寄　書

2変数陰関数のグラフ表示*

釜 江 尚 彦** 村 上 伸 一**

Abstract

This paper presents a method to display the locus of the solution for a given 2-variable real equation on a graphic display device. The locus is represented as the sequence of points or elements of the device. The synopsis of the method is summarized as follows; (1) one point which satisfies the equation is fixed, (2) the values of the function (which is properly constructed from the given equation) at the 8 points adjacent to the fixed point are obtained, (3) onedirection to which the locus of the solution of the equation expands is determined out of the above 8 directions. Since the displayed points are calculated successively along the locus witho ut solving the equation, much computation time can be saved. The precision of the displayed graphs can be changed by assigning the distance between two adjacent points.

This method will be also applicable to the man-machine communication through the graphs and to the automatic drafting in numerical control.

1. まえがき

科学や工学上の現象の解析や実際的な設計などの際には，与えられた方程式の解やその存在範囲を求めたりすること，またパラメータの変化による解の軌跡を求めることなどがしばしば必要となる．このような種類の問題に対しては，答えは数値データとして得るよりも，図形表示された形で得るほうが望ましい場合が多い．この種の問題に対しては従来，与えられた方程式を1つの変数について陽関数の形に解き，その式を用いて数値計算により図形表示を行なうという方法が主であった．しかしこのような方法は，与えられた式を陽関数の形に解くという段階に各種の技法やかなりの計算時間を必要とし，あまり有効な方法とはいえない．

ここでは一般に陰関数表現で与えられた2変数実係数方程式に対し，その解の軌跡（2次元平面上の曲線となる）を，その方程式を解くことなく，解の曲線に沿って追跡するといった方法で求めることを考える．表示機器としてはディジタル・プロッタおよび蓄積管グラフィック・ディスプレイのような機器を用い，追跡操作によって求めた解の曲線を直接図形表示することにする．したがって，表示される図形の精度は，これらの出力機器の精度によって制限されることになるが，対象とする変数の範囲を拡大し表示することによって，任意の精度で解を求めることができる．

なお，このように曲線を追跡操作によって求め表示する試みは文献 1) でもなされているが，そこでは自動作図のための図形を求めることを主目的としているため，曲線が分岐している場合などについての考察はなされていない．また，ここで考察する方法は，方程式の図式解法，NC における自動作図などのほか，Man-Machine Communication における図形の表示，図形コマンドとの組合せによる図形伝送にも応用できると思われる．

2. 曲線の表示方法

従来2次元平面上に格子状にとられた固定点におけ

* Graphical representation of implicit 2 variable function, by Takahiko kamae and Shinichi Murakami (The Musashino Elctrical Communication Laboratory, N. T. T.)

** 日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所

る高さで定義された．3次元の連続曲面の等高線を求める問題については，いくつかの考察がなされている[2]．ここでは，2変数実係数方程式の解曲線を求めることに，この3次元曲面の等高線を求める考え方を応用することを考える．

ここで対象とする方程式は2変数の実係数の式で，一般に陰関数表現

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

なる形で与えられるものとする．

方程式（1）に対し，$z=f(x, y)$ なる式を考えると，これは3次元空間 (x, y, z) 内の1つの曲面を表わす．そしてある特定の x，y の値の組 (x_0, y_0) に対する z の値 $z=f(x_0, y_0)$ は，3次元空間における xy-平面上の点 $(x_0, y_0, 0)$ から z 軸に沿った曲面までの高さを示すことになる．そこで方程式 $f(x, y)=0$ を満たす解の示す曲線は，曲面 $z=f(x, y)$ の高さ0の等高線，すなわち曲面 $z=f(x, y)$ と平面 $z=0$ との交わりの曲線として定義される．ここではこの交わりの曲線を $z=0$ 平面上において，この曲線に沿って追跡することによって求める．対象とする方程式 $f(x, y)=0$ は，それに対して定まる3次元空間の曲面 $z=f(x, y)$ が連続曲面となるようなものであるとする．この場合曲面 $z=f(x, y)$ と平面 $z=0$ との交わり方としては，交わり点の微小近傍で考えたとき，次の2つの場合がある．

（1）　曲面 $z=f(x, y)$ が平面 $z=0$ をつき破る形で交わる．

（2）　曲面 $z=f(x, y)$ が平面 $z=0$ に片側から接する形で交わる．

以下，この2つの場合に分けて方程式 $f(x, y)=0$ の解曲線を求めることにするが，ここでは解曲線を表現するのに，方程式 $f(x, y)=0$ を満たす連続量としての x，y の値の組を求めるというのではなく，あらかじめ xy-平面上にある間隔でとられた格子点の x，y 座標，すなわち離散量としての x，y の値の組の集合を考え，その格子点の中から式 $f(x, y)=0$ に最もよくあてはまる格子点（x, y の値の組）を選び出すという離散的な取扱い方をすることにする．したがって，与えられた方程式の解曲線を求めることは，上記の各格子点の中から解曲線に最も近い格子点からなる格子点の系列（近似曲線）を得ることになる．解曲線は高さ0の等高線であるが，格子点での曲面の高さを求めることは，与えられた曲面の式 $z=f(x, y)$ にその格子点の xy 座標を代入する操作となり，陰関数式をそのまま用いることができ，比較的簡単な手順で行なえる．そしてこの各格子点は表示機器であるディジタル的な蓄積管を使ったグラフィック・ディスプレイあるいはディジタル・プロッタなどの各表示点に対応しているものとするので，求める方程式の解曲線を直接図形表示することが可能となる．

3.　曲線の追跡方法

ここでは，与えられた方程式 $f(x, y)=0$ に対して定まる曲面 $z=f(x, y)$ が，平面 $z=0$ をつき破る交わり方をしている場合について，その方程式の解曲線を xy-平面上にとられた格子点による近似点の系列（近似曲線）として表わすことを考える．

3.1.　分岐点のない場合の曲線追跡

曲面 $z=f(x, y)$ が平面 $z=0$ をつき破る形の交わり方をしているときには，解曲線を境としてその両側で $z=f(x, y)$ なる曲面の平面 $z=0$ からの高さはその符号を変える．したがって，曲線 $f(x, y)=0$ の近似曲線を求めることは，曲面の高さの符号が異なる連続2格子点間を見つけることとなる．そして近似曲線の格子点としては，この2格子点のうち曲線に近い方の格子点を採用すればよい．このためにはこの2格子点から曲線 $f(x, y)=0$ までの距離を知る必要があるが，曲面がこの2格子点間でほぼ平面であるとみなせるとすれば，それらの距離は各格子点における曲面の高さの絶対値に比例することになり，高さを比較することによって解曲線に近い方の格子点を決定することができる．

つぎに解曲線 $f(x, y)=0$ の近似曲線に対する1つの格子点が定まったとき，この曲線に沿って近似曲線の格子点の系列を延長することを考える．ここでは1つの格子点 P_0 から連続できる格子点は図1のような P_1～P_8 の8個の格子点のみであるとする．したがっ

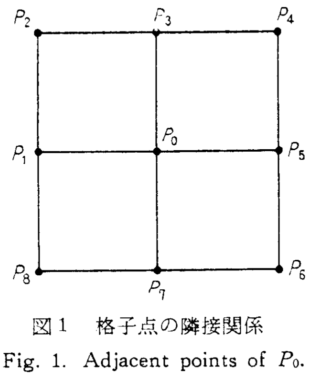

図1　格子点の隣接関係

Fig. 1. Adjacent points of P_0.

て，近似曲線の要素として選ばれた1つの格子点 P_0 があるとき，P_0 から解曲線として延長されるつぎの格子点は，P_0 の周囲の $P_1 \sim P_8$ の格子点の中から選ばれることになる．すなわち，P_0 のまわりの格子点 $P_1 \sim P_8$ において曲面の高さを計算し，その高さの符号が変化する連続2格子点間を求め，高さの絶対値が小さいほうの格子点へ近似曲線を延長すればよい．このとき高さの符号の変化点は，正から負および負から正への2箇所あるが，曲線の延長を一方向に行なうためには，このうちのどちらかの境目のみの検出を行なうようにすればよい．そして，その近似曲線が変数の定義域をはずれたら，追跡操作開始の最初の格子点にもどり，逆の方向に延長すれば（逆の境目を検出するようにして行なえる），解曲線の全体を求めることができる．

うえに述べた手順では曲線追跡操作の最初の格子点は，曲線 $f(x,y)=0$ までの距離が1格子点間隔以内の格子点でなければならないが，この格子点は，たとえば，変数域内に適当に指定された格子点から，x 軸あるいは y 軸に平行に並んでいる各格子点において曲面の高さを計算し，その符号が変わる連続2格子点間を見つけるといった手順で求めることができる．

3.2.　分岐点のある曲線の追跡

ここでは曲面 $z=f(x,y)$ と平面 $z=0$ との交わりの曲線が分岐点をもっている場合について，解曲線 $f(x,y)=0$ の近似曲線を求めることを考える．

この場合も **3.1.** と同様の方法で解曲線を追跡することができるが，1つの中心格子点のまわりの8個の格子点での曲面の高さを計算したとき，その符号の変化が2箇所より多くの連続2格子点間で検出されれば，その格子点は分岐点であるとみなされる．そして，その格子点の位置および分岐の方向を一時記憶し，そのうちの1つの方向へ曲線を延長する．追跡操作で得られる近似曲線の格子点が変数域をはずれたら，分岐点として記憶されている格子点の1つにもどり，まだ延長されていない分岐の方向に近似曲線を延長する．すべての分岐点に関し，すべての分岐の方向へ近似曲線の延長を行なえば，解曲線の全体を得ることができる．

4.　曲面 $z=f(x,y)$ が平面 $z=0$ に片側のみから接している場合の曲線追跡

曲面 $z=f(x,y)$ が平面 $z=0$ に片側のみから接しているときには，その解曲線の両側においても曲面の平面からの高さは同じ符号を示し，**3.** におけるように符号の変化で交わりの曲線を求めることはできない．

そこでこの場合には，接する可能性のある近傍の格子点において，曲面の高さとその格子点での曲面の曲率とから，その近傍で曲面が平面に接しているか否かを推定することにする．すなわち，ある連続2格子点 P_1，P_2 で曲面の平面からの高さが d_1，d_2 であるとするとき，その近傍での曲面の曲率半径 R が次式を満足するなら，この2格子点の間で曲面は平面に交わっていることになる．

$$R \leq \frac{1}{2(d_1-d_2)^2}\left[(d_1+d_2)\left(l^2+(d_1-d_2)^2\right) - 2l\sqrt{d_1 d_2\left(l^2+(d_1-d_2)^2\right)}\right] \qquad (2)^*$$

ここで l は格子点間隔を示す．

また3次元空間での曲面上の一点におけるその曲面の曲率半径 R は偏微分式で与えられ[3]，比較的簡単な計算で求めることができる．

この接する曲線に対する近似曲線の延長はつぎのようにして行なうことができる．すなわち，接する曲線に対する1つの格子点 P_0 が求まったとき，その格子点において上下，左右，斜 ±45° の4方向に対する曲面の曲率半径を計算し，その最も小さい曲率半径を与える方向に直角な，方向に曲線を延長すればよい（図2）．そしてその方向に選ばれた格子点がまた接する格子点であるか否かの判定は，前と同様の手順で行なえる．

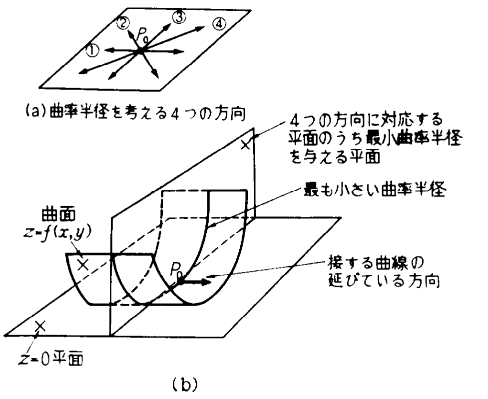

図2　接触線の延長方向

Fig. 2. Direction of contact line.

*　(2)式は半径 R の球が平面に接しているとき，接点をはさみ一直線上にある間隔が l の2格子点において，そこでの高さ d_1，d_2 と R の関係を解析的に求めたものである．

5. 極座標表現による方程式の図形表示

ここでは与えられた式が，陰関数表現による極座標形式の式である場合について，その方程式の解の曲線を図形表示することを考える．

与えられる方程式は2変数実係数の式で，半径 r および回転角 θ とで表現される式

$$g(r,\theta)=0 \qquad (3)$$

であるとする．方程式（3）に対し，$z=g(r,\theta)$ なる式を考えると，これは3次元円筒座標空間 (r,θ,z) 内の1つの曲面を表わすことになる．したがって，ここでも与えられた方程式（3）の示す解曲線は，曲面 $z=g(r,\theta)$ と平面 $z=0$ との交わりの曲線として定義されることになる．しかし，この場合は $z=0$ 平面は $r=0$, $z=0$ の原点で連結された多層のリーマン面となっている．この場合も $g(r,\theta)=0$ の解曲線は，**3**, **4** の場合と同様に追跡操作によって求めることができるが，今度の場合は回転角が 2π 増すごとに新たな $z=0$ のリーマン面と曲面 $z=g(r,\theta)$ との交わりの曲線を求めることになる．そしてこの解曲線を2次元表示するときには，多層のリーマン面を z 軸の上方から透視した形で表示することになる．また $z=0$ 面上にとられる格子点は放射状同心円的なものとなる．追跡の過程において均一な表示のため格子点間隔を一定にする必要から，単位の回転角は極からの距離に逆比例して大きさを変化するようにしたりするが，これら各種の技法についてはここではくわしくはふれない．

6. プログラムおよび適用例

前節までの議論に基づいてプログラムを作成し，いくつかの方程式に対しその解の軌跡を求めてみた．プログラムは FORTRAN を用いて書かれ，プログラム長はおよそ600命令であった．使用した計算機はNEAC 2200-500，表示機器はディジタル・プロッタ N 244 A-1を用いた．なお，このプロッタの最小ステップは0.2 mm であり，曲線のなめらかさはこれにより押さえられることになる．

例1　方程式

$$\left(\frac{x}{25}\right)^4+\left(\frac{y}{25}\right)^4-2\left[\left(\frac{x}{25}\right)^2+\left(\frac{y}{25}\right)^2\right]+1=0$$

の解の軌跡を求める．

この式では点 (0.25)，(−25, 0)，(0, −25)，(25, 0) の4点が4分岐点となっている．その軌跡は**図3**に示すようなもので，表示のために選ばれた格子点の総数

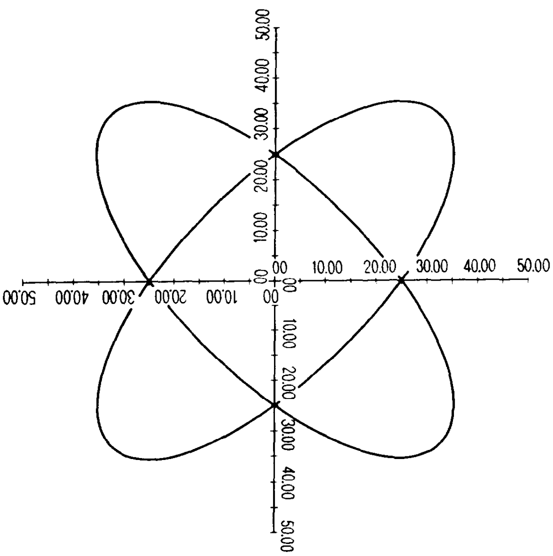

図3　方程式 $\left(\frac{x}{25}\right)^4+\left(\frac{y}{25}\right)^4-2\left[\left(\frac{x}{25}\right)^2+\left(\frac{y}{25}\right)^2\right]+1=0$ の解の軌跡

Fig. 3. Locus of $\left(\frac{x}{25}\right)^4+\left(\frac{y}{25}\right)^4-2\left[\left(\frac{x}{25}\right)^2+\left(\frac{y}{25}\right)^2\right]+1=0$

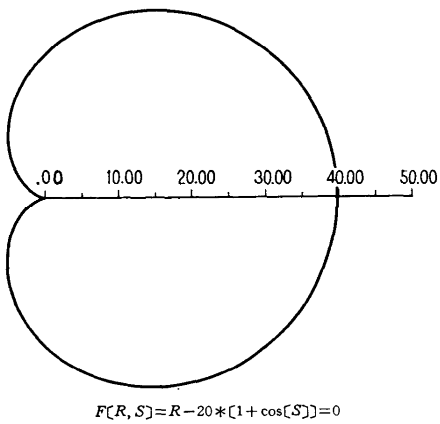

図4　方程式 $R-20(1+\cos\theta)=0$ の解の軌跡

Fig. 4. Locus of $R-20(1+\cos\theta)=0$

は約 3,500 計算時間は約4分であった．

例2　方程式 $R=20(1+\cos\theta)$ の解の軌跡を求める．

この例は与えられた方程式が極座標形式で与えられた場合の例である．また三角関数のような計算機システムの外部関数を含んだ場合の例ともなっている．こ

のように，計算機システムが扱える関数式ならどのような関数式を含んでいても，その図形表示は可能である．軌跡はいわゆるカルジオイドと呼ばれるもので，**図4** に示すものとなる．表示のためにとられた格子点は約 1,200，計算時間は約 45 秒であった．

あとがき

与えられた陰関数表現の2変数実係数方程式の解曲線をその方程式を解くことなく，直接グラフ表示する方法について考察した．もし，与えられた方程式に対し定まる2変数関数が，定義域内の各点において全微分可能であり，解曲線が弧立部分をもたない場合には，ここで述べた方法により解曲線を表示することが可能である．しかし，この方法により得られる表示図形は出力機器の精度にも関係し，必ずしも正確な図形とはならないが，方程式の解の概略の形を簡便に知ることができ，各種の応用が期待されると思われる．

最後に，日ごろご指導いただく電信電話公社電気通信研究所画像通信部表示機器研究室大和淳二室長に感謝します．

参考文献

1) 斉藤たつき：“8角形追跡法による数式化パターンの自動作図”，情報処理学会第 11 回大会講演予稿 179.
2) 磯部俊夫：“等高線をかかせるプログラム”，情報処理，1965 年 5 月
3) 寺沢寛一：“数学概論”，岩波書店.
4) 栗田　稔：“いろいろな曲線”，共立出版.
5) NEAC 2200 オペレーティング・システム，MOD III/IV プロッタールーチン説明書.

(昭和46年2月19日受付)