\forall$  要素  $e : Q_\lambda \leftarrow Q_e^S$  の反映
  - (d) 以下の連立方程式を解く  
 $[K] \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u - Q_u \\ F_\lambda - Q_\lambda \end{bmatrix}$
  - (e) 変位、圧力の更新  
 $u = u + \Delta u$   
 $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$
  - (f) 誤差の評価  
 $\delta E = \|F - Q\| / \|F - Q\|_{first}$
  - (g) 誤差による終了判定  
 $\delta E \leq 1e^{-8}$  なら終了  
 それ以外なら手順 (2) を繰り返す

### 5. 圧力安定化微圧縮超弾性体の同定

実時間化には処理の自作が必須である。しかし、非線形処理の実装は複雑であり、特に微圧縮超弾性体の実装においては、各種テンソル計算が煩雑で間違いが

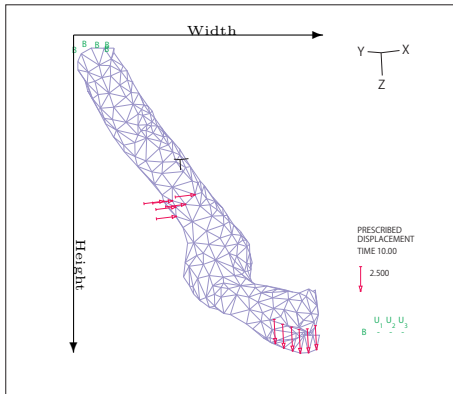


図2 ADINA との骨格部同定における変位拘束条件：上端を固定して、一部の中間節点の X 変位を幅の 50%前に移動 (YZ 方向自由)、また下端の節点の Z 変位を高さの 30%下方に移動 (XY 方向自由)

表2 各モデルにおける有限要素近似条件

番号	計算モデル	変位補間次数	圧力補間次数	ガウス積分数
(1)	線形 FEM	1 次 4 点	-	-
(2)	線形 (回転補正)	1 次 4 点	-	-
(3)	幾何的非線形	1 次 4 点	-	4 点
(4)	微圧縮超弾性体	1 次 4 点	1 点	4 点

生じやすい。同定にはファントムを用いた物理実験と実装処理の間で変位を比較するのが直接的な方法であるが計測装置等の設備を必要とする。代替として商用非線形 FEM プログラム ADINA<sup>14)</sup> が正しい変位を与えるものとして、今回の実装処理と比較した。ADINA は MIT の Bathe 教授を中心に開発された著名な非線形有限要素法プログラムである。このとき、ADINA は圧力安定化機能を持たないため、実装処理から圧力安定化を除き (即ち  $\beta = 0$  として動かす) 微圧縮超弾性体として、密度を変えた 2 ケースで同定した。

### 5.1 同定の条件：有限要素近似、物性値、拘束条件

4 面体を用いた要素数 1101, 401 節点の血管モデルを同定に用いた。また、有限要素近似条件は表 2-(4) 超弾性体に示すように、変位に関しては 4 点 1 次近似、圧力に関しては 1 点である P1/P0(4/1) で近似した。この状態で、図 2 に示すように上端を固定して、一部の中間節点の X 変位を幅の 50%前に移動 (YZ 方向自由)、また下端の節点の Z 変位を高さの 30%下に移動 (XY 方向自由) と大変形させて比較した。

### 5.2 骨格部同定結果

表 4 に ADINA と実装した微圧縮超弾性体処理の節点変位比較を示す。表に示すように密度が  $5.1\text{kg/m}^3$  の場合、平均変位誤差は 2%以内、 $510\text{kg/m}^3$  の場合 1%以内となっており微圧縮超弾性体としての実装は正しいと結論する。また超弾性体と幾何的非線形処理の相違は、応力テンソル計算部のみであり超弾性体の同定から幾何的非線形処理の正しさも確認できる。な

表3 実験に用いた物性値：Mooney-Rivlin 体に関してはヤング率とポアソン比から  $c_1 + c_2, \alpha$  に換算後、 $c_1, c_2$  に 1:1 で分配した。

有限要素モデル	線形材料		非線形材料		
	ヤング率	ポアソン比	$c_1$	$c_2$	$\alpha$
線形	1MPa	0.49	-	-	-
回転補正	1MPa	0.49	-	-	-
幾何的非線形	1MPa	0.49	-	-	-
超弾性体 Mooney	-	-	$8.395 \times 10^4$	$8.395 \times 10^4$	$4.167 \times 10^6$

お、超弾性体では剛性マトリクスの正定値性が保証されないが、実装した FEM では高速化の要請から共役勾配法を連立方程式の解法に用いた。この妥当性は文献<sup>13)</sup>による。

### 5.3 圧力安定化効果

圧力安定化の利きを示す  $\beta$  を変化させたときの形状変化を図 3 に、圧力の変化を図 4 に示す。 $\beta = 0$  は圧力安定化が無い微圧縮超弾性体であり、 $\beta$  の増加に伴い圧力安定化が働き圧力振動が抑えられる。

## 6. 各モデルの評価実験

### 6.1 血管データを用いた評価

次に腎臓周辺の大血管を用いて手術シミュレーションに近い状況でモデルの自重を変えて各モデルの挙動を比較した。非線形物性を持つ超弾性体と線形物性を用いる他のモデルを同等の条件で比較はできないが、極力条件を合わせるためポアソン比、ヤング率から Mooney-Rivlin 体パラメータへの変換は、小変形時の対応関係である

$$c_1 + c_2 = \frac{E}{4(1+\nu)} ; \alpha = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

を用いた。実験では形状関数として 1 次 4 点補間、非線形 FEM では 4 点ガウス積分物性値は前期の対応から作った表 3 の物性値を用いた。

各モデルの形状変形の相違を図 5 に示す。また、表 5 に Mooney-Rivlin 体を基準とした各モデルの変位の相違を定量的に示す。この数値は初期形状 (図 2) を囲む直方体を構成する  $L_x, J_y, K_z$  を用いて正規化している。圧力安定化微圧縮超弾性体 (PSH と略して表記) を基準として幾何的非線形 FEM とは平均変位相違 3.4%、最大変位相違 13.4%、回転補正 FEM の場合平均は 3.3%、最大 13.6%、線形 FEM の場合は、平均 22%、最大 96%である。図 5 から明らかなように密度の増加により相違は広がる。

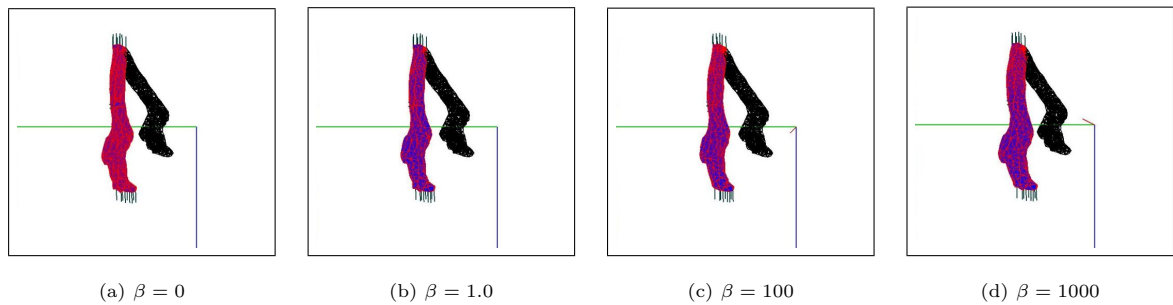
処理時間に関しては、回転補正 FEM での全体剛性マトリクスの生成時間 (Newton 法の 1 イタレーションにおける) を基準の 1 として他のモデルの処理時間を表 6 に示した。

### 6.2 実験からの推測

最終的な評価は動物を用いた実験との比較が必要であるが、現時点で以下の結果を得た。

**表 4 ADINA による実装した微圧縮超弾性体モデルの同定**

節点	密度 $\rho = 510\text{kg/m}^3$			密度 $\rho = 5.1\text{kg/m}^3$		
	$ Adina - Sim / Adina  * 100$			$ Adina - Sim / Adina  * 100$		
	x (%)	y (%)	z (%)	x (%)	y (%)	z (%)
1	0.3927	0.9586	0.6622	1.0112	1.1539	2.2242
100	0.5847	1.3113	1.3790	1.3757	1.5995	3.1751
200	0.5880	0.0444	0.8029	2.2654	0.7891	1.5910
300	1.1405	0.0600	0.7668	1.7802	0.1359	2.0592
400	2.0006	2.2992	0.0761	6.4780	5.3072	0.2157
平均変位誤差 0.89 %			平均変位誤差 1.72%			



**図 3** 圧力安定化微圧縮超弾性体において  $\beta$  を変化させたときのシミュレーション結果：物性値は  $c_1 + c_2 = 1.67853 \times 10^5$ ,  $c_2 : c_1 = 1 : 1$ ,  $\alpha = 4.166667 \times 10^6$ , 密度  $\rho = 0.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  である。変形時の固定条件は図 2 による。また連立方程式の解法は共役勾配法を使用。

**表 5** 圧力安定化微圧縮超弾性体を基準とした幾何的非線形と回転補正 FEM および線形

FEM の変位差比較: 密度  $\rho = 0.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

節点	$ LN - PSH /L_{x,y,z} * 100$			$ COR - PSH /L_{x,y,z} * 100$			$ NONL - PSH /L_{x,y,u,z} * 100$		
	x (%)	y (%)	z (%)	x (%)	y (%)	z (%)	x (%)	y (%)	z (%)
1	0.83	1.67	1.14	0.93	4.82	3.16	1.09	4.68	4.50
100	3.71	19.3	4.05	1.92	0.95	1.15	1.77	0.95	2.27
200	22.7	56.5	7.02	4.73	7.09	0.00	4.27	7.34	0.91
300	14.6	65.6	2.05	0.82	5.89	0.03	0.31	6.62	0.66
400	33.8	96.1	4.84	7.62	5.10	1.21	5.45	4.33	1.14
成分変位誤差	18.3	43.3	4.41	4.64	4.47	0.88	4.09	4.59	1.43
平均変位誤差	22.0%			3.33%			3.36%		
最大変位誤差	96.2%			13.6%			13.4%		

PSH モデルでは  $\beta = 100$  を使用。PSH は圧力安定化微圧縮超弾性体の略。

**表 6** 各モデルの処理時間比較：回転補正 FEM の剛性マトリクス生成時間を 1 とした処理時間

モデル	剛性マトリクス生成	連立方程式
線形 FEM	0.09	4.2
回転補正	1	4.2
幾何的非線形	1.3	4.2
圧力安定化超弾性体 (PSH)	10.1	19.8

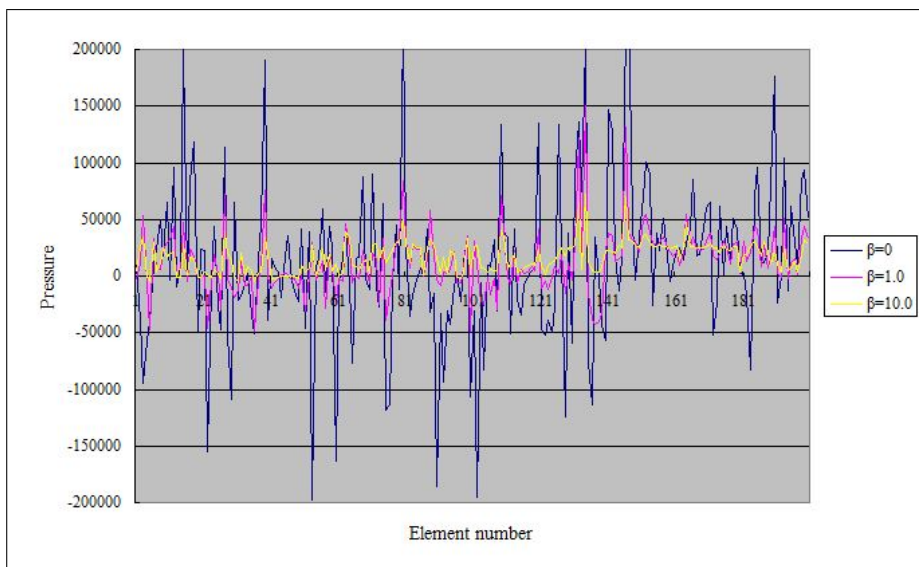
- (a) 圧力安定化微圧縮超弾性体は自重の変化に対してもそれらしい動きをしている。図 5(b)(c)。
- (b) 線形 FEM は大変形時、体積の膨張が著しい。計算コストが安いのが利点であるが精度の高い血管操作などのシミュレーションには使えない。図 5(c)。
- (c) 回転補正、幾何的非線形 FEM の相違は目視判別できない。図 5(a)(b) に示す。しかし定量的に

は表 5 に示す最大約 14% 程度の誤差があるので手術ナビゲーション等精度を要求される用途には適用が難しい。

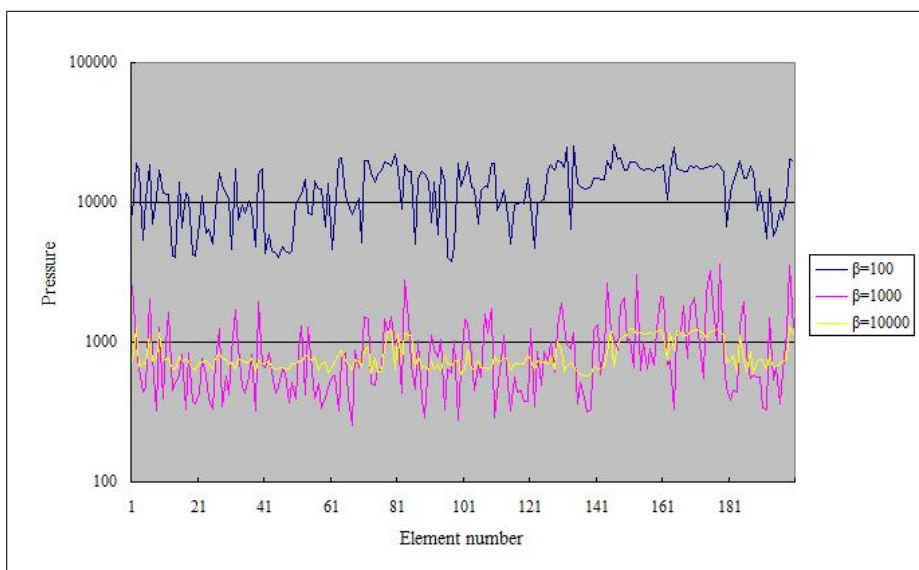
### 6.3 実時間化検討

回転補正 FEM、幾何的非線形 FEM および超弾性体に関しては基本的に Newton 法による繰り返しが必要である。しかし、シミュレータへの実装を考えた場合、計算間隔における変化が少ないのでシミュレーション時間内での繰り返しが Newton 法の 1 イタレーションとすることができると想定している。

また、実装時の計算システムとしては、マルチコア化あるいは GPU を高度に利用した高速化が必要である。経験上、GPU で連立方程式を解く場合、速度向上率が約 10 倍であるので、並列化により圧力安定化微圧縮超弾性体の実時間実装は可能である。



(a)  $\beta = 0, 1.0, 10.0$  の圧力振動 :  $\beta = 0$  は安定化処理なし



(b)  $\beta = 100, 1000, 10000$  の圧力振動:圧力軸は対数表示

図 4 圧力安定化処理を実装した微圧縮超弾性体の実験 :  $\beta = 0$  から  $\beta$  を変化させて圧力を表示:  $c_1 + c_2 = 1.67853 \times 10^5$ ,  $c_2 : c_1 = 1 : 1$ ,  $\alpha = 4.166667 \times 10^6$ , 密度  $\rho = 0.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  で初期圧力 300Pa とした. 変形時の固定条件は図 2 による. 連立方程式の解法は共役勾配法を使用.

## 7. むすび

材料非線形性を模擬できるので生体の挙動を最も良く再現すると期待する超弾性体の実装に関して述べた.

また, 超弾性体を基準にして幾何的非線形, 回転補正 FEM, 線形 FEM の挙動を数値実験から相対的に評価した. この結果, 幾何的非線形モデルと回転補正モデルはライフスケールでの差異はない. 超弾性体は他の



(a) 左より圧力安定化微圧縮超弾性体；幾何的非線形；回転補正を示す。密度は  $0.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。黒の線画は変形前形状を示す。

(b) 左より圧力安定化微圧縮超弾性体；幾何的非線形；回転補正を示す。密度は  $5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。Mooney 体の自重による伸びが顕著に見える。

(c) 左より圧力安定化微圧縮超弾性体；幾何的非線形；回転補正；線形 FEM を示す。大変形に伴う線形 FEM の体積増加が顕著である。密度は  $5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

図 5 各モデルによる血管を用いて密度を変化させたときの各モデルのシミュレーション結果：物性値は線形の場合ヤング率は 1Mpa, ポアソン比は 0.49；圧力安定化微圧縮超弾性体の場合はこれに対応する  $c_1 + c_2 = 1.67853 \times 10^5$ ,  $c_2 : c_1 = 1 : 1$ ,  $\alpha = 4.166667 \times 10^6$ , また  $\beta = 100$  である。変形時の固定条件は図 2 による。また連立方程式の解法は共役勾配法を使用。

モデルと異なり自重により垂れ下がる状況を良く表現している。しかし、現状では外科手術における力学的な計測データが体系的に得られていないため、変形モデルと実臓器との間の絶対的評価ができていない。今後、手術シミュレータやナビゲーションの評価の元となるデータの採取と計測手法の確立を行い、このデータに基づき最適な  $\beta$  を決めると共に現実との差異を評価したい。

#### 謝 辞

本研究の一部は科研費 23390383 および 23659762 の助成を受けた。

#### 参 考 文 献

- 1) T.Y.P Changl , F. Saleeb and G. Li, Large strain analysis of rubber-like materials based on a perturbed Lagrangian variational principle, Computational Mechanics Vol.8,No.8 pp221-233, 1991
- 2) S.N. Atluri and Reissner, On the formulation of variational theorems involving volume constraints,Computational Mechanics Vol.5, No.8 pp337-344,1989
- 3) T. Yamada and F. Kikuchi, AMixed Finite Element Method for Large Deformation Analysis of Incompressible Hyperelastic Materials, Theoretical and Applied Mechanics, 39, pp.61-73,1990
- 4) F. Brezzi, On Existence, uniqueness and aproximation of saddle-point problems arising from lagrangian Multipliers, RAIRO, Vol8,pp129-151,1974

- 5) F. Brezzi, and K.L. Bathe, Reliability of Methods for Engineering Analysis, 197, Pineridge Press, 1986
- 6) T. Sussman, K.J. Bathe, A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, Computers and Structures Vol. 26,pp357-409,1987
- 7) G.A. Holzapfel, Nonlinear solid mechanics, John Wiley & Sons,Ltd., 2000
- 8) M. Ogata, Y. Dohi, T.Yamada, Y. Kubota, Implementation and Evaluation of Hyperelastic model for Surgical Simulator and Navigation, IEEE EMBC, pp6297-6300,2012.
- 9) O. Klaas, A. Maniatty and M.S. Shephard, A Stabilized Mixed Finite Element Method for Finite Elasticity. Formulattion for Linear Displacement and Pressure interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 180, pp.65-79,1999
- 10) 山田貴博, 宮島亮:「非圧縮超弾性体の大変形問題に対する圧力安定化四面体 1 次要素」, Vol.17, 計算工学会, 2012 年
- 11) 渡辺浩志:「超弾性体の混合型有限要素解析に関する基礎的検討」, 機械学会論文集 (A 編) 62 巻 595 号, 1996 年
- 12) 緒方正人, 長坂学, 乾谷徹, 坂本英男, 高波健太郎, 榎山和秀, 窪田吉信:「患者固有の形状に基づく手術手技訓練用シミュレータ」, 情報処理学会論文誌, Vol.53, No.1, pp421-431, 2012 年
- 13) 鈴木厚, 田端正久:「不定値対称行列に対する共役勾配法の収束について」, 京都大学数理解析研究所講究録 1265 巻, pp39-44, 2002 年
- 14) ADINA: <http://www.adina.com/company.shtml>