Vol.2013-HPC-138 No.4
2013/2/21

フィルタ対角化法の適用上の工夫

村上 弘[1,a)]

概要：フィルタ対角化法を用いて固有値問題の固有値が指定された区間内にある固有対を解く．その際に有用であろうと思われる工夫の幾つかを述べる．

キーワード：固有値問題，フィルタ, 対角化法

Some Notes for Applications of the Filter Diagonalization Method

Hiroshi Murakami[1,a)]

Abstract: The filter diagonalization method solves those pairs of eigenproblem whose eigenvalues are in the specified interval. In this paper, we describe some ideas applicable to the method which are thought to be useful.

Keywords: eigenproblem, filter, diagonalization

1. はじめに

扱うフィルタ対角化法は，以下のような算法である．まず固有値問題の解きたい固有対を，固有値の範囲により指定する．それに対応する伝達特性を持つ線形作用素を「フィルタ」として構成する．十分多くのランダムなベクトルに「フィルタ」を作用させることによって，濾過されたベクトルの組を作る．そのベクトルの組から線形独立性の良い基底を適切に構成して，その基底に Rayleigh-Ritz 法を適用して得た Ritz 対を元の固有値問題の近似対とする．

今回はこのフィルタ対角化法を適用する際に有用であると考えられる工夫の幾つかを述べる．

ここでは（単段の）フィルタはレゾルベントの線形結合の形であるとする．

1 首都大学東京・数理情報科学専攻
Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University
a) mrkmhrsh@tmu.ac.jp

2. 低次のフィルタを重ねた高次のフィルタ

2.1 同一のフィルタを重ねる場合

たとえば，低次の同一のフィルタ $\mathcal{F}_L$ を多段（例えば s 段）重ねて，それを高次のフィルタ $\mathcal{F}_H = (\mathcal{F}_L)^s$ として用いると，使用するシフトの異なるレゾルベントの種類は低次のものと同じになり少なくて済む．レゾルベントの作用を実現するために，シフトを加えた行列の連立 1 次方程式を LU 分解を用いて直接法で解く場合には（あるいは前処理に不完全 LU 分解を用いて反復法で解く場合でも），多段に重ねた各フィルタの間でシフトの値が共通のレゾルベントは，それを実現する連立 1 次方程式を解く際に，LU 分解の再計算を避けると全体の計算量を節約できる．（但し，低次のフィルタを多段に重ねて適用すると，その処理は逐次的になり，利用可能な計算の並列度は低下する）．

同じフィルタを反復して適用することは，連立 1 次方程式を直接法で解く場合に LU 分解の再利用ができれば，それほど負荷の高い処理にはならないであろう．固有値が阻止域にある（不要な）固有ベクトルに対するフィルタの設計どおりの減衰を得るには，レゾルベントの作用を与える

Vol.2013-HPC-138 No.4
2013/2/21

連立１次方程式をそれに見合った精度で解かなければならないが，フィルタが多段に重ねて構成されている場合には，各段についての減衰への要求水準も低くなり，連立１次方程式の求解も要求精度が下げられる（例えば 14 桁の減衰を保証する場合，2 段階に分けるのであれば各段ごとに 7 桁の減衰を，3 段階なら格段ごとに 5 桁の減衰を保証すれば十分，などとなる）．また，低次のフィルタの繰り返しの途中に，ベクトルの組の再直交化や Rayleigh-Ritz 法を挿入する，なども考えられる（それはもちろん計算の手間を増加させてしまうが）．

2.2　シフトを共有するが異なるフィルタを重ねる場合

低次のフィルタを重ねて高次のフィルタを作る場合に，低次の各段のフィルタの伝達関数の極の分布を共通にすれば，必要なレゾルベントの種類が少なくて済む．そのとき，上記の場合のように低次の各段のフィルタをすべて同じにしないこともできる．そのことにより，すべて同じ場合に選ぶ場合よりも伝達特性の形状を良くできる可能性がある．

いま，多項式 $q(\lambda)$ には重複する極がないとする．低次のフィルタがすべて同じであれば，その伝達関数は $f(\lambda) \equiv \{\phi(\lambda)\}^s = \left\{\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}\right\}^s$ であるが，そうではなくて，有界な有理関数 $\phi_\ell(\lambda)$ を用いて $f(\lambda) \equiv \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)\cdots\phi_s(\lambda) = \prod_\ell \phi_\ell(\lambda) = \prod_\ell \frac{p_\ell(\lambda)}{q(\lambda)}$ とする．この場合，p_ℓ は実多項式でない場合も許すことにする．すると，伝達関数 ϕ_ℓ に対応する低次の各フィルタは分母の多項式 $q(\lambda)$ の極をシフトとするレゾルベントの線形結合で書けて，その線形結合の係数だけが違うものになる．

例として，重複した虚数の極 $t = \pm i$ だけを持つフィルタが構成できる（但し，通過域での伝達率の一様性はあまり良いものにはならないであろう）．ここで t は固有値の範囲 $\lambda \in [a, b]$ を線形変換で $t \in [-1, 1]$ に対応させて得られる正規化された座標である．いま n を偶数として，$f(t) = \left\{\frac{2}{1+t^2}\right\}^{\frac{n}{2}} \times P(t)$ で $P(t)$ を n' 次（$n' < n$）の実多項式で偶関数とする．$|t|$ が大のとき，$f(t)$ は $O(|t|^{-(n-n')})$ のように振る舞う．そうして $f(t)$ の $[-1, 1]$ での値の最大最小比があまり大きくならないように，さらに $[-1, 1]$ から離れると遠方ではなるべく速やかに減衰して 0 に近づくように $P(t)$ を決めることができるとよい．多項式 $P(t)$ は実数の範囲で 2 次以下の因子に $f(t) = \prod_{\ell=1}^{n/2} \phi_\ell(t)$ と分解できる．但し $\phi_\ell(t) = \frac{2p_\ell(t)}{1+t^2}$ で，実多項式 $p_\ell(t)$ は高々 2 次になる．いま $p_\ell(t) = a + bt + ct^2$ であれば（注：実数 a，b，c は ℓ ごとに異なる），$\phi_\ell(t) = 2c + \frac{b-ai}{t-i} + \frac{b+ai}{t+i}$ であることを用いると，$\phi_\ell(t)$ を伝達関数とする低次のフィルタ作用素は $\mathcal{F}_\ell = 2cI + (b-ai)\mathcal{R}(i) + (b+ai)\mathcal{R}(-i)$ となり，実ベクトル $\mathbf{x}$ に対する $\mathcal{F}_\ell$ の作用は $\mathcal{F}_\ell\mathbf{x} = 2c\mathbf{x} + 2\mathrm{Re}\,\{(b-ai)\mathcal{R}(i)\mathbf{x}\}$ で計算でき，結果も再び実ベクトルになる．そうして $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n/2}\cdots\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$（実際には順序は任意）であるから，$\mathcal{F}$ を作用させる計算は，レゾルベントとしては虚数 i をシフトとするものだけで実現できることになる．

3.　フィルタで濾過するベクトルの個数について

フィルタ対角化法では，固有値がフィルタの通過域にある固有ベクトルよりも多い個数の線形独立の（通常はランダムな）ベクトルを濾過して，得られたベクトルの組から（必要な固有値を持つ固有ベクトルの全体の張る）不変部分空間の近似基底をうまく構成する．

その際に，何個のランダムなベクトルを濾過すれば十分であるかが予め分かれば都合が良い．しかし固有値問題が大規模であると，たとえ係数行列が実対称で疎であっても非零要素の分布が帯でない一般の場合には，固有値が指定した実区間にある固有対の個数を数えるためのシルベスタ慣性律に基づく方法（シフトを加えた行列に修正 Cholesky 法を適用）は，大量に fill-in が発生するので実施は困難である．

そこでランダムなベクトルを少数個ずつ逐次的に追加して濾過を行い，必要な不変部分空間を張るのに十分になったと判断したら追加をやめるようにすると，事前に濾過するランダムなベクトルの個数を決める必要がなくなり，また大過剰を避けて必要な個数だけの濾過が行えるので，計算量の面では平均的に効率が向上することが期待できる（但し，ランダムなベクトルを追加してフィルタで濾過することを逐次的に繰り返すので，利用できる計算並列度は低下する）．

ランダムなベクトルを順次に少数個ずつ追加してフィルタで濾過してゆき，得られたベクトルを集めた組の数値的なランクが増加しなくなり飽和に達したと判断できたところで追加を止める．（但し，フィルタの伝達率の大きさが阻止域で十分に微小ではなかったり，遷移域に固有値がある固有対が多いときには，ランクが明確に決まらない状況が生じる．）

フィルタで濾過された合計 m 個の縦ベクトルの組を Y とする．Y の張る空間が既に飽和に到達していて，そのランク r が m よりも小さいかどうかを調べるとする．簡易な予備検査としては以下の方法が利用できるかもしれない Y 全体ではなくて，Y から（任意の）k 個（ただし $k \geq m$）の行を集めて小規模な $k \times m$ の部分行列 Y' を作り，そのランク r' を求めれば，（数学的には）$r \geq r'$ の関係がある．そこでもしも $r' = m$ であれば（そのことから $r = m$ であるので）Y はフルランクなので，フィルタで濾過されたベクトルを更に追加する必要がある．（そうでなくて $r' < m$ の場合には，Y のランクの下限が r' であることを意味するだけなので，Y のランクが落ちているとは結論できない）．この方法は k の値を，m 以上の（N と比べれば非常に小さ

い）適当な値に選んで実施すれば良い．例えば k の値は，$2m$ とか $3m$ とか $10m$ などにできる．

> 列ベクトル全体の 2-ノルムは固有値問題で計量的に意味のある幾何学量だが，列ベクトルから k 個の行を取り出して作ったベクトルには意味を与え難いので，誤差を含む数値計算で安定に使える基準であるかは疑問である．

もう少しきちんとした判定をするには，縦長の行列 Y に対する QR 分解で，列が逐次に（一個あるいは複数個）追加された場合に QR 分解をそれに合わせて更新する方法を採れば良い．この場合，列に関するピボット選択は，最初からやり直すのでなければ，各回ごとに追加された（単数あるいは複数の）列の中でしかできない．

4. LU 分解とピボット交換について

固有値問題の係数行列が実対称の帯行列の場合に，レゾルベントを実現するための連立 1 次方程式の係数行列も同じ幅の（複素対称な）帯行列になる．対称帯行列の LU 分解を行うときに数値安定性を保つために行交換によるピボット選択を採用すると，L の下帯幅は元の帯幅と変わらないが，U の上帯幅は 2 倍に増える．そのため，ピボット交換をしない場合に比べて必要な記憶量も計算量も増える．LU 分解やその後の前進後退代入の計算量はピボット行の交換が有るのと無いのでは比が 3 対 2 程度になる．

ピボット交換を行うのは数値安定性を保つためである．そこでピボット交換を行わずに LU 分解を計算してみるとどうなるかについて少数の実験をしてみたところ，典型的なフィルタですべてのシフトが虚数の場合には，結果の精度にはあまり大きく影響しないようであった（常にそうなるかについては不明）．他方，逆反復法を用いて近似対を改良するために，固有値に近接する実数のシフトを入れた連立 1 次方程式を LU 分解を用いて解く場合に行交換によるピボット選択を止めると，得られた近似対の精度はピボット選択を行う場合に比べてかなり悪化した．

5. 近似対の改良方法について

フィルタ対角化法で求めた近似対の精度を高めるための改良方法については，固有値がよく分離しているならば，各近似対ごとに Rayleigh 商付きの逆反復を，固有値に縮退あるいは近接がある場合には，Ritz 値を用いた同時逆反復法が使えることは良く知られている．しかし，これらの方法は一般的には固有対の個数と同じ個数だけのシフトの異なる連立 1 次方程式を（1 回から 2 回あるいは 3 回程度の）反復回数分だけ解くので，連立 1 次方程式を LU 分解を用いて直説法で解く（あるいは前処理に LU 分解を用いて反復法で解く）のであればかなりの計算量が必要になる．例えば，改良するべき近似対が p 個あると，それらすべてに逆反復を 1 回行なうのには，行列へのシフトの異なる連立 1 次方程式を p 組解かねばならないが，個数 p が大きい場合にはこれはかなり重たい処理になる．

そこで，逆反復法を用いる代わりに，得られた近似対のベクトルの組をフィルタで再び濾過しても改良ができることに注意する．フィルタ対角化法では（近似対に対する情報が何もなければ）ランダムなベクトルの組から開始しているが，それであってもフィルタで不要な固有値の固有ベクトルを強く除去することで必要な固有値の近似対がある程度精度良く得られるのである．そこで，得られた近似対のベクトルの組から開始して更にフィルタ対角化を適用すれば，より一層改善された近似対が得られるはずである．ただし Rayleigh 商逆反復ならば（固有値に縮退がなければ）収束は反復回数に対して 3 次であるが，フィルタ対角化法の場合にはフィルタによる濾過で不要な固有ベクトルを減衰させる率は一定なので，収束は改良の反復回数に対して 1 次になる．

フィルタ対角化法の最初の段階とそれ以降の改良の段階で，共通のフィルタを使用するのであれば，最初の段階でレゾルベントを実現するために行なった各シフト付きの行列の LU 分解の結果を保存して再利用ができるならば，新たな LU 分解をせずに済むので改良のための計算量を少なくできる．あるいは，たとえ LU 分解を再度行なう場合でも，その個数は求めたい固有対の個数 p には依存せずに一定（フィルタで用いるレゾルベントの個数）である．

6. フィルタ付きの Lanczos 法の可能性

簡単化のために，固有値問題は標準問題とする．元の固有値問題の任意の固有ベクトルはフィルタ作用素 $\mathcal{F}$ の固有ベクトルにもなるので，フィルタ作用素の任意の不変部分空間は元の固有値問題の不変部分空間でもある．そこで，フィルタ作用素 $\mathcal{F}$ の不変部分空間の基底をうまく構成して，それの基底に元の固有値問題に対する Rayleigh-Ritz 法を適用すれば，得られる Ritz 対は元の固有値問題の近似対になる．

元の固有値問題の求めたい固有値の範囲 $[a,b]$ がフィルタの通過域であり，フィルタ作用素の固有値はフィルタの伝達率である．固有値が通過域にあることとフィルタの伝達率が $g_{\min}$ 以上であることが同値となるように，フィルタの特性が設定されているとする．よって，フィルタ作用素 $\mathcal{F}$ の固有値問題を解いて固有値が $g_{\min}$ 以上である $\mathcal{F}$ の固有ベクトルをすべて集めると，それは元の固有値問題の固有値の範囲 $[a,b]$ に対応する不変部分空間の基底である．

そうしていま，$\mathcal{F}$ の固有値問題を（普通の，あるいはブロック版の）Lanczos 法を用いて解くことを考える（標準固有値問題の場合，レゾルベントの線形結合である線形作用素 $\mathcal{F}$ は，その伝達関数 $f(\lambda)$ が実関数ならば，実対称作用素である）．反復法として用いた場合の Lanczos 法は，絶対値最大付近の固有値を持つ固有対が早く収束する性質を

持つ．また，$\mathcal{F}$ は阻止域に固有値がある固有ベクトルを減衰させて除去する作用を持つので，（$\mathcal{F}$ を 1 回作用させたベクトルから始めた）Lanczos 法は近似的にフィルタで阻止されない（通過域あるいは遷移域にある）固有値の固有ベクトルで張られる比較的小次元の空間内での Krylov 部分空間法となり，反復法としてその小さい次元と等しい程度の反復回数で良く収束をすると思われる．このことを確かめるための数値実験を行なうことを検討している．

このフィルタ作用素を用いる Lanczos 法では，フィルタを通過するとみなせる固有ベクトルの個数を事前に知る必要は無い．フィルタ作用素 $\mathcal{F}$ の固有値は縮退や近接をしている可能性があるが，Lanczos 法の反復回数が少なければ Lanczos 法で生成される直交ベクトル列を保持することは十分に可能であり，その直交性を保つようにすることもできる．

> 実際には，フィルタを通過できる固有ベクトルの個数が極めて多いと，Lanczos 法の反復回数が多くなり，やはりメモリ上に Lanczos 法の直交ベクトル列を保持できなくなる．そのような場合には，直交ベクトル列全体の保持は諦めて，3 重対角行列だけを生成していくことになり，Lanczos 法の数値的な困難性が増す．

複数個のベクトルを束ねて用いるブロック化された Lanczos 算法も，経過時間を反復回数を減らすことで短縮させる目的で，あるいは計算の並列性や演算密度を高める目的にも使える．

7. おわりに

固有値問題の固有対の近似を固有値の範囲を指定して求める「フィルタ対角化法」で，実際に運用する際に計算の能率を上げるための種々の工夫や考察をしている状況を述べた．

今回は，具体例などを記述あるいは実験するに至らず，本予稿の内容の記述に不完全な点の多いことを，お詫び申し上げます．

付　　録

A.1 フィルタ対角化法の概要

ここでのフィルタ対角化法では，フィルタとして線形の作用素を用いる．話の簡単化のため，固有値問題は完全対角化が可能な場合に限定する．固有値問題の任意の固有ベクトルにフィルタを作用させるとスカラー倍となり，その倍率（伝達率）は固有値だけに依って決まるようにする．そうしてフィルタをうまく設計して，固有値が不要な範囲にある固有ベクトルの伝達率は微小で（阻止する），固有値が必要な範囲にある固有ベクトルの伝達率は微小ではないある一定以上の大きさを持つ（通過する）ようにする．ランダムなベクトルをそのような性質を持つフィルタで濾過すると，得られるベクトルは，固有値が不要な範囲にある固有ベクトルをほとんど含まずに，固有値が必要な範囲にある固有ベクトルだけを豊富に含んだものになる．そこで，線形独立性の良いランダムなベクトルを十分多く生成して，それらにフィルタを適用した結果のベクトルの組を作る．このようにして作ったベクトルの組の張る部分空間からある適切な方法によって線形独立性の高い基底を構成する．構成された基底に対して Rayleigh-Ritz 法を適用し，得られた Ritz 対を固有値問題の近似解とする．ここでフィルタを適用するランダムなベクトルの個数は，少なくともフィルタが阻止しない固有値を持つ固有対の個数以上でなければならない（少し過剰にする方が結果の精度は良くなる）．

上述のようなフィルタの性質を持つ線形作用素 $\mathcal{F}$ としては，（相異なる）複素シフト τ_k を持つレゾルベント $\mathcal{R}(\tau_k)$ の複素係数 c_k による線形結合 $\mathcal{F} = c_\infty I + \sum_k c_k \mathcal{R}(\tau_k)$ を採用すると数学的な取扱いが極めて簡単で明解になる（一般性のために，恒等演算子の項 $c_\infty I$ を付け加える）．ここで，レゾルベント $\mathcal{R}(\tau)$ は固有値問題の係数行列を用いて定義される線形作用素で，標準固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ に対しては $\mathcal{R}(\tau) = (A - \tau I)^{-1}$ であり，一般固有値問題が $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ の形のときは $\mathcal{R}(\tau) = (A - \tau B)^{-1}B$ とする．シフト τ のレゾルベントを任意に与えられたベクトル $\mathbf{x}$ に作用させる計算 $\mathbf{y} = \mathcal{R}(\tau)\mathbf{x}$ は，それぞれ標準固有値問題の場合には $(A - \tau I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ の形，上記の形の一般固有値問題の場合には $(A - \tau B)\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ の形の連立 1 次方程式を解いてベクトル $\mathbf{y}$ を求めることに帰着する．このように定義されたレゾルベントを用いるとき，フィルタ作用素 $\mathcal{F} = c_\infty I + \sum_k c_k \mathcal{R}(\tau_k)$ による固有値 λ の固有ベクトルの伝達率は $f(\lambda) = c_\infty + \sum_k c_k/(\lambda - \tau_k)$ となり，λ だけに依存する（スカラー値の）有理関数で表せる．この有理関数を伝達関数と呼ぶ．逆に，この形で表せる（複素平面上ですべての極が単純で，無限遠方で値が有界となる）任意の有理関数 $f(\lambda)$ を与えると，それを伝達関数に持つフィルタ作用素 $\mathcal{F}$ を上記の形のレゾルベントの線形結合として実現できる．（そうして固有値 λ の任意の固有ベクトル $\mathbf{v}$ に対して，$\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$ となる．）

フィルタの設計

フィルタの設計では，「必要とする固有値の存在範囲」が与えられたときに，固有値が存在可能な（一般には複素平面上の）領域に対して「通過域」,「阻止域」の区分けを適切に設定して，（複素平面上の関数である）伝達関数の大きさ $|f(z)|$ が以下の性質を持つように，添字 k の個数である n，結合係数 c_k の値，シフト量 τ_k の値および恒等演算子に対する結合係数 c_∞ の値をうまく決める．

- 通過域は「必要な固有値の存在範囲」をその内部に含

む領域とする．そうして通過域に固有値 λ があるときにはまたそのときに限り，$|f(\lambda)|$ は（微小ではない）閾値 $g_{\rm pass}$ 以上の値をとる．

- 阻止域は「通過域を拡げたある領域」の外部全体の領域で，固有値 λ が阻止域に在るときには必ず，$|f(\lambda)|$ は微小な閾値 $g_{\rm stop}$ 以下の値をとる．
- （通過域と阻止域の中間にある領域を「遷移域」という）．

「通過域」,「阻止域」,「遷移域」が以上の性質を満たすならば，$f(\lambda)$ の任意の極はこれら 3 つのうちのどれかに所属するならば，それは通過域であり，極は「阻止域」,「遷移域」には無いことが分かる．

伝達関数と通過域におけるその一様性

通過域に所属する固有値 λ_p に対する $|f(\lambda_p)|$ の値分布全体の最大と最小の比があまり大きくないことも重要である．扱える数値の精度が制限されている普通の数値計算では，たとえばこの比の値が 10^1 ならば 1 桁分，10^2 ならば 2 桁分などのように，比の値が大きいとそれだけ得られる固有ベクトルの精度が低下しうる．一般的な状況では，固有値をこれから求めようとしている段階では固有値の分布も正確な固有値の値も知らないのであるから，通過域に在る固有値 λ_p のすべての値に対する $|f(\lambda_p)|$ の値の最大値と最小値を求めておくというようなわけにはいかない．最小値の下限が $g_{\rm pass}$ であることはすぐわかる．ところが伝達関数の極が通過域に含まれていると，もしも極の位置に固有値 λ_p が一致した場合には最大値は無限大になるから上限は無いことになる．

固有値がすべて実数の場合

問題の性質から固有値が実数に限られる場合（実対称あるいはエルミート対称の標準固有値問題，実対称あるいはエルミート対称の定値一般固有値問題など）には，「通過域」,「阻止域」,「遷移域」は実数の範囲に限定すれば良いし，伝達関数の大きさ $|f(\lambda)|$ も λ が実数の場合についてだけ考えれば良い．いま求めたい固有値の範囲が実区間 $[a,b]$ であれば，実数 x が阻止域にあるときには必ず「ある微小な閾値 $g_{\rm stop}$」以下となるように，また実数 x が通過域 $[a,b]$ にあるときまたそのときに限って伝達関数の大きさ $|f(x)|$ が「ある（微小ではない）閾値 $g_{\rm pass}$」以上の値となるようにすればよい．フィルタの設計で，伝達関数 $f(x)$ の極がすべて虚数になるようにすれば，$|f(x)|$ は実軸上で有界連続になるので，その区間 $[a,b]$ における最大値を $g_{\max}$ とする．そのとき固有値 λ が通過域 $[a,b]$ にある場合の $|f(\lambda)|$ の上限と下限はそれぞれ $g_{\max}$，$g_{\rm pass}$ で与えられる．（典型的な 4 種類のフィルタ（Butterworth, Chebyshev，inverse-Chebyshev，elliptic）では設計時に上限と下限の比 $g_{\max}/g_{\rm pass}$ を（1 よりは大の）任意の値，たとえば 2 などに設定できる）．

参考文献

[1] Daniels, R.W.: *Approximation Methods for Electronic Filter Design*, McGraw-Hill, 1974.

[2] Lutovac, M.D., Tošić, D.Y. and Evans, B.L.: *Filter Design for Signal Processing*, §12.8, Prentice Hall, 2001.

[3] 村上 弘: レゾルベントの線形結合によるフィルタ対角化法, **情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム**, Vol.49, No.SIG2 (ACS21) (2008), pp.66–87.

[4] 村上 弘: 固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計, **情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS31), Vol.3, No.3 (2010), pp.1–21.

[5] 村上 弘: フィルタで濾過されたベクトルの組から不変部分空間の直交基底の組を近似構成するフィルタ対角化法, **情報処理学会研究報告**, Vol.2011-HPC-129, No.1 (2011), pp.1–8.

[6] 村上 弘: 対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成, **先進的計算基盤システムシンポジウム** *SACSIS2011* **論文集** (電子版), (2011), pp.332–339.