2変数函数を積の形で近似することについて*

一 松 信**

0. 問題のおこり

偏微分方程式の境界値問題において，とくに次元の高い場合や刻みの細かい場合には，普通の差分近似法では膨大な計算量を要する．それを補う手段の一つとして，解の函数形を適当に仮定して近似解を求めることが考えられる．その一つに，文献にはみかけないが，**「交互近似法」**とでもよぶべき方法が，一部の人々によって使われている[1]．

2変数の場合でのべると，解 $u(x, y)$ を，1変数の函数の積の形 $f(x)\cdot g(y)$ と仮定し，まず $g_0(y)$ と $y=y_0$ を適当に定めて，問題を $f(x)$ の微分方程式に直してとく．次にその解 $f_1(x)$ と $x=x_0$ を適当に定めて $g(y)$ についてとき，その解 $g_1(y)$ を使って $f_2(x)$ を求め，順次交互にくりかえす．

解を積の形と仮定することは，変数分離法として慣用の手法だが，上記のはいささか苦しまぎれで，少々無茶な方法に見える．しかしまず方形

$$\{-a\leqq x\leqq a,\ -b\leqq y\leqq b\} \qquad (1)$$

における **Poisson の方程式**

$$\Delta u=-1,\ \text{境界値}=0\ (\text{全境界で}) \qquad (2)$$

に適用して，よい結果がえられ，その後多くの境界値問題（必らずしも方形に限らない）に応用して，収束は早く，結果もかなりよく，少なくとも解の大勢をみたり，緩和法でさらに精度を上げるための出発値にするには，十分に使えるものがえられたと伝えられている．

筆者は Brookhaven 国立研究所（New York 州）に留学中，この方法の数学的基礎づけを依頼された．この小論は，中間報告であるが，一般に2変数の函数 $u(x, y)$ を積の形 $f(x)\cdot g(y)$ で**最小二乗近似**することを考察する．少なくとも当初の問題（2）については，良好な解がえられた理由が説明できそうである．

最小二乗近似は幸い，Hilbert 空間の理論の応用で簡単にできたが，この場合の最良近似（ミニマックス近似）については，解の存在も明確でない．しかしこの種の問題が，多変数函数の最良近似の問題に，何かのてがかりを与えてくれそうな期待もある．

1. 問題の設定

領域（1）において，2乗可積分の実数値函数 $u(x, y)$ が与えられたとする．u は連続でなくてもよい．領域 D が方形でなくても，有界ならば，十分大きな方形（1）で被って，D 外は $u=0$ とおけばこの場合に帰着される．さて $-a\leqq x\leqq a$, $-b\leqq y\leqq b$ で2乗可積分の実数値函数 $f(x)$, $g(y)$ を定め，差の2乗ノルム

$$J(f, g)=\int_{y=-b}^{b}\int_{x=-a}^{a}[u(x, y)-f(x)\cdot g(y)]^2dxdy \qquad (3)$$

を最小にすることを問題とする．

とくに $a=b$, u が対称（$u(x, y)=u(y, x)$）のときには，$g(x)=cf(x)$（c は定数）とした場合も問題になる．これを**対称の場合**とよぶことにする．u が正で $c>0$ としてよい場合には，$c=1$ としてよい．c をつけたのは $u<0$ の場合にも f の値を実数にするためだが，この目的には $c=\pm1$ と限定して一般性を失わない．

以下の議論を円滑にするため，次の記号を，導入する*: 区間 $-a\leqq x\leqq a$, $-b\leqq y\leqq b$ および方形（1）において2乗可積分の函数全体のなす Hilbert 空間をそれぞれ H_X, H_Y, H_Ω と書く．ノルムは $\|\ \|$ で示すが，区別する必要があれば添え字 X, Y, Ω をつける．$u(x, y)$ による積分変換を次のようにおく．

$$\left.\begin{aligned} f(x)\to\tilde{f}(y)&=U_1f=\int_{-a}^{a}u(x, y)f(x)dx,\\ g(y)\to\tilde{g}(x)&=U_2g=\int_{-b}^{b}u(x, y)g(y)dy,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$U_1:\ X_X\to X_Y,\ U_2:\ H_Y\to H_X.$$

これらを反復したものを

$$\left.\begin{aligned} V_X&=U_2\circ U_1\ :\ H_X\to H_X\\ V_Y&=U_1\circ U_2\ :\ H_Y\to H_Y\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

* On the Approximation of a Function of Two Variables by the Product, by Sin Hitotumatu (Dept. of Math., St. Paul's Univ.)

** 立教大学理学部数学教室

* ここから次節の存在証明までは，純粋数学的な問題であり，位相解析に習熟していない方は，読みとばしてさしつかえない．

とおく．これらがすべて完全連続（コンパクト）な演算子であることを注意しておく．とくに対称の場合には $U_1=U_2$ は $H_X \to H_X$ の対称な演算子になる．

2. 最小2乗近似の存在と特長づけ

最小2乗近似の**存在**は，次のように簡単に証明できる．(3) で f, g は積だけが問題だから

$$J(f, g)=J(cf, g/c) \quad (c \neq 0,\ 定数) \tag{6}$$

であり，適当に定数をかければ，f, g を H_X, H_Y 中のある有界な集合に限定しても一般性を失わない．その有界集合の閉包に弱位相を導入したもの B_X, B_Y はコンパクトな位相空間である．(3) を展開すると

$$J(f, g)=\|u\|^2_\Omega-2(U_1 f, g)+\|f\|_X{}^2\|g\|_Y{}^2 \tag{7}$$

であるが，$\|f\|_X$, $\|g\|_Y$ は B_X, B_Y 上で下半連続（弱位相にしたため，連続とは限らない）であり，U_1 が完全連続なので，$(U_1 f, g)$ は連続である．ゆえに $J(f, g)$ はコンパクトな $B_X \times B_Y$ 上の下半連続な実数値函数だから，必ずどこかで最小値をとる[2]．

最小値をとる函数をあらためて f, g とおく．$\xi \in H_X$, $\eta \in H_Y$ を定めて，$f \to f+\varepsilon\xi$, $g \to g+\varepsilon\eta$ という変分を与えられたときの第1変分は

$$\lim_{\varepsilon \to 0}[J(f+\varepsilon\xi, g+\varepsilon\eta)-J(f, g)]/\varepsilon$$
$$=-2[(\xi, U_2 g)+(U_1 f, \eta)-(\xi, f)\|g\|_Y{}^2-(\eta, g)\|f\|_X{}^2]$$

である．f, g が最小値を与えるならば，これは0であり，ξ, η は任意だから，けっきょく

$$\|g\|^2{}_Y f=U_2 g,\quad \|f\|_X{}^2 g=U_1 f \tag{8}$$

でなければならない．$\|f\|_X{}^2=\alpha$, $\|g\|_Y{}^2=\beta$ とおく．(8) の第1式にさらに U_1 をほどこすと

$$V_Y g=U_1(U_2 g)=U_1(\beta f)=\alpha\beta \cdot g$$

となり，同様にして

$$V_X f=\alpha\beta \cdot f$$

をうる．したがって f, g はそれぞれ V_X, X_Y に対し，$\lambda=\alpha\beta$ に属する**固有函数**である．

(8) を (7) に代入すると，このときの残差は

$$J(f, g)=\|u\|_\Omega{}^2-\alpha\beta=\|u\|_\Omega{}^2-\lambda$$

となる．$\|u\|_\Omega{}^2$ は定数だから，λ は最大でなければならない．u が（測度0の集合を除いて）0でなければ，V_X, V_Y は必らず0でない固有値をもち，0以外はすべて正で，双方に共通であり，無限にあれば0に収束する[3]．したがって次のことがわかった．

定理 1　$u(x, y)$ に対する最小2乗近似を与える函数 $f(x)$, $g(y)$ は，V_X, V_Y の最大の（共通の正の）**固有値** λ に属する固有函数で，$\|f\|_X{}^2 \cdot \|g\|_Y{}^2=\lambda$ をみたすものである．

系 1.　最小2乗近似が一意的であるための必要十分条件は，V_X, V_Y の最大の固有値 λ が単一なことである．

系 2.　最小2乗近似が正確（$u(x, y)$ が完全に積の形）であるための必要十分条件は，V_X, V_Y の固有値が0以外にただ1個（重複度も考えて）のことである．

関係式 (5) から，定数因数の自由度があるが，もし $\|f\|_X=\|g\|_Y$ ととれば，これは $\lambda^{1/4}$ に等しい．

定理 2.　対称の場合 $(c=\pm 1)$ には，最小2乗近似を与える函数 f は，$U_1(=U_2)$ の絶対値が最大な固有値 λ に属する固有函数で $\|f\|^2=|\lambda|$ をみたすものであり，c は λ と同符号である．

証明　上とまったく同様にできるが，次のようにしてもよい．U_1 は完全連続なので，その固有函数の正規直交系 $\{\xi_i(x)\}$ を座標にとることができる．固有値を絶対値の大きいほうから並べて $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ とすれば，2乗平均収束の意味で

$$u(x, y)=\sum \lambda_i \xi_i(x)\xi_i(y)$$

である．$f=\sum \alpha_i \xi_i$ とすると $(c=\pm 1)$，

$$J(f, cf)=\sum \lambda_i{}^2-2c\sum \lambda_i \alpha_i{}^2+(\sum \alpha_i{}^2)^2$$
$$=(\sum \alpha_i{}^2-c\lambda_1)^2+\sum 2c(\lambda_1-\lambda_i)\alpha_i{}^2+\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i{}^2. \tag{9}$$

第1項を0にするためには $c\lambda_1 \geqq 0$ を要し，c を λ_1 と同符号にとれば，$c(\lambda_1-\lambda_i) \geqq 0$ だから，(9) は末尾の定数項

$$\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i{}^2 \tag{10}$$

よりも小さくない．最小値は，$\lambda_1 \neq \lambda_i$ ならば $\alpha_i=0$ で $\sum \alpha_i{}^2=c\lambda_1=|\lambda_1|$，すなわち，$f=\sum \alpha_i \xi_i$ が λ_1 に属する固有値の場合にとられる．（終）

このときの残差は (10) であるから，λ_1 が他の固有値よりもずぬけて大きく，(10) の平方根よりも十分に大きければ，この近似は，きわめてよいはずである．一般の場合にも，定理1系2から，V_X, V_Y の一つの固有値がずぬけて大きければ，近似のよいことが期待される．この場合には2回反復した演算子の固有値なので，最大の λ_1 と他の和の平方根 $(\sum \lambda_i{}^2)^{1/2}$ を比べるのが適当である．

じっさいに積分変換 U_1 や V_X の固有値を正確に求めることは容易でないが，その評価はいろいろできる[4,5]．また実用上では $u(x, y)$ は十分になめらかであり，これを格子点の値で近似して積分変換を有限次

元の行列で，おきかえることができる．上記の諸結果は，交互近似法を適用してどの程度よい近似がえられるかを判定するめやすを与えてくれる．

3. 実 例 1.

固有値が解析的に求められる具体例として，次の例を考えてみる．

対称の場合で $a=1$, $u(x, y)\equiv 1-\max(|x|, |y|)$. グラフは正方形上のピラミッドで，なめらかでなく，$x=\pm y$ に角がある．境界値は 0 である．積分変換 $U_1 f$ は，$f(x)$ の第 2 原始函数を $F(x)$ $(F''=f)$ とすれば，部分積分をくりかえして

$$U_1 f(x)=\int_{-1}^{1} u(x, y) f(y) dy$$
$$=F(1)+F(-1)-F(|x|)-F(-|x|)$$

となる．したがって，この固有函数 $f(x)$ は偶函数であり，積分定数を適当にとれば，$F(x)$ も偶函数で，$F(1)=0$ としてよい．そうすると固有方程式 $U_1 f(x)=\lambda f(x)$ は，$F(x)$ に関する微分方程式

$$F''(x)=-(2/\lambda)F(x),\ F(\pm 1)=0$$

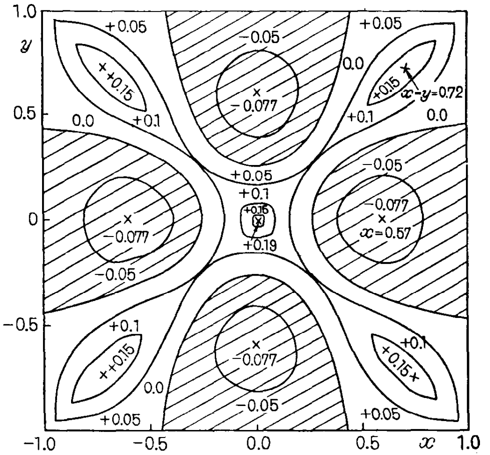
に帰する．この解は，C を定数として

$$F(x)=C\cos(\sqrt{2/\lambda}x),$$
$$\lambda=\lambda_n=8/\pi^2(2n-1)^2,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

である．ノルムをあわせると，固有函数は

$$f_n(x)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi(2n-1)}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right)$$

である．$\lambda_1=9\lambda_2$ であり，また (10) の平方根と λ_1 との比は



第 1 図 3 節の函数 $u(x, y)$ に対する誤差 $u(x, y)-f_1(x)f_1(y)$ の等高線

$$\frac{[\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i^2]^{1/2}}{\lambda_1}=\left[\frac{\pi^4}{96}-1\right]^{1/2}=(0.01468)^{1/2}=0.121$$

で，わりあいに小さい．じっさいに $u(x, y)$ を

$$f_1(x)f_1(y)=\frac{8}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \quad (11)$$

で近似したときの誤差は**第 1 図**に示すとおりで，これはむしろ予想以上によい近似と思われる．

4. 実 例 2.

当初の微分方程式 (2) を考える．まず対称の場合を考え，$a=1$ とする．この場合の厳密解は初等函数では表わされないが，次のような簡単でかなり正確な近似解が求められる (Collatz[6] に類似の例がある).

$$\frac{3}{10}(1-x^2)(1-y^2)-\frac{1}{160}(T_4(x)+T_4(y)-1)$$
$$=\frac{47}{160}-\frac{1}{4}(x^2+y^2)-\frac{1}{20}(x^4+y^4-6x^2y^2). \quad (12)$$

T_4 は 4 次の Čebyšev の多項式である．(12) は微分方程式の厳密解で，境界値は最大誤差 1/160 の最良近似であり，差分近似で求めた近似解とも境界の近くを除いて，1% 以下の相対誤差であっている．

(12) による積分変換の固有函数は，4 次の偶函数で，固有方程式は，$1050\lambda=\mu$ とおくと

$$\mu^3/7-(401/8)\mu^2+267\mu+512=0 \quad (13)$$

となる．

(13) の根はほぼ $\mu=345.4,\ 6.94,\ -1.49$ で，第 1 の根は第 2 以下より 50 倍も大きい．したがって近似がかなりよいことが期待される．

これに対して，10 等分の格子で差分近似したときの (2) の解を近似する行列の最大固有値は 0.369 であり，上記の近似値 345.4/1050=0.33 にかなり近い．なおこの場合，交互近似法による解と差分近似による解は，角の付近を除いて 2%，中心付近では 1% の相対誤差であっている．

つぎに対称でない場合の例として，$a=0.5$, $b=0.8$ のとき，刻み 0.1 で (2) を差分近似した解の行列について，固有値を求めると，次のようになった．

0.550, $6.85_{10}\text{-}5$, $2.40_{10}\text{-}6$, 他は 0.

詳しくいうと対称性から，V_X(9 次) は 4 個，V_Y (15 次) は 7 個の固有値が厳密に 0 で，これらはとり除いて計算した．V_X, V_Y は 0 以外の固有値を共有し，さらに V_Y の 3 個の固有値が 0 であるが，残りの固有値 (V_X は 2 個，V_Y は 5 個) は，Jacobi 法で数値計算した結果では，10^{-8}, 10^{-13} 程度の正の値がでた．しかし非対角線要素の絶対値を 10^{-8} 以下で

とめたし，差分近似による近似解の数値にもその程度の誤差があるので，第4以下の固有値の計算値はすべて誤差で，それらは実質的に0とみてよいと思う．第1固有値は第2以下にくらべて 8000 倍も大きい．ただしこの場合は2回反復した変換の固有値なので，平方根をくらべて約90倍とみるほうがよい．固有函数の積による近似は，もとの差分近似の解と角の付近を除いて 1 %，中央付近では 0.2 %の相対誤差で一致する．

これらは僅かな実験であるが，（2）に対して，交互近似法が予想以上によい成績をあげたことのうらづけとなることと思われる．

参考文献

1) A. Harris: 個人的な談話.
2) 吉田耕作: 位相解析 I, 岩波，1951.
3) 吉田耕作: ヒルベルト空間論,共立出版，1953.
4) E.C. Titchmarsh: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, II, Oxford, 1958.
5) L. Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.
6) L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer, 1955, 第4章.

（昭和42年4月24日受付）