

資料

Lobatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定*

山下 真一郎**

平均値法による数値積分公式は、分点と重率の決め方によって、その精度が定まる。Lobatto-Gauss の積分公式は、分点の両端を固定して、重率と残りの分点を積分精度を上げるように自由に選ぶものである。すなわち、

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = W_1 f(-1) + \sum_{k=2}^{n-1} W_k f(x_k) + W_n f(+1) - E \quad (1)$$

とおくとき、分点 $x_k (k=2, 3, \dots, n-1)$ および重率 $W_k (k=1, 2, \dots, n)$ を積分精度を上げるように選ぶものである。自由な分点が $2n-2$ 個あるから、精度は $2n-3$ である。したがって、 $f(x)$ が $2n-3$ 以下の多項式ならば、積分値は正確に表わされる。

この積分公式は、(1)式から理解されるように、積分区間の両端で、被積分関数が特定の値をとるとき都合がよい。特に、 $f(\pm 1) \equiv 0$ であれば、Legendre-Gauss の積分公式に比べて、近似度が2だけよい。

分点 x_k は $n-1$ 次の Legendre 多項式の微分 $P'_{n-1}(x)$ の0点であり、重率 W_k 、誤差 E は次のように表わせる。

$$W_k = \frac{2}{n(n-1)[P'_{n-1}(x_k)]^2}, \quad k=2, 3, \dots, n-1$$

$$= \frac{2(n-1)}{n(P'_{n-2}(x_k))^2} \quad (2)$$

$$W_1 = W_n = \frac{2}{n(n-1)} \quad (3)$$

$$E = -\frac{n(n-1)^3 2^{2n-1} ((n-2)!)^4}{(2n-1)((2n-2)!)^3} f^{(2n-2)}(\xi),$$

$$|\xi| < 1 \quad (4)$$

$P'_{n-1}(x)$ の0点の計算は Newton 法によって行なう。

このときの初期値は次のようにとる。

まず、Legendre 陪多項式 $P'_{n-1}(x)$ の n が大きいときの漸近式¹⁾

$$P'_{n-1}(\cos \theta) \sim -\sqrt{\frac{2(n-1)}{\pi \sin \theta}} \cos((n-1/2)\theta + \pi/4) \quad (5)$$

から、 $P'_{n-1}(x)$ の0点は、ほぼ、(5)式の右辺の0点

$$x_k = \cos\left[\frac{(4k-3)\pi}{4k-2}\right], \quad k=2, 3, \dots, n-1 \quad (6)$$

である。一方、 $P'_{n-1}(x)$ と $P''_{n-1}(x)$ の関係式は、

$$P'_{n-1}(x) = \sqrt{1-x^2} P''_{n-1}(x) \quad (7)$$

であるから、 $P'_{n-1}(x)$ の根は $P''_{n-1}(x)$ の根でもある。したがって、 $P''_{n-1}(x)$ の近似値に(6)式が使える。

あるいはまた³⁾,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} P_n^{(m)}\left(\frac{x}{n}\right) = J_m(x) \quad (8)$$

から、 $j_{1,k}$ を $J_1(x)$ の小さい方からの根とすれば、近似根は、

$$x_k = \cos\left\{\frac{j_{1,k}}{\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2-4}{4\pi^2}\right)}}\right\} \quad (9)$$

としてもよい。これらの近似値は、2, 3 けたの精度があり、(6)式よりも、わずかに(9)式のほうがよい。

$j_{1,k}$ の値は次の式を使う¹⁾。

$$j_{1,k} = \frac{p}{4} \left[1 - \frac{6}{p^2} + \frac{6}{p^4} - \frac{4716}{5p^6} + \frac{3902418}{35p^8} - \frac{895167324}{35p^{10}} \right], \quad p = \pi(4k-1) \quad (10)$$

これらの近似値を初期値 $x_{k,0}$ として、Newton 法

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} - \frac{P'_{n-1}(x_{k,i})}{P''_{n-1}(x_{k,i})}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

をくり返す。関数値、 $P_{n-1}(x)$ 、 $P'_{n-1}(x)$ 、 $P''_{n-1}(x)$ の計算は、 $P'_n(x)$ の漸化式

* Computation of the Abscissas and Weight Coefficients for the Lobatto-Gauss Quadrature Formulae by Shin-ichiro Yamashita (Fujitsu Limited)

** 富士通株式会社

Lobatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率 (1)

次数	分点	重率
N=3 1 3 2	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.33333 33333 33333 33333 33333 33333 1.33333 33333 33333 33333 33333 33333
N=4 1 4 2 3	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.44721 35954 99957 93928 18347 33746	0.16666 66666 66666 66666 66666 66666 0.83333 33333 33333 33333 33333 33333
N=5 1 5 2 4 3	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.65465 36707 07977 14379 82924 56246 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.10000 00000 00000 00000 00000 00000 0.54444 44444 44444 44444 44444 44444 0.71111 11111 11111 11111 11111 11111
N=6 1 6 2 5 3 4	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.76505 53239 29464 69285 10029 73959 0.28523 15164 80645 09631 41509 94040	0.06666 66666 66666 66666 66666 66666 0.37847 49562 97846 98031 66128 08212 0.55485 83770 35486 35301 67205 25121
N=7 1 7 2 6 3 5 4	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.83022 38962 78566 92987 20322 13967 0.46894 87934 70714 21380 37718 81908 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.04761 90476 19047 61904 76190 47619 0.27682 60473 61565 94601 07004 06290 0.43174 53812 09862 62341 78710 22281 0.48761 90476 19047 61904 76190 47619
N=8 1 8 2 7 3 6 4 5	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.87174 01485 09606 61533 74457 61220 0.59170 01814 33142 30214 45107 31397 0.20929 92179 02478 86876 86572 60345	0.03571 42857 14285 71428 57142 85714 0.21070 42271 43506 03938 29920 65775 0.34112 26924 83504 36476 42406 77107 0.41245 87946 58703 88156 70529 71402
N=9 1 9 2 8 3 7 4 6 5	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.89975 79954 11460 15731 23452 44418 0.67718 62795 10737 75344 58854 27091 0.36311 74638 26178 15871 07520 68708 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.02777 77777 77777 77777 77777 77777 0.16549 53615 60805 52504 63397 20029 0.27453 87125 00161 73528 07056 18579 0.34642 85109 73046 34511 51315 32139 0.37151 92743 76417 23356 00907 02947
N=10 1 10 2 9 3 8 4 7 5 6	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.91953 39081 66458 81382 89326 60822 0.73877 38651 05505 07500 31061 74859 0.47792 49498 10444 49566 11750 92731 0.16527 89576 66387 02462 62197 65958	0.02222 22222 22222 22222 22222 22222 0.13330 59908 51070 11112 62271 70755 0.22488 93420 63126 45211 94578 21731 0.29204 26836 79683 75787 55822 57374 0.32753 97611 63897 45665 65105 27916
N=11 1 11 2 10 3 9 4 8 5 7 6	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.93400 14304 08059 13433 22741 36099 0.78448 34736 63144 41862 24178 16108 0.56523 53269 96205 00647 09639 69477 0.29575 81355 86939 39143 19115 15559 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.01818 18181 81818 18181 81818 18181 0.10961 22732 66994 86446 14034 49580 0.18716 98817 80305 20410 83415 21899 0.24804 81042 64028 31404 00848 66421 0.28687 91247 79008 08867 92224 03331 0.30021 75954 55690 69378 53318 81169
N=12 1 12 2 11 3 10 4 9 5 8 6 7	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.94489 92722 22882 22340 75801 38303 0.81927 33216 44006 67834 86415 81716 0.63287 61530 31860 67766 24048 54443 0.39953 09409 65348 93226 43497 91566 0.13655 29328 54927 55486 40618 55739	0.01515 15151 51515 15151 51515 15151 0.09188 45174 13196 13066 83425 94134 0.15727 47055 64370 11516 46710 62700 0.21250 84177 61021 14535 83020 77366 0.25127 56031 99201 28029 32444 12147 0.27140 52409 10696 17700 02883 38499
N=13 1 13 2 12 3 11 4 10 5 9 6 8 7	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.95330 98466 42163 51189 69054 64755 0.84534 75646 51872 31686 59256 07098 0.68618 84690 81757 42607 27590 39566 0.48290 98210 91336 20174 69372 33636 0.24928 69301 06239 99256 86737 00374 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.01282 05126 20512 82051 28205 12820 0.07780 16367 46818 92779 35809 88333 0.13498 19266 89608 34911 99147 62569 0.18364 68652 03550 09200 74942 53746 0.22076 77935 66110 08608 55340 08379 0.24401 57903 06676 35645 85781 48360 0.25193 08493 33446 73604 41386 41541
N=14 1 14 2 13 3 12 4 11 5 10 6 9 7 8	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.95993 50452 67260 90135 51001 62015 0.86780 10538 30347 25100 02202 02908 0.72886 85990 91326 14058 46724 00520 0.55063 94029 28647 05531 66227 05859 0.34272 40133 42712 84504 39034 03641 0.11633 18688 83703 86765 87767 09736	0.01098 90109 89010 98901 09890 10989 0.06683 72844 97681 28463 40706 60746 0.11658 66558 98711 65154 09966 70654 0.16002 19517 62952 14241 28209 97987 0.19482 61493 73416 11864 03317 78375 0.21912 62530 09770 75487 11625 23954 0.23161 27944 68457 05888 96283 57292
N=15 1 15 2 14 3 13 4 12 5 11 6 10 7 9 8	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000 0.96524 59265 03838 57279 58513 92069 0.88508 20442 22976 29882 54016 31482 0.76351 96899 51815 20070 41184 75976 0.60625 32054 69845 71112 35299 38636 0.42063 80547 13672 48092 18969 38738 0.21535 39553 63794 23822 56794 46272 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00952 38095 23809 52380 95238 09523 0.05802 98930 28601 24909 68805 84025 0.10166 00703 25718 06760 36661 70788 0.14051 16998 02428 10946 04468 05643 0.17278 96472 53600 94905 20770 99408 0.19698 72359 64613 35609 25003 46507 0.21197 35859 26820 92012 74300 76977 0.21704 81163 48815 64951 49502 14250

Lobatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率 (2)

次数	分点	重率
N=16		
1 16	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00833 33333 33333 33333 33333 33333
2 15	0.96956 80462 70217 93235 22427 38367	0.05085 03610 05919 90540 32449 19565
3 14	0.89200 05330 93472 09299 46282 61519	0.08239 36973 25930 80099 10520 80166
4 13	0.79200 82918 61815 06593 10882 70963	0.12425 53821 32514 09834 95363 32657
5 12	0.65238 87028 82493 08946 78832 19640	0.15402 69808 37164 28081 56449 40484
6 11	0.48605 94218 87137 61178 18907 85846	0.17749 19133 91704 12530 10756 69528
7 10	0.29983 04689 00763 20809 83534 54722	0.19369 00238 52035 58431 69135 98853
8 9	0.10132 62735 21949 44784 30330 05045	0.20195 83081 78229 87148 91991 25410
N=17		
1 17	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00735 29411 76470 58823 52941 17647
2 16	0.97313 21766 31418 31415 69795 01873	0.04492 19405 43254 20964 74009 54623
3 15	0.91087 99959 15573 59562 38025 06397	0.07919 82705 03687 11919 02644 29952
4 14	0.81569 62512 21770 30710 67505 53237	0.11059 29090 07028 16137 57727 05220
5 13	0.69102 89806 27684 70539 49193 57372	0.13798 77462 01926 55905 62015 74954
6 12	0.54138 53993 30101 53912 37334 07504	0.16039 46619 97621 53951 63283 65864
7 11	0.37217 44335 65477 04190 72346 80735	0.17700 42535 15657 87043 69457 45363
8 10	0.18951 19735 18317 38830 42630 14753	0.18721 63396 77619 23589 20884 82860
9 9	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.19066 18747 53469 43329 94072 47028
N=18		
1 18	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00653 59477 12418 30065 35947 71241
2 17	0.97610 55574 12198 54286 45189 24341	0.03997 06288 10914 06613 75991 76410
3 16	0.92064 91853 47533 87383 78546 25431	0.07063 71668 85633 66499 92229 60167
4 15	0.83559 35352 18090 21371 96463 62327	0.09901 62717 17502 80239 44236 05318
5 14	0.72367 93292 83242 68130 62103 65302	0.12421 05331 32967 10026 33963 58996
6 13	0.58550 48343 18661 76117 35358 93193	0.14541 19615 73802 26798 30032 10494
7 12	0.43441 50369 12123 97534 22871 36740	0.16193 95172 37602 48926 42627 06700
8 11	0.26636 26528 78250 98416 76653 32025	0.17326 21094 89456 22601 06144 03826
9 10	0.08974 90934 04652 11102 26450 10088	0.17901 58634 39703 08229 38188 06943
N=19		
1 19	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00584 79532 16374 26900 58479 53216
2 18	0.97861 17662 22080 09515 26340 63110	0.03579 33651 86176 47711 54255 69035
3 17	0.92890 15281 52586 24371 79402 58796	0.06338 18917 62629 73685 16956 90418
4 16	0.85246 05777 96646 09308 59559 70041	0.08913 17570 99207 08444 80087 90556
5 15	0.75149 42025 52613 01416 36374 89633	0.11231 53414 77305 04407 09100 15463
6 14	0.62890 81372 65220 49776 68323 06228	0.13226 72804 48950 77692 60467 33909
7 13	0.48822 92856 80713 50277 79096 37624	0.14841 39425 95938 98500 96906 43668
8 12	0.33350 48478 24498 61029 85001 03844	0.16029 09240 44061 24197 99109 68183
9 11	0.16218 60234 09281 57137 51541 53444	0.16755 65945 27142 86727 01372 77740
10 10	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.17000 19192 94827 23464 46727 15616
N=20		
1 20	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00526 31578 94736 84210 52631 57894
2 19	0.98074 37048 93914 17192 54464 38584	0.03223 71231 88488 94149 16050 28117
3 18	0.93593 44988 12665 43571 61815 84930	0.05718 18021 27566 82600 47536 27173
4 17	0.86687 79780 89950 14130 98472 14616	0.08063 17639 96119 60314 47768 46113
5 16	0.77536 82609 52055 87041 43175 27594	0.10199 14996 99450 81568 37812 05732
6 15	0.66377 64022 90311 28984 64033 22971	0.12070 92276 28674 72509 94297 05002
7 14	0.53499 28640 31886 26164 81359 61828	0.13630 04823 58724 18448 97807 92989
8 13	0.39235 31937 13909 29938 64747 03815	0.14836 15540 70916 82581 47130 13733
9 12	0.23955 17059 22986 49518 24013 56927	0.15658 01026 47475 48715 81698 96793
10 11	0.08054 59372 38821 83797 59445 18159	0.16074 32863 87845 74900 77267 26449
N=21		
1 21	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00476 19047 61904 76190 47619 04761
2 20	0.98257 22966 04548 02823 44812 76555	0.02918 48400 98505 45860 94585 43613
3 19	0.94197 62969 59745 53429 61026 50661	0.05184 31690 00849 62507 27229 71852
4 18	0.87929 47553 23690 46445 11535 96304	0.07927 39181 85074 14425 25478 61041
5 17	0.79600 19260 77712 40474 43125 89660	0.09298 54679 57886 06530 11376 64149
6 16	0.69405 10260 62223 23262 73163 93194	0.11051 70832 19123 33526 70004 86784
7 15	0.57583 19602 61830 68692 70218 70338	0.12845 81211 90868 94801 51575 35707
8 14	0.44411 57832 79002 10119 45163 49607	0.13745 84628 60041 34358 08996 17415
9 13	0.30198 98565 08764 88727 53518 67858	0.14623 68624 47977 45926 72705 30634
10 12	0.15278 55158 02185 46600 63583 28485	0.15158 75751 11681 38445 32506 81505
11 11	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.15338 51903 32174 94855 15844 05067
N=22		
1 22	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00432 90043 29004 32900 43290 04329
2 21	0.98415 24384 57646 17655 22896 22212	0.02654 57476 82501 75791 16279 04520
3 20	0.94720 42839 99228 68052 42137 66615	0.04721 44652 93740 75212 37757 34864
4 19	0.89006 22901 90904 47052 96578 25779	0.06686 56058 64553 07601 24041 94157
5 18	0.81394 89276 11921 13604 54418 48056	0.08509 00603 91838 44781 57112 36095
6 17	0.72048 72399 61202 15811 98818 96398	0.10150 05748 01647 67437 24373 03749
7 16	0.61166 94382 84258 97122 62116 05869	0.11574 76446 53939 06659 00363 67721
8 15	0.48981 48751 89902 34980 87512 35683	0.12752 76966 53430 27553 08444 59308
9 14	0.35752 07101 88919 53806 09572 80240	0.13658 96886 13741 42268 61773 62206
10 13	0.21760 65851 58285 04178 79550 93465	0.14274 04922 71361 40063 62359 93566
11 12	0.07305 45400 10898 33476 10887 90464	0.14584 90194 44241 79361 64204 39479

Loebatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率 (3)

次数	分点	重率
N= 23		
1 23	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00395 25691 69960 47430 83003 95256
2 22	0.98552 71558 78732 57808 14627 66738	0.02424 86007 71531 73651 73996 58937
3 21	0.95175 79557 10710 20413 56396 79851	0.04317 58711 70241 83474 88764 65612
4 20	0.89945 85580 40345 01095 01603 20347	0.06125 24771 29554 20638 13828 47440
5 19	0.82965 10966 51285 88622 32006 19230	0.07813 54494 75569 98974 19342 55347
6 18	0.74369 50411 72060 68392 61635 43066	0.09349 72461 63512 34183 53007 06906
7 17	0.64326 36444 50136 20847 61435 33602	0.10703 91017 24336 51153 51836 27915
8 16	0.53031 19711 36844 16813 01153 20152	0.11849 75106 62749 13130 21260 04724
9 15	0.40703 79379 14474 82919 59504 88215	0.12764 94747 01758 87663 61485 53055
10 14	0.27584 15489 45793 06710 68776 32679	0.13431 68726 38603 81990 15648 97700
11 13	0.13927 62040 40668 39859 18626 12982	0.13836 99363 85807 39452 35027 33862
12 12	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.13972 97800 12747 36514 01597 06479
N= 24		
1 24	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00362 31884 05797 10144 92753 62318
2 23	0.98673 05535 05160 88355 30867 38154	0.02223 68534 64711 20899 29604 34817
3 22	0.95574 82209 29886 35802 69771 30550	0.03963 16813 33467 80946 92621 63363
4 21	0.90770 56751 13506 52199 51529 96466	0.05630 98487 24646 19902 09483 39678
5 20	0.84346 40701 54872 04062 33050 37423	0.07198 18620 55293 98221 56390 06668
6 19	0.76417 04824 20493 30778 37352 80952	0.08636 90299 67929 06821 65628 19306
7 18	0.67124 01052 64128 69983 56648 58187	0.09921 48276 84083 58741 41497 70995
8 17	0.56633 13579 79295 31218 94095 44542	0.11029 00868 92968 60411 04241 23027
9 16	0.45131 63732 14322 61824 82184 91569	0.11939 71937 02491 31903 22938 88350
10 15	0.32824 76133 75510 91203 39891 79359	0.12637 36420 28020 80012 72480 90691
11 14	0.19932 12533 90832 66723 65725 39124	0.13109 49418 73603 34235 44502 25816
12 13	0.06683 79937 37228 57811 36418 08391	0.13347 68438 66986 37759 67857 20965
N= 25		
1 25	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00333 33333 33333 33333 33333 33333
2 24	0.98778 99449 31493 70927 18040 70873	0.02046 51689 32974 38530 85424 71819
3 23	0.95926 41382 52534 47885 98451 78839	0.03650 47387 94271 37203 23829 88755
4 22	0.91498 27707 34622 57832 31499 33736	0.05193 62283 68491 47464 33338 89713
5 21	0.85567 64658 35316 57752 38132 60171	0.06651 37286 75312 78469 38699 93313
6 20	0.78231 96592 40716 78039 21879 52228	0.07999 87748 36292 98180 16264 36138
7 19	0.69611 70488 15134 36676 03654 33789	0.09217 01399 10620 42191 26896 22714
8 18	0.59848 41472 79993 26809 76209 37181	0.10282 80303 47957 83082 75036 44907
9 17	0.49102 41148 16878 38261 89599 25568	0.11179 74662 68320 88815 62442 32431
10 16	0.37550 14578 59227 23322 87146 12260	0.11893 11794 06811 32540 94442 44634
11 15	0.25381 30641 68876 58017 98868 81687	0.12411 20389 37950 29669 52153 12439
12 14	0.12795 70594 83106 97270 89846 25094	0.12725 49775 38331 44701 71144 16738
13 13	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.12830 93892 98661 92833 73988 26124
N= 26		
1 26	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00307 69230 76923 07692 30769 23076
2 25	0.98872 74123 11475 65442 92466 90371	0.01889 68580 24263 46558 13520 47676
3 24	0.96237 78747 67717 32975 06626 71282	0.03373 23036 85955 99937 75227 48582
4 23	0.92143 55468 17557 34112 51305 21748	0.04804 83990 81180 62731 69793 12700
5 22	0.86652 43239 59123 57097 44514 97809	0.06163 50251 42547 40278 21900 54104
6 21	0.79847 71831 07437 43903 67876 38570	0.07428 70651 22291 13731 60840 82986
7 20	0.71832 58163 62665 08052 54053 87903	0.08581 28639 80004 36218 74812 52359
8 19	0.62725 52994 92316 88700 05189 07161	0.09603 78023 53901 31080 36973 96370
9 18	0.52673 57420 29878 54529 82433 94380	0.10480 68862 30737 05898 99058 66691
10 17	0.41320 13870 66246 78556 36838 82333	0.11198 71941 19860 33530 02108 90879
11 16	0.30332 75128 59252 72077 40410 37902	0.11746 98840 93809 07007 66952 20296
12 15	0.19385 54952 70054 90132 12056 71885	0.12117 18462 88443 34604 42866 95704
13 14	0.06159 64117 81919 72820 54872 74781	0.12303 69638 00082 87630 15271 49290
N= 27		
1 27	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00284 90028 49002 84900 28490 02849
2 26	0.98956 09637 28550 62114 88746 40054	0.01750 19748 76065 57901 93697 34362
3 25	0.96514 84024 50818 91926 42668 03121	0.03126 29517 35202 38432 47849 90064
4 24	0.92718 34587 25115 77885 97467 64072	0.04457 76579 33061 69874 40747 42241
5 23	0.87620 20862 14522 47866 65430 49194	0.05726 55696 80162 73173 90872 28253
6 22	0.81292 04868 95812 28825 80918 64758	0.06914 93423 60043 27628 06347 35030
7 21	0.73822 71498 46459 91083 94272 25748	0.08006 23219 70538 45816 82380 70483
8 20	0.65317 06636 96809 51517 87048 75182	0.08985 13652 59290 55997 21363 01946
9 19	0.55894 50609 42561 18006 26680 74868	0.09837 90745 85952 76317 93089 31269
10 18	0.45687 30756 14082 40367 86126 50839	0.10552 57478 21253 01121 83819 89475
11 17	0.34838 75819 89028 67043 70865 78587	0.11119 10652 57437 03292 82619 59342
12 16	0.23501 14831 02918 13333 68015 80513	0.11529 55002 54651 98281 37533 33374
13 15	0.11833 63338 98521 04843 87082 68275	0.11778 14365 85956 15906 64990 79448
14 14	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.11861 39776 62763 02708 52398 03705
N= 28		
1 28	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00264 55026 45502 64550 26455 02645
2 27	0.99030 54026 18454 12551 70929 11864	0.01625 58839 57504 21819 89901 52897
3 26	0.96762 42858 57131 30434 37708 79143	0.02905 42206 77973 14470 68527 79823
4 25	0.93232 51671 21558 52492 61424 18608	0.04146 69152 43006 72103 79858 48778
5 24	0.88487 10172 11302 83841 23063 38257	0.05333 80770 47327 48840 03255 13471
6 23	0.82588 09700 56338 19604 45144 26196	0.06451 36580 80354 53839 02456 93462
7 22	0.75612 41940 05669 76515 20957 25266	0.07484 81235 09707 70278 05679 39143
8 21	0.67651 01289 29573 31771 53812 45073	0.08420 67951 21510 32573 94911 87797
9 20	0.58907 66898 37175 60647 83120 79761	0.09246 76859 97712 17572 20353 94699
10 19	0.49197 67539 31575 38042 96166 82944	0.09952 31104 12495 67287 59453 54750
11 18	0.38946 31375 76362 80793 58841 55204	0.10528 10937 61055 89448 23775 51794
12 17	0.28187 22666 21602 37195 41525 08909	0.10966 65737 95976 62508 85858 33791
13 16	0.17060 67553 08004 36088 27026 77748	0.11262 23800 77239 01254 06364 24113
14 15	0.05711 71216 93512 89762 65436 51573	0.11410 99796 72627 83453 33147 92830

Lobatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率 (4)

次 数	分 点					重 率					
N= 29											
1 29	1.00000	00000	00000	00000	00000	0.00246	30541	87192	11822	66009	85221
2 28	0.99097	29882	68569	81627	87451	0.01513	81698	59677	59679	08579	26606
3 27	0.96984	58072	87936	29371	24013	0.02707	08062	96824	82754	08514	25445
4 26	0.93694	27185	20982	51154	20368	0.03866	84399	79712	97974	78325	74267
5 25	0.89266	57199	76088	28776	42299	0.04979	58090	93237	56092	26683	41175
6 24	0.83755	27362	81706	56524	20733	0.06031	85038	28522	73502	80644	63517
7 23	0.77227	28972	06468	74135	41706	0.07010	89380	00597	99918	52668	58424
8 22	0.69761	86613	56367	98839	39744	0.07904	83130	27885	60178	47102	32175
9 21	0.61449	62522	03432	94997	09036	0.08702	81334	41135	60563	76261	55215
10 20	0.52391	46743	71969	08357	88165	0.09395	15421	14796	31249	78365	66987
11 19	0.42697	34717	13494	38763	75764	0.09973	45016	37149	86065	35691	77534
12 18	0.32484	93829	41911	00626	00140	0.10430	68164	63676	53742	27071	12191
13 17	0.21878	20582	84261	01980	90518	0.10761	29858	33568	53937	35868	54046
14 16	0.11005	90133	95592	10970	77876	0.10961	28778	45990	42013	21324	10756
15 15	0.00000	00000	00000	00000	00000	0.11029	22167	79682	61011	24579	52870
N= 30											
1 30	1.00000	00000	00000	00000	00000	0.00229	38505	74712	64367	81609	19540
2 29	0.99157	39428	40500	29333	88182	0.01413	17993	27905	38764	07321	68668
3 28	0.97184	66031	66269	24167	65929	0.02528	31667	40551	40220	42682	53850
4 27	0.94110	47809	51057	08230	71895	0.03614	20941	59408	53531	47326	83123
5 26	0.89969	92181	99276	85955	33428	0.04659	06945	33142	92740	18304	91446
6 25	0.84809	94871	80198	10955	14238	0.05651	11979	23080	38330	21937	10472
7 24	0.78689	03572	37547	08044	95595	0.06579	13363	97790	05494	41013	74593
8 23	0.71676	63966	37035	13163	37995	0.07432	60033	24718	25383	40376	42000
9 22	0.63851	91758	07558	46737	10934	0.08201	85128	33406	91479	97215	45527
10 21	0.55303	82600	95052	85238	45502	0.08878	17123	19765	21016	72564	34455
11 20	0.46129	11901	68240	68522	65572	0.09453	89751	93860	89178	11327	15364
12 19	0.36431	75004	22448	99775	59851	0.09922	50710	04299	83065	76759	64954
13 18	0.26321	59437	19573	79126	70994	0.10278	60503	07234	98947	02808	08335
14 17	0.15913	20426	25850	46782	49485	0.10518	41215	96454	64985	62129	80859
15 16	0.05324	51104	85486	66936	30078	0.10638	95587	23667	92494	75823	06809
N= 31											
1 31	1.00000	00000	00000	00000	00000	0.00215	05376	34403	60215	05376	34408
2 30	0.99211	68443	46481	08858	93246	0.01322	24710	25464	67030	26356	29869
3 29	0.97365	49358	15736	47482	60695	0.02366	64332	30270	31673	00457	82709
4 28	0.94486	51702	08039	22980	64055	0.03385	39404	05224	05762	98108	46931
5 27	0.90606	63514	41269	81314	45115	0.04368	18181	00066	91282	97472	88083
6 26	0.85765	99552	97455	61036	70053	0.05304	64654	33448	78277	42808	60067
7 25	0.80016	15431	92462	98927	23313	0.06184	87412	90454	62339	07485	84002
8 24	0.73418	11363	09075	24213	41408	0.06999	53775	94100	57045	02153	53373
9 23	0.66041	82026	11525	52333	70412	0.07740	00323	41475	61863	42838	78417
10 22	0.57965	46572	08001	91300	32968	0.08398	42205	17529	73066	52581	05226
11 21	0.49274	66190	98832	40570	38002	0.08967	81510	45260	82224	81429	32236
12 20	0.40061	53382	80561	80630	26644	0.09442	14663	77857	95743	21904	89816
13 19	0.30423	74312	72872	62095	94551	0.09816	38930	13712	75711	97418	79401
14 18	0.20463	45292	47524	50114	10935	0.10066	57547	98650	51339	55625	96102
15 17	0.10286	24487	60682	27708	91147	0.10249	84135	95470	39767	59056	54990
16 16	0.00000	00000	00000	00000	00000	0.10304	45629	53207	33314	17849	61525
N= 32											
1 32	1.00000	00000	00000	00000	00000	0.00201	61290	32258	06451	61290	32258
2 31	0.99260	89339	72761	35937	15413	0.01239	81065	01373	84378	86203	49229
3 30	0.97529	46904	82709	22806	24559	0.02219	95528	89291	96462	38921	71161
4 29	0.94828	48384	17232	37808	33282	0.03177	51354	10915	46578	15622	78917
5 28	0.91184	99390	63731	90407	45314	0.04103	42015	86062	72933	04036	41719
6 27	0.86635	24760	12675	51383	08147	0.04988	52713	36221	20701	19601	53724
7 26	0.81224	47317	77442	34454	68217	0.05824	04972	49055	86955	07989	29919
8 25	0.75006	44939	36674	78771	72759	0.06601	68772	57154	54393	24363	31683
9 24	0.68042	97556	15550	81594	23957	0.07313	71396	02679	03264	03709	83569
10 23	0.60403	25871	48421	12613	71729	0.07953	05256	92106	25229	23567	28883
11 22	0.52163	22628	81565	29060	65925	0.08513	34979	49568	23052	75276	58506
12 21	0.43404	77172	01846	93960	33193	0.08989	03729	57357	83307	21247	89504
13 20	0.34214	94065	38881	48625	38122	0.09375	38755	46813	81356	59083	54145
14 19	0.24685	06588	50205	30441	62414	0.09668	56089	48002	60056	03781	47706
15 18	0.14909	35968	13647	49491	43818	0.09865	64365	40761	77717	06511	64243
16 17	0.04996	47250	46593	25230	62977	0.09964	67715	01276	77763	49390	84748
N= 33											
1 33	1.00000	00000	00000	00000	00000	0.00189	39393	93939	39393	93939	39393
2 32	0.99305	63584	33658	34366	73360	0.01164	84483	92267	73465	12221	79970
3 31	0.97678	61633	16906	30148	56276	0.02086	46090	17603	36009	58116	64102
4 30	0.95139	34513	96995	74337	55244	0.02988	10459	16746	47751	99711	56454
5 29	0.91711	73034	50941	24082	56790	0.03861	78147	11813	96756	38580	75675
6 28	0.87427	81007	50562	22064	65606	0.04699	38504	61024	17054	79731	12041
7 27	0.82327	59230	04067	46955	90713	0.05493	10594	42626	96795	16988	41306
8 26	0.76458	70017	93527	62800	65584	0.06235	53678	52465	30544	10609	95167
9 25	0.69875	93166	83162	58669	96772	0.06919	74694	94016	14755	99697	96800
10 24	0.62640	74912	81268	25726	38313	0.07539	34869	23973	82850	71299	18402
11 23	0.54820	70599	19111	62311	04047	0.08088	55721	93455	09217	97076	96772
12 22	0.46488	81616	32106	75597	30037	0.08562	24485	31813	13255	01919	63745
13 21	0.37722	87242	53393	63504	19346	0.08955	98897	47077	40066	11484	62725
14 20	0.28604	72014	87674	04160	53445	0.09266	11334	42241	46352	99351	20285
15 19	0.19219	49314	67477	22574	13069	0.09489	72243	94591	81582	43554	14662
16 18	0.09654	81881	76107	00631	69577	0.09624	72849	72385	46199	65544	94277
17 17	0.00000	00000	00000	00000	00000	0.09669	87101	02716	55896	00328	08469

lobatto-Gauss の数値積分公式の分点と重率 (5)

次数	分点	重率
N= 34		
1 34	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00178 25311 94295 90017 82531 19429
2 33	0.99346 43625 87516 20225 45612 40605	0.01096 47408 18306 55140 14749 43613
3 32	0.97814 66888 79937 94894 52246 60709	0.01964 62781 60713 43128 79470 82480
4 31	0.95423 06489 12807 52840 72431 62714	0.02815 05368 62243 50340 07521 77107
5 30	0.92192 82956 77448 92274 28067 21208	0.03640 67709 50782 55235 07921 21483
6 29	0.88152 30365 12273 26439 84763 84507	0.04434 29020 60244 34230 02727 93043
7 28	0.83337 24428 03142 61491 23419 75411	0.05188 92918 30927 12077 58399 06078
8 27	0.77789 73064 31867 41088 20368 18966	0.05897 96540 26745 22669 54388 37677
9 26	0.71558 59607 20219 00599 72505 72580	0.06555 16901 08265 12043 04383 24044
10 25	0.64698 60079 36014 62437 71863 37875	0.07154 76498 77072 88203 55890 88610
11 24	0.57270 03112 74922 84479 09321 91633	0.07691 48430 63590 98210 50759 17507
12 23	0.49338 16986 73270 95743 64890 15900	0.08160 61038 50422 38316 20689 97327
13 22	0.40972 72265 69592 74485 73779 04112	0.08558 02059 71977 58659 01271 52714
14 21	0.32447 20545 11488 99357 74670 69213	0.08880 22522 83584 03211 81584 43217
15 20	0.23238 29848 69116 84306 33476 81560	0.09124 38468 06914 48702 24395 11913
16 19	0.14025 17241 76193 85837 13092 89246	0.09288 36136 29610 64614 36856 76309
17 18	0.04688 79257 12970 68008 68391 47662	0.09370 71155 04303 31200 16259 07441
N= 35		
1 35	1.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.00168 06722 68907 56302 52100 84033
2 34	0.99383 74436 44386 55028 66252 99449	0.01033 94733 14540 37621 13648 87317
3 33	0.97939 11434 29920 62318 89112 08488	0.01853 13934 76282 05748 15639 05081
4 32	0.95682 70584 36267 86243 75719 14596	0.02656 53953 30778 21594 76015 31047
5 31	0.92633 39320 16081 93613 46652 04333	0.03437 86678 30410 70216 99668 57426
6 30	0.88816 47537 17950 45509 20728 48744	0.04190 61082 04587 88073 61251 93349
7 29	0.84263 52953 92199 78245 94196 56744	0.04908 78634 37218 27324 44696 76274
8 28	0.79012 46570 84795 61954 49181 14183	0.05586 20298 89036 71572 33047 09242
9 27	0.73106 61783 78765 23895 38917 62188	0.06217 32958 15379 78224 51914 38191
10 26	0.66594 98438 65775 95733 92325 98169	0.06796 93688 73298 34540 31663 05826
11 25	0.59531 52320 80083 27405 40296 93892	0.07320 22232 74018 84753 31320 32736
12 24	0.51974 76460 62201 66355 15332 86711	0.07782 84991 33511 15310 35916 16257
13 23	0.43987 32641 31717 00276 01591 02077	0.08180 98623 35847 83327 00825 40000
14 22	0.35635 39515 65454 07572 35528 52357	0.08511 33224 37326 04026 70994 48839
15 21	0.26988 17763 81720 79189 42665 60159	0.08771 15061 59071 95551 13116 86202
16 20	0.18117 32747 65601 66645 17475 69410	0.08958 28842 73716 90871 18035 24731
17 19	0.09096 35136 96700 41114 88685 54105	0.09071 19500 36822 49293 93966 42659
18 18	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000	0.09108 93476 98489 71095 10958 40359

$$P'_{m+1}(x) = \left(\frac{2m+1}{m}\right) x P'_m(x) - \left(\frac{m+1}{m}\right) P'_{m-1}(x)$$

$$m=1, 2, \dots, n-2 \quad (12)$$

$$P'_0(x)=0, P'_1(x)=1$$

および関係式

$$P_{n-1}(x) = \frac{xP'_{n-1}(x) - P'_{n-2}(x)}{(n-1)} \quad (13)$$

$$P'_{n-1}(x) = \frac{(n-2)xP'_{n-1}(x) - nP'_{n-2}(x)}{(x^2-1)} \quad (14)$$

から計算できる。これらの式から $P'_{n-1}(x)$, $P'_{n-1}(x)$ を計算すればよいわけであるが、 n が小さいときは、(12)式から多項式を求めて、その多項式から計算したほうが計算量は少なくてすむ。しかし、多項式はけた落ちがはげしくて、 $n > 56$ では、50 けたの計算で 30 けたの精度が保てなくなった。(12)式は、そのままだと、 n が大きくと、あまり誤差がはげずに計算できる。

この計算は FACOM 230-30 MCP III FORTRAN で計算けた数を 50 に指定して行なった。プログラムは省略し、数値結果のみを示した。数表は $x_i = -x_{N-i}$,

$W_i = W_{N-i}$ であるから半分だけ示した。表の左が分点で右が重率である。

参考文献

- 1) 森口, 宇田川, 一松共著: 数学公式Ⅲ, 岩波書店, 1967, pp. 126, pp. 152.
- 2) F. B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, McGRAW-Hill Book Company, Inc., New York. Toronto. London, 1956, pp. 343~345.
- 3) H. H. Michles: Abscissas and Weight Coefficients for Lobatto Quadrature, Math. Comp., July 1963, Vol. 17, No. 83, pp. 237~244.
- 4) 山下: Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定, 情報処理, Vol. 5, No. 4, pp. 206~215.
- 5) 山下, 佐竹: Laguerre-Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定, 情報処理, Vol. 6, No. 4, pp. 216~220.
- 6) 山下, 佐竹: Hermite-Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定, 情報処理, Vol. 6, No. 5, pp. 266~270.

(昭和 46 年 5 月 6 日受付)