

# 実時間情報処理システムの確率過程モデルによる評価\*

大 須 賀 節 雄\*\*

## 1. ま え が き

システムの評価には必ず経済性が伴う。特に実時間処理システムではシステムの休止による影響が大きく、これにより生ずる損失は運用・保守費とともに無視することができない。またシステム入力密度は時間とともに大きく変動するのが普通で、ピーク時のオーバー・フローによる損失も考慮する必要がある。故障によるシステムの休止およびその回復は確率的なものであるから、システムを確率過程モデルによって表わすことはシステム評価に非常に有用な手段である。これには費用あるいは利益を確率過程の中に含めて考えねばならない。

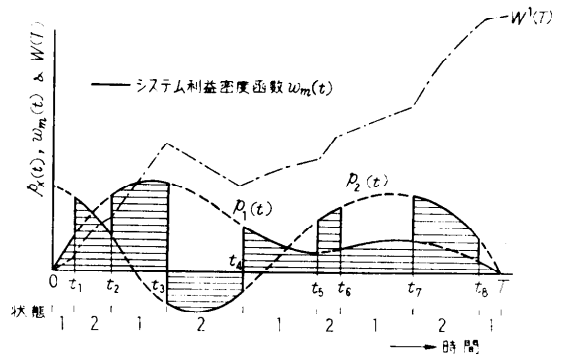
このような経済性評価の方法はマルコフ過程の場合には試みられているが<sup>1,2)</sup>、一般には単純マルコフ過程によって記述し得ない場合が多く、また費用が時間とともに変化する場合も多い。本稿では従来と全く異なった方法によってこの問題の理論解析を行ない、これによってより一般的なモデルについて経済性評価を行い得ることを示す。

## 2. 利益を伴う確率過程

本稿で扱うシステムは、一般に  $i(i=1,2,\dots,N)$  で示される  $N$  個の状態を有し、時間の経過とともにそれら状態間を確率的に遷移する。遷移間の時間分布は特に限定しない。時刻  $t$  における微小時間  $dt$  の間に、システムはそのときの状態と時刻  $t$  によってきまる特定の割合で利益（または費用） $p_i(t)dt$  を生ずる。

システムは  $T$  時間単位で評価されるものとし、上述の条件のもとで時刻  $T$  までに得たシステムの総利益を理論的に導く。 $p_i(t)$  は  $[0, T]$  の範囲で時間  $t$  の関数として各状態ごとに定義されているものとし、これを“状態  $i$  に固有の利益密度関数”と呼ぶ。システムは確率的に状態を変化するから、 $[0, T]$  でシステ

ム利益に貢献するのは状態遷移ごとに  $p_i(t)$ 、 $(i=1, 2, \dots, N)$  の一部分を用いて形成される不連続な確率密度関数である。 $[0, T]$  で生ずる遷移の組み合わせの数は無限大であるから、このような関数も無限に存在する。これらの関数の集合をまとめて“システム利益密度関数”と呼ぶ。 $N=2$  の場合の一例を第1図に示す。



第1図 利益密度関数およびシステム利益の例

$[0, T]$  でシステム状態遷移の特定のパターンにシステム利益密度関数の一つが対応するから、各遷移パターンの生ずる確率を求めこれによってシステム利益密度関数の確率平均をとったものを“システム平均利益密度関数”と呼ぶ。さらにこれを  $[0, T]$  で積分したものを“システム平均利益”あるいは単にシステム利益と呼び、これをシステム評価に用いる。

これら諸量は遷移間時間分布や状態に固有の利益密度関数の他に初期状態に依存するので、以後状態  $i$  から出発したときのシステム平均利益密度関数を  $w^i(t)$  と表わす。システム平均利益は積分上限が  $T$  であることを特に表示して  $W^i(T)$  と示す。またシステム利益密度関数の集合のうち状態  $i$  から出発し、かつ  $[0, T]$  での遷移回数が  $m$  であるものの部分集合を  $w_{im}^i(t)$  と表わす。

遷移の生じた時刻を最初から  $t_1, t_2, \dots, t_m$  などとしまた各遷移間の時間間隔を  $T_1, T_2, \dots$  などとする。すなわち  $T_j = t_j - t_{j-1}$ 、 $(j=1, 2, \dots)$  である。

\* Evaluation of Real-Time Information Processing Systems by Stochastic Process Models, by Setsuo Osuga, (Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo)

\*\* 東京大学宇宙航空研究所

## 2.1 2 States (N=2) の場合

まずシステムは状態1および2の2状態のみを有するものとする。状態1から出発した場合のシステム利益密度関数を示すと、遷移回数の奇偶に応じて、

$$\begin{aligned} w_{2n}^1(t) &= p_1(t) \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \{u(t-t_{2i-1}) - u(t-t_{2i})\} \right] \\ &\quad + p_2(t) \sum_{i=1}^n \{u(t-t_{2i-1}) - u(t-t_{2i})\}, \\ w_{2n+1}^1(t) &= p_1(t) \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \{u(t-t_{2i-1}) \right. \\ &\quad \left. - u(t-t_{2i})\} - u(t-t_{2n+1}) \right] \\ &\quad + p_2(t) \left[ \sum_{i=1}^n \{u(t-t_{2i-1}) - u(t-t_{2i})\} \right. \\ &\quad \left. + u(t-t_{2n+1}) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$u(t)$ : Heaviside 単位関数

である。以後  $p_X(t)u(t-t_i) = p_X(t, t_i)$ , ( $X=1$  or  $2$ ) と表わす。

次に  $k-1$  回目の遷移後  $k$  回目の遷移の生ずるまでの時間の分布が  $f_k(x)$  で与えられるものとする、 $t_1, t_2, \dots, t_n$  なる系列で遷移の生ずる確率は  $\prod_{k=1}^n f_k(T_k) dT_k$  であり、かつ  $\sum_{k=1}^n T_k = t_n \leq T < \sum_{k=1}^{n+1} T_k = t_{n+1}$  であるからシステム利益密度関数は

$$\begin{aligned} w^1(t) &= w_0^1(t) \int_T^\infty f_1(T_1) dT_1 \\ &\quad + \int_0^T f_1(T_1) w_1^1(t) dT_1 \int_{T-T_1}^\infty f_2(T_2) dT_2 \\ &\quad + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-T_1} f_2(T_2) w_2^1(t) dT_2 \\ &\quad \times \int_{T-T_1-T_2}^\infty f_3(T_3) dT_3 + \dots \\ &\quad + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-T_1} f_2(T_2) dT_2 \\ &\quad \times \int_0^{T-T_1-T_2} \dots \int_0^{T-T_1-T_2-\dots} f_n(T_n) w_n^1(t) dT_n \\ &\quad \times \int_{T-T_1-T_2-\dots}^\infty f_{n+1}(T_{n+1}) dT_{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

である。(1)式を代入し整理すると Appendix A に示されているように

$$\begin{aligned} w^1(t) &= p_1(t) - \int_0^T f_1(T_1) [p_1(t, t_1) - p_2(t, t_1)] dT_1 \\ &\quad + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-T_1} f_2(T_2) [p_1(t, t_2) \\ &\quad - p_2(t, t_2)] dT_2 + \dots + (-1)^n \\ &\quad \times \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-T_1} f_2(T_2) dT_2 \\ &\quad \times \int_0^{T-T_1-T_2} \dots \int_0^{T-T_1-T_2-\dots} f_n(T_n) [p_1(t, t_n) \\ &\quad - p_2(t, t_n)] dT_n + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。時刻  $T$  でのシステム利益はこの積分によって得られる。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^T p_X(t, t_i) dt &= \int_{t_i}^T p_X(t, t_i) dt \\ &= \int_0^{T-t_i} p_X(T-x) dx, \quad (X=1 \text{ or } 2) \end{aligned} \quad (4)$$

であるから、 $p_X(T-x)$  を改ためて  $\bar{p}_X(x)$  とおき、さらに次のような合成関数  $h_{X_j}(t)$  を定義する。

$$\begin{aligned} h_{X_1}(t) &= \int_0^t f_n(t-x) \bar{p}_X(x) dx = f_n * \bar{p}_X \\ h_{X_2}(t) &= \int_0^t f_{n-1}(t-x) h_{X_1}(x) dx = f_{n-1} * f_n * \bar{p}_X \\ &\vdots \\ h_{X_n}(t) &= \int_0^t f_1(t-x) h_{X_{n-1}}(x) dx \\ &= f_1 * f_2 * f_3 * \dots * f_n * \bar{p}_X \end{aligned} \quad (5)$$

これより、Appendix A に示されているように、時刻  $T$  でのシステム利益  $W^1(T)$  は

$$\begin{aligned} W^1(T) &= \int_0^T p_1(t) dt + \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \\ &\quad \times \int_0^T [h_{1i}(t) - h_{2i}(t)] dt \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

ここで合成関数  $h_{X_i}(t)$  のラプラス変換形を  $H_{X_i}(s)$  とし、 $\bar{p}_X(t)$ ,  $f_i(t)$  のラプラス変換形をそれぞれ  $P_X(s)$ ,  $F_i(s)$  と表わすと、

$$H_{X_n}(s) = P_X(s) \prod_{i=1}^n F_i(s) \quad (7)$$

$$\therefore h_{X_n}(t) = L^{-1} \left\{ P_X(s) \prod_{k=1}^n F_k(s) \right\} \quad (8)$$

と表わすことができる。 $L^{-1}\{\}$  はラプラス逆変換オペレータを意味する。これを(6)式に代入して、

$$\begin{aligned} W^1(T) &= \int_0^T p_1(t) dt + \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \\ &\quad \times \int_0^T L^{-1} \left\{ [P_1(s) - P_2(s)] \prod_{k=1}^i F_k(s) \right\} dt \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。

$P_X(s)$  は  $P_X(t-x)$  の  $x$  についてのラプラス変換であるから  $T$  を含んでいるが、仮りに  $P_X(s)$  内の  $T$  は常数とみなし  $W^1(T)$  は右辺の積分上限の  $T$  のみの函数と考えて  $T$  についてラプラス変換し、これを  $W^1(s)$  と表わすと

$$\begin{aligned} W^1(s) &= \frac{1}{s} P_1(s) + \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \\ &\quad \times \frac{1}{s} [P_1(s) - P_2(s)] \prod_{k=1}^i F_k(s) \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。この操作によって得られる  $W^1(s)$  は任意の時刻  $t$  について成り立つものではなく、 $W^1(s)$  の逆変換を  $W^1(t)$  とすると、 $t \rightarrow T$  の時に  $W^1(t) \rightarrow W^1(T)$  となって、正しい利益値  $W^1(T)$  を与える。ただし  $P_1(s) - P_2(s) = \text{Cont} = C$  の場合には一般的に成り立ち

$$W^1(s) = \frac{1}{s} P_1(s) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{C}{s^2} \prod_{k=1}^i F_k(s) \quad (11)$$

となる。(11) 式は各状態間の遷移時間  $T_i$  の確率密度関数が何回目の遷移であるかによってきまる場合であるが普通はこれが状態に固有のものとして定義されている場合が多い。この場合には

$$f_{2n+1}(x) = f_{12}(x), f_{2n}(x) = f_{21}(x), (n=0, 1, 2, \dots)$$

と表わされ、これを (10) 式に代入すると

$$W^1(s) = P_1(s)/s - (1/s)[P_1(s) - P_2(s)]F_{12}(s) \times [1 - F_{21}(s)]/[1 - F_{12}(s)F_{21}(s)] \quad (12)$$

が得られる。状態 2 から出発した場合についても、1 と 2 を入れかえることにより直ちに得られる。

## 2.2 Multi States の場合

前節の場合を拡張して一般に  $N$  個の状態のある場合を扱う。システムがある状態  $i$  を時間  $x$  だけ持続した後他の状態  $j$  へ遷移する確率密度関数  $f_{ij}(x)$  がけ与えられ、また次の状態に関係なく状態  $i$  に時間  $x$  だけ止まる密度関数を  $f_i(x)$  とする。すなわち  $f_i(x) = \sum_{j \neq i} f_{ij}(x)$  である。

### 2.2.1 各状態に固有の利益のある場合

前節の場合と同様に、 $[0, T]$  間の遷移回数が  $n$  である場合のシステム利益密度関数  $w_n^i(t)$  を定義する。 $t=0$  で  $i$  から出発し、 $i, j, k, \dots, l, m$  と状態を変え、 $[0, T]$  内の遷移回数が  $n$  であった場合、すなわち  $t_{n+1} > T > t_n$  では

$$\begin{aligned} w_n^i(t) &= p_i(t)[1 - u(t - t_1)] + p_j(t)[u(t - t_1) \\ &\quad - u(t - t_2)] + p_k(t)[u(t - t_2) - u(t - t_3)] \\ &\quad + \dots + p_l(t)[u(t - t_{n-1}) - u(t - t_n)] \\ &\quad + p_m(t)u(t - t_n) \\ &= p_i(t) - p_i(t, t_1) + p_j(t, t_1) - p_j(t, t_2) \\ &\quad + \dots + p_l(t, t_{n-1}) - p_l(t, t_n) + p_m(t, t_n) \end{aligned} \quad (13)$$

である。ただし  $p_i(t, t_k) = p_i(t)u(t - t_k)$  である。

生じ得るすべての系列を考え前と同様にして確率平均をとると、状態  $i$  から出発した時のシステム平均利益密度関数  $w^i(t)$  が次のように得られる。

$$w^i(t) = p_i(t) \int_T^\infty f_i(T_1) dT_1$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j \neq i} \int_0^T f_{ij}(T_1) [p_i(t) - p_i(t, t_1) \\ &+ p_j(t, t_1)] dT_1 \int_{T-t_1}^T f_j(T_2) dT_2 \\ &+ \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \int_0^T f_{ij}(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} f_{jk}(T_2) \\ &\times [p_i(t) - p_i(t, t_1) + p_j(t, t_1) - p_j(t, t_2) \\ &+ p_k(t, t_2)] dT_1 \int_{T-t_1}^\infty f_k(T_3) dT_3 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

これを整理すると、

$$\begin{aligned} w^i(t) &= p_i(t) + \sum_{j \neq i} \int_0^T f_{ij}(T_1) [-p_i(t, t_1) \\ &+ p_j(t, t_1)] dT_1 \\ &+ \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \int_0^T f_{ij}(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} f_{jk}(T_2) \\ &\times [-p_j(t, t_2) + p_k(t, t_2)] dT_2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

となる。 $\int_0^T p_i(t, t_n) dt = \int_{t_n}^T p_i(t) dt = \int_0^{T-t_n} p_i(T-x) dx$ 、に留意して  $w^i(t)$  を  $t$  について  $[0, T]$  で積分すると

$$\begin{aligned} W^i(T) &= \int_0^T w^i(t) dt = \int_0^T p_i(t) dt \\ &+ \sum_{j \neq i} \int_0^T f_{ij}(T_1) dT_1 \\ &\times \int_0^{T-t_1} [-\bar{p}_i(x) + \bar{p}_j(x)] dx \\ &+ \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \int_0^T f_{ij}(T_1) dT_1 \\ &\times \int_0^{T-t_1} f_{jk}(T_2) dT_2 \\ &\times \int_0^{T-t_2} [-\bar{p}_j(x) + \bar{p}_k(x)] dx \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (16)$$

となる。なほ  $\bar{p}_i(x) = p_i(T-x)$  である。以後前節の場合とまったく同様にして、時刻  $T$  での値のみを得ることに留意してラプラス変換すると

$$\begin{aligned} W^i(s) &= p_i(s)/s - (1/s)P_i(s) \sum_{j \neq i} F_{ij}(s) \\ &+ (1/s) \sum_{j \neq i} F_{ij}(s)P_j(s) \\ &- (1/s) \sum_{j \neq i} F_{ij}(s)P_j(s) \sum_{k \neq j} F_{jk}(s) \\ &+ (1/s) \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} F_{ij}(s)F_{jk}(s)P_k(s) \\ &- \dots \end{aligned} \quad (17)$$

ここで  $F_{ij}(s), P_i(s)$  等はそれぞれ  $f_{ij}(x), \bar{p}_i(x)$  のラプラス変換形である。

ここで  $F_{ii}(s) \equiv 0$  なる関数を作っておくと、

$$\sum_{j \neq i} F_{ij}(s)P_j(s) = \sum_j F_{ij}(s)P_j(s) \quad (18)$$

となる。次に  $W^i(s)$  および  $P_i(s)$  を成分とする列ベクトル、 $W(s)$  および  $P(s)$  を考える。すなわち

$$W(s) = \begin{bmatrix} W^0(s) \\ W^1(s) \\ \vdots \\ W^N(s) \end{bmatrix} \quad P(s) = \begin{bmatrix} P_0(s) \\ P_1(s) \\ \vdots \\ P_N(s) \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。さらに  $F_{ij}(s)$  の作るマトリックス  $F(s)$ ,  $P_i(s) \cdot F_i(s)$  を要素とする列ベクトル  $V(s)$  を作る。これらは

$$F(s) = \begin{bmatrix} F_{00}(s), F_{01}(s), \dots, F_{0N}(s) \\ F_{10}(s), F_{11}(s), \dots, F_{1N}(s) \\ \vdots \\ F_{N0}(s), F_{N1}(s), \dots, F_{NN}(s) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} P_0(s)F_0(s) \\ P_1(s)F_1(s) \\ \vdots \\ P_N(s)F_N(s) \end{bmatrix}$$

である。これらを用いて (17) 式を表わすと、

$$W(s) = (1/s) \{ P(s) + F(s)P(s) + F(s)^2P(s) + F(s)^3P(s) + \dots \} - (1/s) \{ V(s) + F(s)V(s) + F(s)^2V(s) + F(s)^3V(s) + \dots \} = (1/s) [I - F(s)]^{-1} [P(s) - V(s)] \quad (21)$$

あるいは  $F_i(s)$  を対角成分とする対角マトリックス  $\bar{F}(s)$  を定義して、 $V(s) = \bar{F}(s) \cdot P(s)$  と表わしておけば、

$$W(s) = (1/s) [I - F(s)]^{-1} [I - \bar{F}(s)] P(s) \quad (22)$$

が得られる。 $I$  は単位マトリックスである。

### 2.2.2 遷移に判り利益のある場合

前述の結果はある状態を継続している時に生ずる利益を示すものであるが、次に状態  $i$  から  $j$  に遷移する際に、遷移に伴って利益  $r_{ij}(t)$  の生ずる場合を考える。 $r_{ij}$  は  $p_i$  等とは単位が異なり利益値の単位を有している。これを時間函数として扱かうのは、一般に遷移の生じた時間によって利益も異なるものとしているからである。この場合をすでに導びいた結果から得るために、状態  $j$  を状態  $\bar{j}$  と  $j$  とに分けるという操作を行なう。状態  $\bar{j}$  は  $j$  に常に先がけて生じ、微小な一定時間  $a$  だけ持続した後状態  $j$  に移るものとする。この間  $q_{ij}(t)$  なる利益密度函数が定義され、 $a \rightarrow 0$  となった時  $aq_{ij}(t) \rightarrow r_{ij}(t)$  となるようにこれをきめておく。

これまでと同様にして状態  $i$  から出発した時の利益密度函数を求めて確率平均をとり、積分した後ラプラス変換を行なうと、

$$W^i(s) = (1/s) [P_i(s) + \sum_{j \neq i} F_{ij}(s) F_{jj}(s) P_j(s)$$

$$+ \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} F_{ij}(s) F_{jj}(s) F_{jk}(s) F_{kk}(s) P_k(s) + \dots] - (1/s) [P_i(s) F_i(s) + \sum_{j \neq i} F_{ij}(s) P_j(s) F_j(s) + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} F_{ij}(s) F_{jj}(s) F_{jk}(s) P_k(s) F_k(s) + \dots] + (1/s) \left[ \sum_{j \neq i} F_{ij}(s) Q_{ij}(s) \{1 - F_{jj}(s)\} + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} F_{ij}(s) F_{jj}(s) F_{jk}(s) Q_{jk}(s) \{1 - F_{kk}(s)\} + \dots \right] \quad (23)$$

となる。ここで  $f_{jj}(x = \hat{a})(x - a)$ ,  $q_{ij}(t) = r_{ij}(t)/a$  である。 $\hat{a}(x)$  はデルタ函数である。これらのラプラス変換形は

$$F_{jj}(s) = e^{-as} \quad Q_{ij}(s) = R_{ij}(s)a.$$

である。そこで  $a \rightarrow 0$  とすると、 $F_{jj} \rightarrow 1$ ,  $aQ_{ij}(s) \rightarrow R_{ij}(s)$  であるから

$$\lim_{a \rightarrow 0} (1/s) Q_{ij}(s) \{1 - F_{jj}(s)\} = \lim_{a \rightarrow 0} (1 - e^{-as}) R_{ij}(s) / as = R_{ij}(s) \quad (24)$$

$$\therefore W^i(s) = (1/s) [P_i(s) + \sum_j F_{ij}(s) P_j(s)$$

$$+ \sum_j \sum_k F_{ij}(s) F_{jk}(s) P_k(s) + \dots]$$

$$- (1/s) [P_i(s) F_i(s)$$

$$+ \sum_j F_{ij}(s) P_j(s) F_j(s)$$

$$+ \sum_j \sum_k F_{ij}(s) F_{jk}(s) P_k(s) F_k(s)$$

$$+ \dots] + \sum_j F_{ij}(s) R_{ij}(s)$$

$$+ \sum_j \sum_k F_{ij}(s) F_{ik}(s) R_{jk}(s) + \dots$$

$$= (1/s) [I - F(s)]^{-1} [I - \bar{F}(s)] P(s)$$

$$+ [I - F(s)]^{-1} R(s), \quad (25)$$

ただし  $R(s)$  は  $\sum_j F_{ij} R_{ij}(s)$  を成分とする列ベクトルである。

### 2.3 利益密度が時刻 $t$ までの累積値に依存する場合

これまでは時刻  $t$  での利益密度は  $p_i(t)$  から直接得られた場合であるが、次にこれが時刻  $t$  までの累積量に依存する場合を考える。すなわち利益密度函数  $p_i(t)$  をこれまでのように定義したとき、時刻  $t$  で実際に利益密度となるのは、 $t_{n+1} > T > t_n$  の場合、

$$w_n^i(t) = \int_0^t [p_i(x) - p_i(x, t_1) + p_j(x, t_1) - p_j(x, t_2) + \dots + p_i(x, t_{n-1}) - p_i(x, t_n) + p_m(x, t_n)] dx, \quad (26)$$

であるような場合である。ここで  $\int_0^t p_i(x, t_k) dx$  がこれまでの  $p_i(t, t_k)$  に対応する。これを  $t$  について  $[0, T]$  で積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^t p_i(x, t_k) dx \\ &= \int_0^T dt \int_0^T p_i(x) u(x-t_k) dx \\ &= \int_{t_k}^T p_i(x) dx \int_x^T dt = \int_{t_k}^T (T-x) p_i(x) dx, \end{aligned} \quad (27)$$

となり、 $(T-t)p_i(t) = s_i(x)$  とおけば、以後は前と全く同様に取扱うことが出来る。

$$W(s) = (1/s)[I - F(s)]^{-1}[I - \bar{F}(s)]S(s), \quad (28)$$

が得られる。 $S(s)$  は  $S_i(s)$  を成分とする列ベクトルで、 $S_i(s)$  は  $s_i(T-x) = xP_i(T-x)$  のラプラス変換であるから、 $S_i(s) = dP_i(s)/ds$  と表わされる。したがって

$$W(s) = (1/s)[I - F(s)]^{-1}[I - \bar{F}(s)](dP(s)/ds) \quad (29)$$

と表わすことも出来る。

#### 2.4 マルコフ過程

遷移確率分布がすべて指数分布で与えられる場合は単純マルコフ過程であり、結果はもっと簡単になる。この場合時刻  $t$  から  $t+dt$  の間に状態  $i$  から  $j$  に移る確率は時間に無関係に  $a_{ij}dt$  で与えられている。これを用いると

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &= a_{ij} \exp(-a_{ij}x) \\ &\times \prod_{k=i, j}^{\infty} a_{ik} \exp(-a_{ik}x) dx \\ &= a_{ij} \exp(-\sum_{k=i}^{\infty} a_{ik}), \quad (30) \\ \therefore F_{ij}(s) &= a_{ij}/(s+a_i), \quad a_i = \sum_{k=i}^{\infty} a_{ik} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} [I - F(s)]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{s+a_0}{s+a_0} & \frac{-a_{01}}{s+a_0} & \cdots & \frac{-a_{0N}}{s+a_0} \\ \frac{-a_{10}}{s+a_1} & \frac{s+a_1}{s+a_1} & \cdots & \frac{-a_{1N}}{s+a_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{N0}}{s+a_N} & \frac{-a_{N1}}{s+a_N} & \cdots & \frac{s+a_N}{s+a_N} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{00} & \Delta_{10} & \cdots & \Delta_{N0} \\ \Delta_{01} & \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{0N} & \Delta_{1N} & \cdots & \Delta_{NN} \end{bmatrix} \quad (31) \end{aligned}$$

である。ただし  $\Delta$  は  $[I - F(s)]$  の行列式、 $\Delta_{ij}$  は  $[I - F(s)]$  の  $(i, j)$  余因子である。対角成分が  $-a_i$ ,

$i \neq j$  について  $(i, j)$  成分が  $a_{ij}$  であるマトリックスを  $A$  と表わし、マトリックス  $[sI - A]$  の  $(i, j)$  余因子を  $\bar{\Delta}_{ij}$  とすると、

$$\begin{aligned} \Delta &= |sI - A| / \prod_{i=0}^N (s+a_i), \\ \Delta_{ij} &= (s+a_i) \bar{\Delta}_{ij} / \prod_{k=0}^N (s+a_k) \end{aligned} \quad (32)$$

と表わされる。また  $[I - \bar{F}(s)]$  は対角成分が

$$1 - \frac{a_i}{s+a_i} = s/(s+a_i)$$

他は0の対角マトリックスになるから、

$$\begin{aligned} [I - F(s)]^{-1}[I - \bar{F}(s)] &= \frac{s}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{00}}{s+a_0} & \frac{\Delta_{10}}{s+a_1} & \cdots & \frac{\Delta_{N0}}{s+a_N} \\ \frac{\Delta_{01}}{s+a_0} & \frac{\Delta_{11}}{s+a_1} & \cdots & \frac{\Delta_{N1}}{s+a_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta_{0N}}{s+a_0} & \frac{\Delta_{1N}}{s+a_1} & \cdots & \frac{\Delta_{NN}}{s+a_N} \end{bmatrix} \\ &= s[sI - A]^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

となり、これより

$$\begin{aligned} W(s) &= (1/s)[I - F(s)]^{-1}[I - \bar{F}(s)]P(s) \\ &= [sI - A]^{-1}P(s) \end{aligned} \quad (34)$$

特に  $p_i(x) = \text{Const} = p_i$  のときは

$$W(s) = (1/s)[I - A]^{-1}P \quad (35)$$

となる。 $P$  は  $p_i$  を成分とする列ベクトルである。

遷移に伴う利益のある場合については

$$\begin{aligned} [I - F(s)]^{-1}R(s) &= [I - F(s)]^{-1}[I - \bar{F}(s)][I - \bar{F}(s)]^{-1}R(s) \\ &= s[sI - A]^{-1}[I - \bar{F}(s)]^{-1}R(s) \end{aligned} \quad (36)$$

とすると、

$[I - \bar{F}(s)]^{-1}$  は  $(s+a_i)/s$  を対角成分とする対角マトリックスであり

$$[I - \bar{F}(s)]^{-1}R(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N a_{0j} R_{0j}(s) \\ \sum_{j=0}^N a_{1j} R_{1j}(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^N a_{Nj} R_{Nj}(s) \end{bmatrix} = \bar{R}(s) \quad (37)$$

とすると

$$W(s) = [sI - A]^{-1}[P(s) + \bar{R}(s)] \quad (38)$$

が得られる。特に  $p_i(t) = \text{Const} = p_i$ ,  $r_{ij}(t) = \text{const} = r_{ij}$  の場合は

$$W(s) = \frac{1}{s}[sI - A]^{-1}[P + \bar{R}] \quad (39)$$

である。この結果はマルコフ過程の場合について上記

の方法とは異なった方法で導かれた結果<sup>1)</sup>と一致する。

2.5 定常状態における各状態の時間的割合

前節までの結果を用いてシステムが定常状態になったとき、特定の状態が占める時間的割合あるいは任意の時点で観察したときに状態  $i$  である確率  $\nu_i$  を求めることができる。利益密度函数を、 $p_i(t)=1$ , 他は0としておく。この場合は(22)式の関係は特定の時間ではなく、一般的な時間について成り立つから、このまま  $T \rightarrow \infty$  とすることができる。定常状態が存在するならば、 $\nu_i$  は初期条件に無関係に一定値に漸近するから、任意の初期状態から出発することができる。そこで  $C_i = [0, 0, \dots, 0, 1^{(i)}, 0, \dots, 0, \dots]$  なる行マトリックスを(22)式の左側から乗じたものを単に  $W_i(s)$  と表わすと

$$W_i(s) = \frac{1}{s} C_i [I - F(s)]^{-1} [I - \bar{F}(s)] P(s) \\ = (1/s^2) C_i [I - F(s)]^{-1} [I - \bar{F}(s)] P \quad (40)$$

ここで  $P$  は  $i$  成分のみが1で他は0の列ベクトルである。ところで  $\nu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} W_i(T)/T$  であるが、 $\nu_i$  は常数であるからこれは

$$\nu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} W_i(T)/T = \lim_{T \rightarrow \infty} dW_i(T)/dT \quad (41)$$

と表わすことが出来る。この関係をラプラス変換した形で表現すると

$$\nu_i = \lim_{s \rightarrow 0} sL\{W_i(T)/T\} = \lim_{s \rightarrow 0} sL\{dW_i(T)/dT\} \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W_i(s) \quad (42)$$

となり、(40)式を用いて

$$\nu_i = \lim_{s \rightarrow 0} C_i [I - F(s)]^{-1} [I - \bar{F}(s)] P \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta_{ii}}{|I - F(s)|} (1 - F_i(s)) \quad (43)$$

である。ここで  $\Delta_{ii}$  は  $[I - F(s)]$  の (ii) 余因子である。この結果はシステムのアベイラビリティを求めるさいに用いることができる。

2.6 特定状態に入るまでの平均時間

状態  $i$  から出発した後、最初に特定の状態に入るまでの平均時間は状態  $k$  を吸収状態 ( $f_{kj}(x)=0$ ) とし、さらに

$$p_j(x) = 1 - \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq k \text{ (クロネッカー)} \\ 1, & j = k \text{ (のデルタ)} \end{cases}$$

として得られる利益について  $T \rightarrow \infty$  とすること、すなわち  $\lim_{s \rightarrow 0} sW^i(s)$  をとることによって得られる。これはシステムの MTTF (Mean Time to First Failure) などを求めるさいに用いることができる。

2.7 与えられた時点  $t$  で特定の状態にある確率

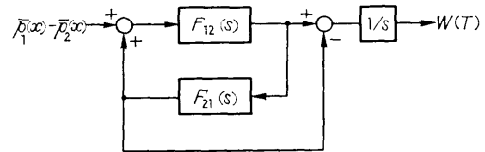
状態  $i$  から出発して与えられた時点  $t$  において状態  $k$  である確率を  $b_{ik}^i(t)$  とし、ラプラス変換形を  $B_{ik}^i(s)$ 、これを  $i$  成分とする列ベクトルを  $B_k(s)$  とすると、

$$\sum_j b_j^i(t) p_j(t) = dW^i(t)/dt$$

であるから、 $p_j(t) = \delta_{jk}$  とおき  $sW(s)$  を求めることによって  $B_k(s)$  を得ることができる。

2.8 アナログ手法によるシミュレーション

システム利益を計算によって求めることは一般に困難な場合が多いし、またたとえ計算出来たとしても、最適値を求めるため各種のパラメータを変えて計算を繰り返すことは非常に時間と労力を要する仕事である。そのためもっと簡単にシステム利益を求め得る一方法としてアナログ手法を用いたシミュレーションの方法が考えられる。簡単のため状態数が2個の場合の(12)式を例にとる。この式の右辺第1項は簡単な積分で解が得られるから、問題となるのは第2項である。ところでこの項は比較的簡単な Feed-Back 回路の応答函数と類似のものであるから、第2図のような回路



第2図 シミュレーション・ブロックダイアグラム

を組み、時間範囲  $0 \sim T$  で  $p_1(x) - p_2(x)$  を入力として与えるなら時刻  $T$  における出力が求めるシステム利益である。これについては第3章で例を示す。

3. システム設計への応用

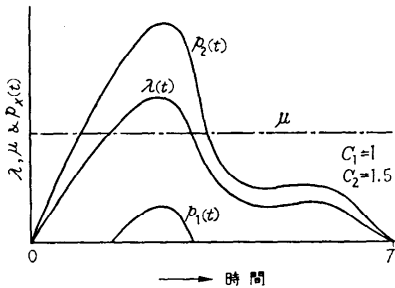
前章で得た結果を実時間処理システムのシステム設計に応用する。

一般に実時間処理システムへの入力密度は時間と共に大きな変動を示し、これがシステムの規模を大きくする一つの原因でもある。ところでこの入力密度の分布は既知の場合が多い。また特殊な場合を除けば稼働時間も限定されていて、一定時間ごとの定期的チェックが可能である。システム設計においてはこのような点を十分考慮して、よりきめの細かい設計をするように努力すべきであろう。たとえば信頼性要求に関して、入力密度と無関係にこれを決定することは得策ではない。システムが故障したときの影響は明らかに入力密度に依存するからである。

本章ではシステムの平均処理能力（単位時間あたり処理件数）、信頼性（故障間時間分布）および保守性（修理時間分布）を含めて総合的にシステムの評価を行うために前章の結果を用いる。

以下ではシステム利益が即時処理されなかった入力呼の数に比例する場合を扱っている。これはシステムにとっては損失であるが、便宜上負の利益と考えて利益という表現をそのまま用いている。

この利益が生ずる場合が二つあり、(1) は入力密度がシステムの処理能力を越えてしまった場合、(2) はシステムが故障した場合である。これらは多少性質が異なるので、それぞれに重み  $C_1, C_2$  をつけて扱う。このような場合の利益密度函数を第3図に示す。  $\lambda(t)$  は入力密度函数、  $\mu$  は平均処理能力である。



第3図  $\lambda(t), \mu$  と利益密度函数数の関係(例)

システムが動作中の状態を1、故障修理中の状態を2とし、この二つの状態のみを考えると、利益密度函数は近似的に  $p_1(t) = C_1 \max(\lambda(t) - \mu, 0)^*$ 、 $p_2(t) = C_2 \lambda(t)$  である。

本章では以下処理システムの例として、(1) 単一システム、(2) 並列冗長システム、(3) 中央制御装置の制御のもとでの  $n$  重の多重処理システムの各場合を述べる。

3.1 単一システムの場合

状態1をシステム動作中、2を修理中とする。状態1から出発するものとする、すでに求めたように

$$W^1(s) = (1/s)P_1(s) - (1/s)[P_1(s) - P_2(s)]F_{12}(s)[1 - F_{21}(s)] / [1 - F_{12}(s)F_{21}(s)] \quad (12)$$

である。一般にシステム故障は偶発故障のみであると

\* 入力発生も確率的なものであるから、より厳密を期するためには待合わせ問題を解いてオーバーフローを時間の函数として求め、これを  $p_1(t)$  に用いる必要がある。

すれば

$$f_{12}(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad F_{12}(s) = \alpha / (s + \alpha), \quad 1/\alpha; \text{ MTBF} \quad (44)$$

である。修理時間分布  $f_{21}(x)$  の例として指数分布の場合および修理時間一定の場合を考えると、次のようになる。

(1) 指数分布の場合、 $F_{21}(s) = \beta / (s + \beta), 1/\beta$ ; 平均修理時間

$$W^1(s) = (1/s)P_1(s) - [P_1(s) - P_2(s)]\alpha / s(s + \alpha + \beta) \quad (45)$$

(2) 修理時間一定の場合、 $F_{21}(s) = e^{-\tau s}, \tau$ ; 修理時間

$$W^1(s) = (1/s)P_1(s) - [P_1(s) - P_2(s)]\alpha(1 - e^{-\tau s}) / s[s + \alpha(1 - e^{-\tau s})] \quad (46)$$

例1. 前記(1)の場合に次のような3種の入力密度函数を与えてみる。

(1)  $\lambda(t) = \text{const} = A, \bar{\lambda}(x) = A, \lambda(s) = A/s$

(2)  $\lambda(t) = 2A(T-t)/T, \bar{\lambda}(x) = 2Ax/T, \lambda(s) = 2A/Ts^2$

(3)  $\lambda(t) = 2At/T, \bar{\lambda}(x) = 2A(T-x)/T, \lambda(s) = 2A/s - 2A/Ts^2 \quad (47)$

ただし  $\bar{\lambda}(x) = \lambda(T-x), \lambda(s)$  は  $\bar{\lambda}(x)$  のラプラス変換である。

これらはもちろん実際に生じ得るような性質のものではないが、入力密度函数が異なるとシステム利益も変化することを示す最も簡単な例として用いたものである。上記3種とも、 $[0, T]$  内の総入力量は  $AT$  である。

仮りに  $\mu > 2A$  とすると  $P_1(s) = 0$  となり

$$W^1(s) = (1/s)P_2(s)\alpha / (s + \alpha + \beta) = \alpha\lambda(s) / s(s + \alpha + \beta) \quad (48)$$

である。上記3種の場合に対応して、

(1)  $W^1(T) = C_2[\alpha A / (\alpha + \beta)^2][(\alpha + \beta)T - 1 + \exp\{- (\alpha + \beta)T\}]$

(2)  $W^1(T) = C_2[2\alpha A / T(\alpha + \beta)^3][(\alpha + \beta)^2 T^2 / 2 - (\alpha + \beta)T + 1 - \exp\{- (\alpha + \beta)T\}]$

(3)  $W^1(T) = C_2[2\alpha A / T(\alpha + \beta)^3] \times [ -(\alpha + \beta)^2 T^2 / 2 + \{(\alpha + \beta)T + 1\}(\alpha + \beta)T - 1 + \exp\{- (\alpha + \beta)T\}] \quad (49)$

が得られる。

$T = 8hr, 1/\alpha = 51.2hr$  とした時の  $W^1(T)/C_2AT$  の値を、 $\beta$  をパラメータとして求めると第4図(a)のよ





$$W(s) = \begin{bmatrix} 1, & \frac{-2\alpha}{s+2\alpha}, & 0 \\ -G(s+\alpha), & 1, & -\frac{\alpha}{s+\alpha}[1-G(s+\alpha)] \\ 0, & -\frac{\alpha}{s-\alpha} \frac{G(\alpha)-G(s)}{1-G(\alpha)}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s+2\alpha}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{s}{s+\alpha}[1-G(s+\alpha)], & 0 \\ 0, & 0, & 1 - \frac{\alpha}{s-\alpha} \frac{G(\alpha)-G(s)}{1-G(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ p_2(s) \end{bmatrix} \quad (51)$$

である。

なほ定常状態で各状態の占める時間的割合  $\nu_i$  および状態 0 より出発した時の MTTFF がそれぞれ

$$\begin{aligned} \nu_0 &= G(\alpha)/[2m\alpha + G(\alpha)], & m &= -G'(0); \\ & & & \text{平均修理時間} \\ \nu_1 &= 2[1-G(\alpha)]/[2m\alpha + G(\alpha)], \\ \nu_2 &= 2[m\alpha + G(\alpha) - 1]/[2m\alpha + G(\alpha)], & (52) \\ \text{MTTFF} &= (3/2\alpha)[1 - (2/3)G(\alpha)]/[1 - G(\alpha)] & (53) \end{aligned}$$

と得られる。MTTFF の値は文献 (5) のものと一致する。

### (2) 修理者 2 人の場合

この場合、修理時間分布が一般の分布をとるとシステムの状態の数は無限個になってしまって厳密解を得ることは非常に困難になる。たとえば第 5 図において a および c 点の状態はもはや同じものではない。同じ片システム修理中の状態でも a, b の場合と c, d (あるいは c, c' および d, d') の場合とは異なった分布にしたがう。そして両システム共動作中の状態に戻るまですべての状態が、以前に両システム動作中であった時点以後の過去の履歴の影響を受けるため異なった分布になり、このような状態が無限に存在する。そのため比較的近い過去の影響のみを考慮して近似化する必要がある。普通は故障確率は小さいから、近似的方法によって良い結果が得られることが期待できる。具体的には両システムが動作中の状態に戻らず、交互に故障する場合のサイクル数を有限回にとどめてしまうことである。たとえば第 5 図で d, d' では B システムは故障しないものとして扱おう。これによって状態数を有限個に限定すれば以後は前述のようにシステム利益を得ることができる。しかしこれはあくまで近似的方法であるから、この種の問題にはさらに研究が必要である。

同じ 2 台のシステムを用いる場合としてこの他に待機システムがあるが、これも全く同様な方法によって取扱うことができ、さらにシステム間の切換時間その他の特質を考慮して並列冗長システムと待機式システムの定量的な比較を行なうことができる。

### 3.3 多重処理システム

本節では  $n$  台のまったく同一の処理装置 (E.P.) が、1 台の中央制御装置 (C.P.) の制御のもとで処理をおこなっている場合を考える。個々の E.P. の処理能力は  $\mu$  であり、C.P. および  $n$  台中  $m$  台の E.P. が動作している場合には、システム全体として  $m\mu$  の能力があり、E.P. のすべて、または C.P. が故障の時は処理能力は 0 となる。以後 C.P. に関する量には Subscript  $c$  を、E.P. に関する量には  $p$  を付して区別する。

故障間時間分布は

$$f_c(x) = \alpha_c e^{-\alpha_c x}, \quad f_p(x) = \alpha_p e^{-\alpha_p x}$$

とし、修理時間分布は

$$g_c(x) = \delta(x - \tau), \quad g_p(x) = \beta e^{-\beta x}$$

と仮定する。

次にシステムの状態は C.P. の動作中または修理中に応じて 1 または 0 とし、 $m$  台の E.P. が動作中の場合を  $m$  と表わして、この両方の組み合わせにより 2 桁数字  $(0, m)$  等と表示された  $2n+2$  個の状態が存在する。

状態の遷移に関しては、処理能力が 0 となるような状態  $(0, X)$  および  $(1, 0)$  の時は電源断とされ、新たな故障は生じないものとし、また同時に 2 つの遷移は生じないものとする。こうすると、一般に  $(1, m)$  からの遷移は  $(0, m)$ ,  $(1, m-1)$ ,  $(1, m+1)$  の 3 種、 $(0, m)$  からの遷移は  $(1, m)$ ,  $(0, m+1)$  の 2 種のみである。特に  $(1, n)$  からの遷移は  $(1, n-1)$ , および  $(0, n)$  のみ、 $(0, n)$  からは  $(1, n)$  のみ、 $(1, 0)$  からは  $(1, 1)$  のみで、状態  $(0, 0)$  は初期状態以外には存在しない。

C.P. および各 E.P. はそれぞれ独立に状態遷移を行なうから、状態  $(1, m)$  からの遷移は、(1) C.P. が故障する。(一般に故障間時間分布を  $f(x)$  と表わしておく。)(2) 動作中の  $m$  台の E.P. のうちの一が故障する (遷移間時間分布は  $m\alpha e^{-m\alpha x}$ )。 (3) 修理中の  $n-m$  台の E.P. のうち一が修理を終る ( $(n-m)\beta e^{-(n-m)\beta x}$ ) の 3 種の事象のうちどれが最初に生ずるかによってすでに述べた 3 種の遷移が生じ、その遷移

間時間分布は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 f_{1m; 0m}(x) &= f(x) \left[ \int_x^\infty m\alpha e^{-m\alpha z} dz \right] \\
 &\quad \times \left[ \int_x^\infty (n-m)\beta e^{-(n-m)\beta z} dz \right] \\
 &= f(x) \exp[-\{m\alpha + (n-m)\beta\}x], \\
 f_{1m; 1m+1}(x) &= m\alpha e^{-m\alpha x} \left[ \int_x^\infty f(z) dz \right] \\
 &\quad \times \left[ \int_x^\infty (n-m)\beta e^{-(n-m)\beta z} dz \right] \\
 &= m\alpha \exp[-\{m\alpha + (n-m)\beta\}x] \\
 &\quad \times \int_x^\infty f(z) dz, \\
 f_{1m; 1m+1}(x) &= (n-m)\beta e^{-(n-m)\beta x} \\
 &\quad \times \left[ \int_x^\infty f(z) dz \right] \left[ \int_x^\infty m\alpha e^{-m\alpha z} dz \right] \\
 &= (n-m)\beta \exp[-\{m\alpha \\
 &\quad + (n-m)\beta\}x] \\
 &\quad \times \int_x^\infty f(z) dz. \quad (54)
 \end{aligned}$$

状態  $(0, m)$  からの遷移は, (1) C.P. の修理が終る (修理時間分布を一般に  $g(x)$  としておく.) (2) 修理中の  $n-m$  台の E.P. のうち 1 台の修理が終るといふ 2 種の事象によって生じ,

$$\begin{aligned}
 f_{0m; 1m}(x) &= g(x) \exp[-(n-m)\beta x] \\
 f_{0m; 0m+1}(x) &= (n-m)\beta e^{-(n-m)\beta x} \int_x^\infty g(z) dz \quad (55)
 \end{aligned}$$

となる。  $m\alpha + (n-m)\beta = k_m$  とおくとこのラプラス変換形は

$$\begin{aligned}
 F_{1m; 0m}(s) &= \int_0^\infty f(x) e^{-sx} e^{-k_m x} dx = F(s+k_m) \\
 F_{1m; 1m-1}(s) &= \int_0^\infty m\alpha e^{-sx} e^{-k_m x} dx \\
 &\quad \times \int_x^\infty f(z) dx = \int_0^\infty f(z) dz \\
 &\quad \times \int_0^z m\alpha e^{-(s+k_m)x} dx \\
 &= [m\alpha / (s+k_m)] [1-F(s+k_m)] \\
 F_{1m; 1m+1}(s) &= [(n-m)\beta / (s+k_m)] \\
 &\quad \times [1-F(s+k_m)] \\
 F_{0m; 1m}(s) &= G(s+n-m\beta) \\
 F_{0m; 0m+1}(s) &= [(n-m)\beta / (s+n-m\beta)] \\
 &\quad \times [1-G(s+n-m\beta)] \quad (56)
 \end{aligned}$$

である。ここで  $F(s)$ ,  $G(s)$  はそれぞれ  $f(x)$ ,  $g(x)$  のラプラス変換であり一般の分布の場合を表わしている。前述のように

$$f(x) = f_c(x) = \alpha c e^{-\alpha c x} \quad g(x) = g_c(x) = \delta(x - \tau)$$

とすれば,

$$F(s) = \frac{\alpha c}{s + \alpha c}, \quad G(s) = e^{-\tau s}$$

であるから, これを (56) 式に代入すれば良い。

対角マトリックス  $\bar{F}(s)$  の各成分は

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{1m}(s) &= F_{1m; 0m}(s) + F_{1m; 1m}(s) \\
 &\quad + F_{1m; 1m-1}(s) \\
 &= \frac{s}{s+k_m} F(s+k_m) + \frac{k_m}{s+k_m} \\
 \bar{F}_{0m}(s) &= F_{0m; 1m}(s) + F_{0m; 0m+1}(s) \\
 &= \frac{s}{s+n-m\beta} G(s+n-m\beta) + \frac{(n-m)\beta}{s+n-m\beta} \quad (58)
 \end{aligned}$$

であり, 各状態に対応する利益密度関数は

$$p_{1m}(t) = c \max(\lambda(t) - m\mu, 0), \quad p_{0m}(t) = c\lambda(t) \quad (59)$$

である。ただし  $c_1 = c_2 = c$  としている。

故障の生じた場合の修理費を考慮する場合には, これを遷移に伴う負の利益と考えると扱わることができ。C.P. の修理費を  $r_c$ , E.P. のものを  $r_p$  とすると,

$$r_{1m; 0m}(t) = r_c, \quad r_{1m; 1m-1}(t) = r_p \quad (60)$$

として  $R$  ベクトルを作ることができる。

## むすび

時間とともに変化する利益を伴う。一般的な確率過程モデルによってシステムの評価を試みた。利益を伴う確率過程については, 単純マルコフ過程で, 利益密度が常に一定の場合にはすでに求められている。本稿はこれを従来とは別の方法で導き, それによって一般的な確率過程でかつ利益密度が時間とともに変化する場合に拡張することが可能となった。単純マルコフ過程によって記述し得ないシステムも多いので, この拡張は不可欠のものである。他方本稿で導いた方法によってもまだ記述し得ない場合も多い。たとえば利益密度関数も確率過程と考えられる二重の確率過程の場合や, 遷移間時間分布が時刻  $t$  までの利益によって影響される場合などである。これらについても今後さらに研究されねばならないだろう。

最後にいろいろ御指導いただいた東京大学穂坂衛教授に深く感謝の意を表する次第である。

## Appendix A $W^1(t)$ の誘導

本文 (2) 式

において  $w_k(t)$  に本文 (1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
 w^1(t) = & p_1(t) \left[ \int_0^T f_1(T_1) dT_1 + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \right. \\
 & \times \int_{T-t_1}^{\infty} f_2(T_2) dT_2 \\
 & + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) dT_2 \\
 & \times \left. \int_{T-t_2}^{\infty} f_3(T_3) dT_3 + \dots \right] \\
 & - \int_0^T f_1(T_1) \{ p_1(t, t_1) - p_2(t, t_1) \} dT_1 \\
 & \times \left[ \int_{T-t_1}^{\infty} f_2(T_2) dT_2 + \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) dT_2 \right. \\
 & \times \left. \int_{T-t_2}^{\infty} f_3(T_3) dT_3 + \dots \right] \\
 & + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \\
 & \times \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) \{ p_1(t, t_2) - p_2(t, t_2) \} dT_2 \\
 & \times \left[ \int_{T-t_2}^{\infty} f_3(T_3) dT_3 + \int_0^{T-t_2} f_3(T_3) dT_3 \right. \\
 & \times \left. \int_{T-t_3}^{\infty} f_4(T_4) dT_4 + \dots \right] - \dots
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

となる。この式の右辺各項の [ ] 内は  $\sum_{j=1}^{\infty} T_j$  が 0 より  $\infty$  までの間にある確率に等しく、すべて 1 である。したがって

$$\begin{aligned}
 w^1(t) = & p_1(t) - \int_0^T f_1(T_1) \{ p_1(t, t_1) - p_2(t, t_1) \} dT_1 \\
 & + \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \\
 & \times \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) \{ p_1(t, t_2) - p_2(t, t_2) \} dT_2 \\
 & + \dots + (-1)^n \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \\
 & \times \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) dT_2 \int_0^{T-t_2} \dots \\
 & \times \int_0^{T-t_{n-1}} f_n(T_n) \{ p_1(t, t_n) - p_2(t, t_n) \} dT_n \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

が得られる。 $W^1(T)$  はこの積分であるが、本文 (4) 式より  $W^1(T)$  の右辺一般項は

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) dT_2 \\
 \times \int_0^{T-t_2} \dots \int_0^{T-t_{n-1}} f_n(T_n) dT_n
 \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{T-t_n} [\bar{p}_1(x) - \bar{p}_2(x)] dx \tag{A-3}$$

である。他方 (5) 式の合成函数  $h_{X_n}(t)$  を  $[0, T]$  で積分すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^T h_{X_n}(t) dt = & \int_0^T dt \int_0^t f_1(T_1) h_{X_{n-1}}(t-T_1) dT_1 \\
 = & \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_{T_1}^T h_{X_{n-1}}(t-T_1) dt \\
 = & \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-T_1} h_{X_{n-1}}(t) dt \\
 = & \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} dt \\
 & \times \int_0^t f_2(T_2) h_{X_{n-2}}(t-T_2) dT_2 \\
 = & \dots \\
 = & \int_0^T f_1(T_1) dT_1 \int_0^{T-t_1} f_2(T_2) dT_2 \\
 & \times \int_0^{T-t_2} f_3(T_3) dT_3 \int_0^{T-t_3} \dots \\
 & \times \int_0^{T-t_n} \bar{p}_X(x) dx \tag{A-4}
 \end{aligned}$$

ただし  $t_n = \sum_{i=1}^n T_i$

となるが、これは (A-3) 式と同じものであるから、

$$\begin{aligned}
 W^1(T) = & \int_0^T p_1(t) dt + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \\
 & \times \int_0^T [h_{1i}(t) - h_{2i}(t)] dt \tag{A-5}
 \end{aligned}$$

が得られる。

参考文献

- 1) R.A. Howard: Dynamic Programming and Markov Processes, Technology Press & Wiley, 1960.
  - 2) G.H. Sandler: System Reliability Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1963.
  - 3) 信頼性管理便覧 (信頼性管理便覧編集委員会編), 日刊工業新聞社
  - 4) 藤木正也, 大野清次郎: システム, 電気通信学会雑誌, 第 47 巻, 第 11 号 (信頼性特集号) pp. 5.
  - 5) D.P. Gaver: Time to Failure and Availability of Parallel System with Repair, IEEE Trans. R-12, 2
  - 6) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley and Sons, Inc.
- (昭和 40 年 2 月 12 日受付, 同 7 月 10 日再受付)