

常微分方程式の数値解法における集積丸め誤差の 自己相関係数について*

森 口 繁 一** 吉 沢 正**

序

P. Henrici¹⁾は、常微分方程式の数値解法における局所丸め誤差について確率論的背景に立つ理論を導入し、局所丸め誤差が互いに独立にはば一様分布に従うことを基本仮定として集積丸め誤差の期待値、分散などを論じた。初期条件を少しずつ変えたときの集積丸め誤差が標本空間を構成すると考えるのである。ここでは初期条件の異なる二つの数値解における集積丸め誤差は互いに独立と考えられた。

ところがこの理論に沿って蒲地信一²⁾が微分方程式 $y' = y$ を Euler 法によって解き、初期条件を少しずつ変えて集積丸め誤差の系列を作ったとき、それらの丸め誤差が互いに独立とはいえなくなる現象を発見した(第1図参照)。第1図は上記微分方程式 $y' = y$ を 2,000 個の異なる初期条件 $y_0 = 0.1 + q \cdot \Delta \cdot u$ ($q = 0, 1, \dots, 1999$) のもとに固定小数点方式 10 進 12 桁により、区間 $[0, 1]$ で Euler 法で解き、 $x = 1$ での集積丸め誤差の系列を作ったものの一部である。ここに $u = 10^{-12}$, $\Delta = 5$, 大きさ幅 h は $1/100$ である。第1図を見ると、この系列に自己相関があることは確かであると思われる。

本論文では、まず Euler 法における集積丸め誤差の自己相関係数について、その理論と実験結果を示し、さらにフーリエ展開により自己相関係数を解析する。

1. Euler 法

常微分方程式の初期値問題

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

を解くのに、Euler 法では

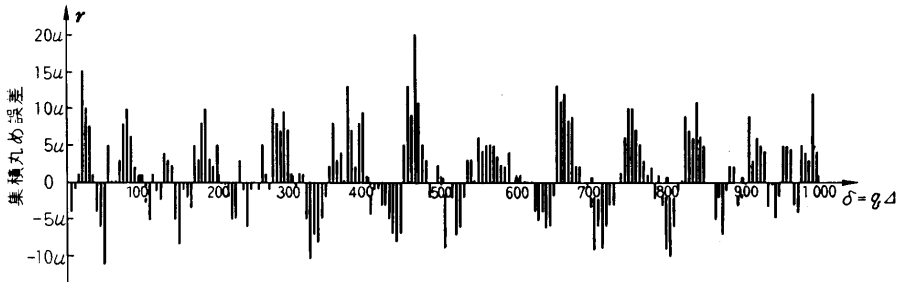
$$\left. \begin{aligned} y_0 &= y(a) = \eta \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

として y_n を順々に求める。ここに h はきざみ幅であり、実函数 $f(x, y)$ は、 $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$ で定義され連続、かつ Lipschitz の条件を満たすものとする。すなわち任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*| \quad (1.3)$$

を満足する定数 L が存在する。さらに $f(x, y)$ は 2 回まで微分可能であると仮定する。

さて、(1.2) 式を実際に計算する際には丸め誤差が入ってくる。以下とくにと断らない限りすべての計算は固定小数点方式によるものとして話を進める。一般



第1図 集積丸め誤差の系列
 $y' = y, y(0) = 0.1 + q\Delta u, q = 0, 1, \dots, 200, \Delta = 5, u = 10^{-12}$ (Euler 法 $h = 10^{-2}$)

* Auto-correlation Coefficient of Accumulated Round-off Errors on Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations, by Sigeiti Moriguti and Tadashi Yoshizawa (University of Tokyo)

** 東京大学工学部

に、 x を $|x| < 1$ なる数とすると、 x の正しく丸められた機械表示を x^* で表わす。正しく丸められたとは $|x - x^*| \leq u/2$ を意味する。 u は計算機の扱う正の最小単位とする(たとえば、ここで使用した

OKITAC 5090 では $u=10^{-12}$ である). 簡単のために h, a および初期値 γ は, いずれも u の整数倍であるとする. これらの仮定のもとで実際に計算される値 (以下 \sim を頭に付けて示す) \tilde{y}_n は次の方程式を満たす.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_0 &= y_0 \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + (h\tilde{f}(x_n, \tilde{y}_n))^* \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

第 n ステップでの局所丸め誤差を ε_n で表わすと, (1.4) 式は

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(x_n, \tilde{y}_n) + \varepsilon_{n+1} \quad (1.5)$$

と表わされ, 局所丸め誤差はこの (1.5) 式で定義される. さらに (1.4), (1.5) 式より次式を得る.

$$\varepsilon_{n+1} = (h\tilde{f}(x_n, \tilde{y}_n))^* - hf(x_n, \tilde{y}_n) \quad (1.6)$$

この ε_{n+1} は次のように二つの成分に分けて考えることができる.

$$\varepsilon_{n+1} = \pi_{n+1} + \rho_{n+1} \quad (1.7)$$

$$\pi_{n+1} = (h\tilde{f}(x_n, \tilde{y}_n))^* - h\tilde{f}(x_n, \tilde{y}_n) \quad (1.8)$$

$$\rho_{n+1} = h[\tilde{f}(x_n, \tilde{y}_n) - f(x_n, \tilde{y}_n)] \quad (1.9)$$

π_{n+1} は induced error と呼ばれ, $u/2$ の程度であり, ρ_{n+1} は inherent error と呼ばれ, 函数 $f(x, y)$ の値を計算する際に生ずる誤差で, 存在すれば hu の程度である. そこで局所丸め誤差 $\varepsilon_n (n=1, 2, \dots)$ は区間 $[-u/2, u/2]$ の上の一様分布に従う確率変数であり, その平均値と分散は

$$E(\varepsilon_n) = 0, \quad V(\varepsilon_n) = u^2/12 \quad (1.10)$$

であると仮定する.

集積丸め誤差は

$$r_n = \tilde{y}_n - y_n. \quad (1.11)$$

打ち切り誤差は

$$e_n = y_n - y(x_n) \quad (1.12)$$

で定義される. ここに $y(x_n)$ は微分方程式 (1.1) の解 $y(x)$ の x_n での値である. さらに今後よく使う函数を定義しておく.

$$g(x) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \quad (1.13)$$

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt \quad (1.14)$$

2. 局所丸め誤差の相関係数

一般に $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}$ を, その差が一定の任意の 2 数とし,

$$\xi = \overset{2}{x} - \overset{1}{x} \quad (2.1)$$

と置く. $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}$ を丸めた数をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \overset{1}{x}^* &= \overset{1}{x} + \overset{1}{\varepsilon} \\ \overset{2}{x}^* &= \overset{2}{x} + \overset{2}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

としよう. かりに $u=1$ の場合をとり, $\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}$ がそれぞれ $[-1/2, 1/2]$ の上の一様分布に従い, $\overset{2}{x}^* - \overset{1}{x}^*$ が整数であるとする. その整数を j とおくと

$$\overset{2}{\varepsilon} - \overset{1}{\varepsilon} = (\overset{2}{x}^* - \overset{1}{x}^*) - (\overset{2}{x} - \overset{1}{x}) = j - \xi \quad (2.3)$$

ξ 以上の最小の整数を i とすると, $i-1 < \xi \leq i$ となり

$$\overset{2}{\varepsilon} = \begin{cases} \overset{1}{\varepsilon} + i - \xi, & -1/2 < \overset{1}{\varepsilon} + i - \xi \leq 1/2, \\ \overset{1}{\varepsilon} + i - 1 - \xi, & 1/2 < \overset{1}{\varepsilon} + i - \xi \end{cases} \quad (2.4)$$

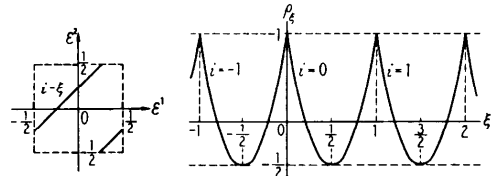
となる (第 2 図). この関係から二つの確率変数 $\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}$ の分散, 共分散は

$$\left. \begin{aligned} V(\overset{1}{\varepsilon}) &= V(\overset{2}{\varepsilon}) = \frac{1}{12} \\ \text{Cov}(\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}) &= \frac{1}{12} - \frac{1}{2}(\xi - i)(i - 1 - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

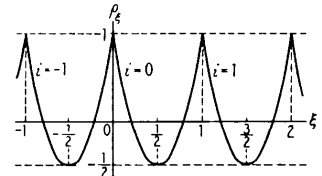
となり, したがって $\overset{1}{\varepsilon}$ と $\overset{2}{\varepsilon}$ の相関係数 ρ_ξ は

$$\rho_\xi = 1 - 6(\xi - i)(i - 1 - \xi) \quad (2.6)$$

で与えられる (第 3 図). 一般の u に対して, $\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}$ が $[-u/2, u/2]$ の上の一様分布に従うときも上式は変わらない.



第 2 図 $\overset{1}{\varepsilon}, \overset{2}{\varepsilon}$



第 3 図 $\rho_\xi = 1 - 6(\xi - i)(i - 1 - \xi)$ 局所丸め誤差の相関係数

さて, 二とおりの初期条件 $\overset{1}{y}(a) = \gamma, \overset{2}{y}(a) = \gamma + \delta \cdot u$ に対する常微分方程式 $y' = f(x, y)$ の解, Euler 法による数値解, 各ステップでの丸め誤差などを, 頭に 1, 2 をつけて表わすと, (1.6) 式より局所丸め誤差について次式を得る.

$$\begin{aligned} \overset{2}{\varepsilon}_{n+1} - \overset{1}{\varepsilon}_{n+1} &= (h\tilde{f}(x_n, \overset{2}{y}_n))^* - hf(x_n, \overset{2}{y}_n) \\ &\quad - (h\tilde{f}(x_n, \overset{1}{y}_n))^* + hf(x_n, \overset{1}{y}_n) \\ &= j \cdot u - [hf(x_n, \overset{2}{y}_n) - hf(x_n, \overset{1}{y}_n)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここに, $j \cdot u = (h\tilde{f}(x_n, \overset{2}{y}_n))^* - (h\tilde{f}(x_n, \overset{1}{y}_n))^*$ (2.7) 式は (2.3) 式に対応する式で, j は整数である.

次に ξ に対応する (2.7) 式の右辺第 2 項を初期条件における差 $\delta \cdot u$ と $f(x, y)$ によって評価しよう.

$$\xi(x_n) \cdot u = hf(x_n, \overset{2}{y}_n) - hf(x_n, \overset{1}{y}_n) \quad (2.8)$$

と置く. 平均値の定理により,

$$hf(x_n, \tilde{y}_n) - hf(x_n, \bar{y}_n) = hf_y(x_n, y_n^+) (\tilde{y}_n - \bar{y}_n)$$

ここに y_n^+ は \tilde{y}_n と \bar{y}_n の中間値である. $f_y(x_n, y_n^+)$ は (1.13) で定義した $g(x)$ の x_n での値 $g(x_n)$ で近似できるから

$$\xi(x_n) \cdot u \doteq hg(x_n) (\tilde{y}_n - \bar{y}_n) \tag{2.9}$$

を得る. そこで

$$z_n = \tilde{y}_n - \bar{y}_n \tag{2.10}$$

と置くと (1.5) 式より

$$z_{n+1} = z_n + hf(x_n, \tilde{y}_n) - hf(x_n, \bar{y}_n) + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \tag{2.11}$$

(2.11) 式右辺の中間項は $\xi(x) \cdot u$ に等しいから (2.9) 式より

$$z_{n+1} = z_n + hg(x_n) z_n + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \tag{2.12}$$

$z_0 = \delta \cdot u$ であるから, Henrici¹⁾ p. 28 の定理により

$$z_n = z(x_n) + O(h)$$

を得る. ここに, $z(x)$ は常微分方程式

$$z_0 = \delta \cdot u, z' = g(x)z$$

の解である. したがって

$$z_n = \delta e^{G(x)} \cdot u + O(h) \tag{2.13}$$

よって,

$$\xi(x_n) = h \delta g(x_n) e^{G(x_n)} \tag{2.14}$$

を得る.

定理 1. 微分方程式 $y' = f(x, y)$ の, 初期条件において $\delta \cdot u$ の差がある二つの (Euler 法による) 数値解における, 第 $n+1$ ステップでの局所丸め誤差 $\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2$ が区間 $[-u/2, u/2]$ の上の一様分布に従うと仮定すると, その相関係数 $\rho(\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2)$ は (2.14) の $\xi(x_n)$ と $i-1 < \xi(x_n) \leq i$ とにより次式で与えられる.

$$\rho(\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2) = \rho(\xi(x_n)) = 1 - 6(\xi(x_n) - i)(i - 1 - \xi(x_n)) \tag{2.15}$$

3. 集積丸め誤差の自己相関係数

Henrici¹⁾ にならって初期条件 $y(a) = \eta, \bar{y}(a) = \eta + \delta u$ に対する集積丸め誤差 r_n^1, r_n^2 にはそれまでに発生したすべての局所丸め誤差 $\{\varepsilon_i^1\}, \{\varepsilon_i^2\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の影響がそれぞれ

$$r_n^1 = \sum_{i=1}^n d_{n,i}^1 \varepsilon_i^1, r_n^2 = \sum_{i=1}^n d_{n,i}^2 \varepsilon_i^2 \tag{3.1}$$

の形で入ってくるものと仮定する. 添字の値の同じ ε_i^1 と ε_i^2 とは (2.15) で与えられるような相関を持つが, 添字の値の異なる ε_i^1 と ε_j^2 とは独立であると仮

定すると, r_n^1 と r_n^2 の相関係数は

$$\rho(r_n^1, r_n^2) = \frac{\sum_{i=1}^n d_{n,i}^2 \rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2)}{\sum_{i=1}^n d_{n,i}^2} \tag{3.2}$$

となる. そこで

$$R_n = h \sum_{i=1}^n d_{n,i}^2 \rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2) \tag{3.3}$$

と置いて, R_n について差分方程式を作ろう. ここで係数 $d_{n,i}$ について次式を用いる (Henrici¹⁾ p. 38 参照).

$$d_{n+1,i} = d_{n,i} + hg(x_n) d_{n,i}, \begin{cases} n=0, 1, \dots \\ i=1, 2, \dots, n \end{cases} \\ d_{n+1,n+1} = 1, \quad (n=0, 1, \dots) \tag{3.4}$$

(3.3), (3.4) 式により,

$$R_{n+1} - R_n = h \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} d_{n+1,i}^2 \rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2) - \sum_{i=1}^n d_{n,i}^2 \rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2) \right\} \\ = h \left\{ \rho(\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2) + \sum_{i=1}^n (d_{n+1,i}^2 - d_{n,i}^2) \rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2) \right\} \\ = h \{ 2g(x_n) R_n + \rho(\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2) \} + O(h^2) \tag{3.5}$$

$\rho(\varepsilon_{n+1}^1, \varepsilon_{n+1}^2)$ は定理 1 で与えた $\rho(\xi(x_n))$ であり, $R_0 = 0$ であるから, 差分方程式 (3.5) は

$$R(0) = 0 \\ R'(x) = 2g(x)R(x) + \rho(\xi(x)) \tag{3.6}$$

に Euler 法を適用し, 各ステップで $O(h^2)$ の誤差が入ったものに相当する. よって (3.6) の真の解 $R(x)$ を用いて

$$R_n = R(x_n) + O(h) \tag{3.7}$$

と表わすことができる.

つぎに, (3.2) の分母については,

$$V_n = h \sum_{i=1}^n d_{n,i}^2 \tag{3.8}$$

と置くと, (3.3)~(3.6) において $\rho(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2)$ を 1 で置き換えて考えれば,

$$V_n = V(x_n) + O(h) \tag{3.9}$$

と近似されることがわかる. ここに, $V(x)$ は微分方程式

$$V(0) = 0 \\ V'(x) = 2g(x)V(x) + 1 \tag{3.10}$$

の解である.

定理 2. 初期条件 $y(a) = \eta$ を中心に初期条件を変えて常微分方程式 $y' = f(x, y)$ の Euler 法による数値解を求めるときの x_n での集積丸め誤差の系列は次の自己相関係数を持つ.

$$\rho(h\delta) = \frac{R(x_n)}{V(x_n)} + O(h) \quad (3 \cdot 11) \quad + \dots + \int_{x_n}^1 e^{-2x} (\rho_{n+1} - \rho_n) dx \}$$

ここに、 $R(x)$ 、 $V(x)$ は微分方程式 (3・6)、(3・10) の解である。 x を固定すれば $\rho(h\delta)$ はきざみ幅 h と初期値のずれ $\delta(\cdot u)$ の積により定まる。(3・11) は積分の形で次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \rho(h\delta) &= \frac{\int_a^{x_n} \rho_{\xi(t)} \exp \{2[G(x_n) - G(t)]\} dt}{\int_a^{x_n} \exp \{2[G(x_n) - G(t)]\} dt} \\ &= \frac{\int_a^x \rho_{\xi(t)} \exp [-2G(t)] dt}{\int_a^x \exp [-2G(t)] dt} \quad (3 \cdot 12) \end{aligned}$$

ここに $\rho_{\xi(t)}$ は (2・15) 式によって与えられる。

4. 例

これまで得た結果を微分方程式 $y' = \pm y$ に適用して自己相関係数を求め、実際に数値的に集積丸め誤差の系列を作って求めた標本自己相関係数と比較しよう。

(1) $y' = y$ を区間 $[0, 1]$ で Euler 法で解いたときの、 $x=1$ での集積丸め誤差の自己相関係数の理論値を求めよう。このとき $a=0$ 、 $x_n=1$ 、 $g(x)=1$ 、

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = x \text{ である。したがって}$$

$$\xi(x) = h\delta e^x$$

を得る。容易にわかるように $\xi(x)$ は単調増加関数であり、 $\xi(0)=1$ 、 $\xi(1)=h\delta e$ となる。(3・12) を用いて

$$\begin{aligned} \rho(h\delta) &= \int_0^1 \rho_{\xi(x)} e^{-2x} dx / \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \frac{2}{1-e^{-2}} \int_0^1 \rho_{\xi(x)} e^{-2x} dx \end{aligned}$$

さらに $[h\delta] = m$ 、 $[h\delta e] = n$ ($[\]$ はガウス記号) とし、 $h\delta e^x = k$ となる x を x_k とする (m, n, k は正整数、 $m \leq k \leq n$)。 $\xi(x)$ の値が整数値を切るときに (2・15) 式の $\rho_{\xi(x)}$ の i が変わることと考えて、 $\rho(h\delta)$ は次式の積分から求めることができる。

$$\begin{aligned} \rho(h\delta) &= \frac{2}{1-e^{-2}} \left\{ \int_0^{x_{m+1}} e^{-2x} \rho_{m+1} dx \right. \\ &\quad + \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} e^{-2x} \rho_{m+2} dx \\ &\quad + \dots + \left. \int_{x_n}^1 e^{-2x} \rho_{n+1} dx \right\} \\ &= \frac{2}{1-e^{-2}} \left\{ \int_0^1 e^{-2x} \rho_{m+1} dx \right. \\ &\quad + \left. \int_{x_{m+1}}^1 e^{-2x} (\rho_{m+2} - \rho_{m+1}) dx \right. \end{aligned}$$

ここに

$$\rho_i = 1 - 6(h\delta e^x - i)(i - 1 - h\delta e^x), \quad i = 1, 2, \dots$$

そこで

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{1-e^{-2}} \int_0^1 e^{-2x} \rho_i dx \\ &= 1 + 6i(i+1) - E_1(2i+1)h\delta + E_2(h\delta)^2 \\ B_i &= \frac{2}{1-e^{-2}} \int_{x_i}^1 e^{-2x} (\rho_{i+1} - \rho_i) dx \\ &= -E_2(i e^{-1} - h\delta)^2 / i \end{aligned}$$

と置く。ここに

$$E_1 = \frac{12e}{e+1}, \quad E_2 = \frac{12e^2}{e^2-1},$$

これを用いて次式を得る。

$$\rho(h\delta) = A_{m+1} + \sum_{i=m+1}^n B_i$$

この式により任意の $h\delta$ について理論値 $\rho(h\delta)$ を容易に求めることができる。

これに対し実験値は次のようにして求めた。2,000 個の異なる初期条件

$$y_0 = 0.1 + q \cdot \Delta \cdot u, \quad q = 0, 1, \dots, 1999, \quad \Delta = 5$$

に対して、Euler 法 (きざみ幅 $h=0.01$) で $x=1$ での数値解 \tilde{y}_n を計算し、一方 Euler 法による理論値を次式により求めた。

$$\begin{aligned} y_n &= y_0(1+h)^{n-1} \\ &= y_0 e \left\{ 1 - \frac{1}{2}h + \frac{11}{24}h^2 - \frac{21}{48}h^3 + \frac{2447}{5760}h^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{959}{2304}h^5 + \dots \right\} \end{aligned}$$

このようにして集積丸め誤差の 2,000 個の系列を作り、標本自己相関係数を求めた。理論値と実験値を第 4 図に示す。わずかなくい違いはサンプル誤差の範囲内と思われる程度であり、全く良く一致した。

(2) $y' = -y$ の場合。区間 $[0, 1]$ 、 $g(x) = -1$ 、 $G(x) = -x$ である。

$$\xi(x) = -h\delta e^{-x}$$

を得るから、局所丸め誤差の相関係数は

$$\rho_{\xi(x)} = 1 - 6(-h\delta e^{-x} - i)(i - 1 + h\delta e^{-x})$$

ここに、 $i-1 < \xi(x) \leq i$ 。例 (1) の場合と全く同様に、 $\rho(h\delta)$ を求めることができる。

実験値は 1,000 個の初期条件

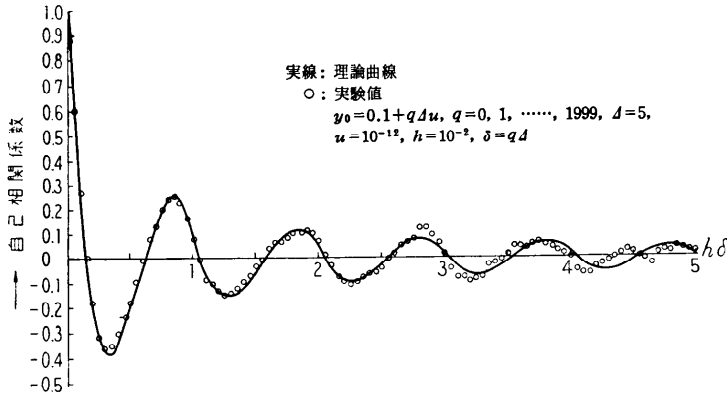
$$y_0 = 0.1 + q \cdot \Delta \cdot u, \quad q = 0, 1, \dots, 999, \quad \Delta = 20$$

について $h=0.01$ で $x=1$ での集積丸め誤差を計算し、標本自己相関係数を求めた (第 5 図)。

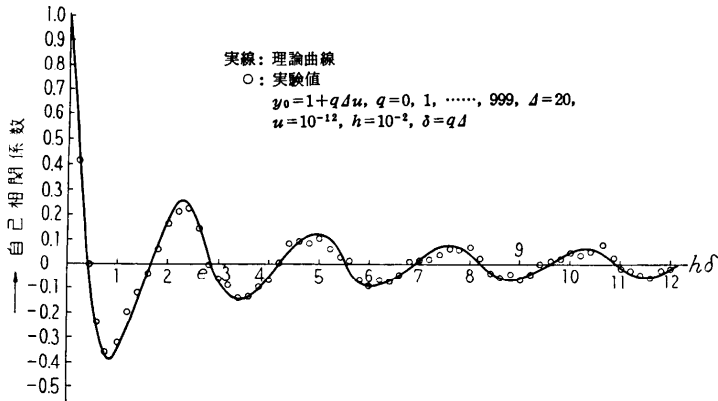
(3) 標本自己相関係数の分布などについては未解

決の問題が多く、ここで扱ったような過程の系列相関などについては確立された理論はないようである。試

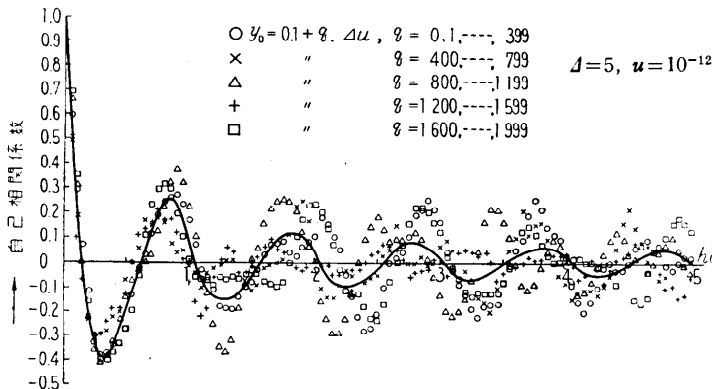
みに例(1)の系列を400ずつ5組に分けそれぞれの系列について標本自己相関係数を計算した。その結果が



第4図 集積丸め誤差の自己相関係数 $y' = y$ (Euler 法)



第5図 集積丸め誤差の自己相関係数 $y' = -y$ (Euler 法)



第6図 集積丸め誤差の標本相関係数 $y' = y$ (Euler 法 $h = 10^{-2}$)

第6図である。これで見ると400個の系列ではかなりの分散があるが、理論曲線の中に含み、その平均値は第4図の2,000個の系列の場合の標本相関係数に完全にはないが非常に近い値を示している。

5. 相関係数のフーリエ展開による解析

例(1), (2)の理論曲線を見ると、それぞれほぼ一定の周期を持つ減衰振動になっているように見える。そこで局所丸め誤差の相関係数のフーリエ展開を用いて集積丸め誤差の自己相関係数を解析してみよう。

(2.6)式の ρ_ξ は ξ の函数として周期1の函数であるから容易にフーリエ展開でき次式を得る。これを $r(\xi)$ で表わす。

$$r(\xi) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos(2n\pi\xi) \quad (5.1)$$

これを(3.12)式に代入し、積分と和の順序を入れ換えて $\rho(h\delta)$ を計算する。まず例(1)の $y' = y$ の場合について以下に示す。この場合は

$$\xi(x) = h\delta e^x \quad (5.2)$$

であるから、

$$\rho(h\delta) = \frac{\int_0^1 r(h\delta e^x) e^{-2x} dx}{\int_0^1 e^{-2x} dx} \quad (5.3)$$

となる。積分変数を $\theta = e^x$ に変換すると、

$$\rho(h\delta) = \frac{\int_1^e r(h\delta\theta) \theta^{-3} d\theta}{\int_1^e \theta^{-3} d\theta} \quad (5.4)$$

分母は定数で、 $(1 - e^{-2})/2$ に等し

い. これを c と置くと

$$c \cdot \rho(h\delta) = \int_1^e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos(2n\pi h\delta\theta) \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (5.5)$$

積分記号内の級数項は一様収束するから, 積分と和の順序を入れ換えて

$$c \cdot \rho(h\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \int_1^e \cos(2n\pi h\delta\theta) \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (5.6)$$

部分積分により

$$\int_1^e \cos(2n\pi h\delta\theta) \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{\sin(2n\pi h\delta\theta)}{2n\pi h\delta} \cdot \frac{1}{\theta^3} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\sin(2n\pi h\delta\theta)}{2n\pi h\delta} \cdot \frac{-3}{\theta^4} d\theta \quad (5.7)$$

さらに部分積分を続けていけば $1/h\delta$ に関する漸近展開が得られる. $h\delta$ を十分に大きくしたところを考慮して, $1/h\delta$ の一次の項のみ採れば

$$c \cdot \rho(h\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \left\{ \frac{\sin(2n\pi h\delta e)}{2n\pi h\delta e^3} - \frac{\sin(2n\pi h\delta)}{2n\pi h\delta} \right\} \quad (5.8)$$

右辺の和は簡単に求めることができ次式を得る.

$$c \cdot \rho(h\delta) = \frac{1}{4h\delta e^3} \left\{ 1 - 2(h\delta e - n) + [2(h\delta e - n) - 1]^3 \right\} - \frac{1}{4h\delta} \left\{ 1 - 2(h\delta - m) + [2(h\delta - m) - 1]^3 \right\} \quad (5.9)$$

ここに, $m = [h\delta]$, $n = [h\delta e]$ である. 右辺第 1 項は第 2 項に比べて $e^{-3} \approx 0.05$ 倍ぐらいの大きさであり, 第 2 項が大勢を支配する.

これより $\rho(h\delta)$ は, $h\delta$ を大きくしたときほぼ周期 1 の減衰振動をし, その振幅はほぼ $(h\delta)^{-1}$ に比例して減少していくことがわかる. これは第 4 図に見られる傾向によく一致している.

一般に $y' = f(x, y)$ の場合, 区間 $[a, b]$ で $x = b$ における集積丸め誤差の相関係数について考える. (2.14) より

$$\xi(x) = h\delta g(x) e^{G(x)} \quad (5.10)$$

であるから, 変数を

$$\theta = g(x) e^{G(x)} \quad (5.11)$$

に変換し, この逆関数を $x(\theta)$ とする.

$$d\theta = \{g'(x) e^{G(x)} + (g(x))^2 e^{G(x)}\} dx \quad (5.12)$$

であるから,

$$e^{-2G(x)} dx = \varphi(\theta) d\theta \quad (5.13)$$

となる. ここに

$$\varphi(\theta) = \left[\frac{e^{-2G(x)}}{g'(x) + (g(x))^2} \right]_{x=x(\theta)} \quad (5.14)$$

さらに,

$$A = g(a) e^{G(a)}, \quad B = g(b) e^{G(b)} \quad (5.15)$$

と書くと,

$$\rho(h\delta) = \frac{\int_a^b r(h\delta g(x) e^{G(x)}) e^{-2G(x)} dx}{\int_a^b e^{-2G(x)} dx} = \frac{\int_A^B r(h\delta\theta) \varphi(\theta) d\theta}{\int_A^B \varphi(\theta) d\theta} \quad (5.16)$$

分母は定数だから, これを c と置くと,

$$c \cdot \rho(h\delta) = \int_A^B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos(2n\pi h\delta\theta) \varphi(\theta) d\theta \quad (5.17)$$

$y' = y$ の場合と同様に, 積分と和の順序を交換して部分積分し, $1/h\delta$ の一次の項のみ採ると,

$$c \cdot \rho(h\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 \pi^2} \left\{ \frac{\sin(2n\pi h\delta B)}{2n\pi h\delta} \varphi(B) - \frac{\sin(2n\pi h\delta A)}{2n\pi h\delta} \varphi(A) \right\} = \frac{\varphi(B)}{4h\delta} \left\{ 1 - 2(h\delta B - n) + [2(h\delta B - n) - 1]^3 \right\} - \frac{\varphi(A)}{4h\delta} \left\{ 1 - 2(h\delta A - m) + [2(h\delta A - m) - 1]^3 \right\} \quad (5.18)$$

となる. ここに, $m = [h\delta A]$, $n = [h\delta B]$ である. $h\delta$ の十分大きいとき, $\rho(h\delta)$ の周期はほぼ

$$\begin{cases} 1/|B|, & |\varphi(B)| \gg |\varphi(A)| \text{ のとき} \\ 1/|A|, & |\varphi(B)| \ll |\varphi(A)| \text{ のとき} \end{cases}$$

となり, 振幅は $1/h\delta$ に比例して減少する. $\varphi(A) = \varphi(B)$ のときは減衰は $1/(h\delta)^2$ に比例することがわかる.

$y' = -y$ の場合, $\xi(x) = -h\delta e^x$, $\theta = e^{-x}$, $\varphi(\theta) = \theta^{-3}$, $A = 1$, $B = e^{-1}$, $\varphi(A) = -1$, $\varphi(B) = -e^3$ となり, 周期はほぼ e になることがわかり, これは例 (2) の第 5 図とよく一致する.

参考文献

- 1) P. Henrici: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, 1962, pp. 407
- 2) 蒲地信一: 常微分方程式の数値解法における丸め誤差の研究, 東大工学部応用物理学数理工学専修卒業論文, 1962, pp. 35
- 3) 森口繁一: 数値計算の理論と実験 VI, 『科学』 Vol. 33, No. 5 (1963年5月), pp. 273~278. (昭和39年2月25日受付)