放物型問題の解の検証における計算上の注意

木村拓馬 [1,2]　木下 武彦 [3]　中尾 充宏 [4]

1. はじめに

次の非線形放物型初期値境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u = f(x,t,u,\nabla u), & \text{in } \Omega \times J, \quad (1a)\\ u(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times J, (1b)\\ u(x,0) = 0, & \text{in } \Omega, \quad (1c)\end{cases}$$

ν は正定数，$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d = 1, 2, 3)$ は有界多角形 (多面体) 領域，$J := (0,T) \subset \mathbb{R}$, $(T < \infty)$ は有界領域とする．

本稿では，(1)　の解の存在性に関する検証を数値的に行う際の関数空間と作用素の設定，検証手順を紹介する．講演時に具体例を示し，また計算時の注意点について述べる．

2. 関数空間と作用素の設定

境界条件を考慮した関数空間を，

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$
$$V^1(J) := \{u \in H^1(J);\ u(0) = 0\},$$

とする．頁数の都合により，

$$L^2L^2 := L^2(J; L^2(\Omega)), \quad L^2H_0^1 := L^2(J; H_0^1(\Omega)),$$
$$V^1L^2 := V^1(J; L^2(\Omega)), \quad V := V^1L^2 \cap L^2H_0^1,$$

のように略記する．

$S_h(\Omega)$ を $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間とし，$S_h(\Omega)$ の基底を $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ とする．$V_k^1(J)$ を $V^1(J)$ の有限次元部分空間とし，$V_k^1(J)$ の基底を $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ とする．ここに，h と k はそれぞれ Ω 方向，J 方向の離散化のパラメータを意味する（例えば有限要素法を用いた場合はメッシュサイズ）．$S_h^k \equiv S_h(\Omega) \otimes V_k^1(J)$ とする．

$\Delta_t^\nu := \frac{\partial}{\partial t} - \nu\triangle$ と略記する．Laplace 作用素 $\triangle : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ について $D(\triangle) := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \triangle u \in L^2(\Omega)\right\}$ とする．

H_0^1-projection $P_h^1 : H_0^1(\Omega) \to S_h(\Omega)$ を以下で定義する．

$$\left(\nabla(u - P_h^1 u), \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad {}^\forall v_h \in S_h(\Omega).$$

Ω 方向の離散作用素 $P_h : V \to V^1 S_h$ を

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial t}(u - P_h u), v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \nu\left(\nabla(u - P_h u), \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)^d} = 0,$$
$$ {}^\forall v_h \in S_h(\Omega), \text{ a.e. } t \in J,$$

J 方向の補間作用素 $\Pi_k : V^1 S_h \to S_h^k$ を

$$u(x,t_i) = \Pi_k u(x,t_i), {}^\forall x \in \Omega, {}^\forall i \in \{0, 1, \cdots, m\},$$

で定義し，全離散近似に対応する作用素 $P_h^k : V \to S_h^k$ を $P_h^k u := \Pi_k(P_h u)$ と定める．

3. 検証の手順

$u_h^k \in V \cap L^2 D(\Delta)$ を (1)　の近似解，$w = u - u_h^k$ とする．

$$\begin{cases} \Delta_t^\nu w - f'(u_h^k) w = g(w), & \text{in } \Omega \times J, \quad (2a)\\ w(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times J, \ (2b)\\ w(x,0) = 0, & \text{in } \Omega, \quad (2c)\end{cases}$$

は (1)　と同値な残差方程式である．ここで，$g(w) = f\big(x,t,w + u_h^k, \nabla(w + u_h^k)\big) - \Delta_t^\nu u_h^k - f'(u_h^k)w$, $f'(u_h^k)$ は f の u_h^k における Fréchet 微分である．左辺の微分作用素を $\mathcal{L}_t := \Delta_t^\nu - f'(u_h^k)$ と定義し，$\mathcal{L}_t$ が可逆のとき $F(w) = \mathcal{L}_t^{-1} g(w)$ とおけば，(2)　は，

$$w = F(w), \qquad (3)$$

なる不動点形式に変形できる．$\mathcal{L}_t^{-1} : L^2L^2 \to L^2H_0^1$ はコンパクトであるため，g に対する適当な仮定の下で Schauder の不動点定理を用いて w の存在を示すことが出来る．即ち，適当な集合 W について $F(W) \subset W$ がいえるとき，W に (3)　の不動点 w が存在する．このとき (1)　の解 $u = w + u_h^k$ の存在がいえる．

$\mathcal{L}_t$ の可逆性と $F(W) \subset W$ なる包含関係は，P_h^1 及び P_h^k に関する誤差評価の応用により計算機上で確認できる [1], [2], [3]．但し，ここに紹介する手順を計算機上で行うには，丸めモードの制御や機械区間演算を利用するなどして，数値の丸め誤差の厳密評価を伴う線形計算を行う必要がある [4], [5]．

参考文献

[1] T. Kinoshita, T. Kimura and M.T. Nakao: A posteriori estimates of inverse operators for initial value problems in linear ordinary differential equations, *J. Comp. Appl. Math*, 236, 1622-1636(2011).

[2] M.T. Nakao, T. Kinoshita and T. Kimura: On a posteriori estimates of inverse operators for linear parabolic initial boundary value problems, *Computing*, 94, 151-162(2012).

[3] M.T. Nakao, T. Kimura and T. Kinoshita: Constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, submitted for publication (available as RIMS Preprint RIMS-1745).

[4] 中尾充宏，渡部善隆：実例で学ぶ精度保証付き計算—理論と実装—，サイエンス社 (2011).

[5] 大石進一：精度保証付き数値計算，コロナ社 (2000).

[1] 早稲田大学 理工学術院　tkimura@aoni.waseda.jp
[2] JST CREST
[3] 京都大学 数理解析研究所　kinosita@kurims.kyoto-u.ac.jp
[4] 佐世保工業高等専門学校　mtnakao@post.cc.sasebo.ac.jp