

ハイブリッド・アイソグラフ*

佐々木彬夫** 小沢保知***

Abstract

An Isograph is a single purpose analog hardware system for the solution of algebraic equations. Today the availability of digital computer is profuse and the solution of algebraic equations can be readily obtained to a great precision on a digital computer. Speed, and convenience in observing the constellation of the roots over the complex number plane, however, is still a concern to designers of linear systems.

Several innovations in Isograph are proposed in the paper and the hybrid system proposed will be much cheaper and yet faster a means in the linear system design work.

序論

代数方程式用の单用途アナログ計算機は早くから研究され、アイソグラフと呼ばれている¹⁾⁻¹²⁾。これは実係数の代数方程式 $w = f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$ を解くためのもので、大別すると w -平面型と z -平面型になる。 w -平面型ではダイヤルなどで z の値をセットし、これより $w = f(z)$ の値を合成表示観測して 0 かどうか調べ、0 でなければ z の値を変更して根を探して行く。これに対し、 z -平面型では z 平面上の根の分布が直接表示され、 $f(z)$ の w 平面上の挙動は表示されない。 z -平面型については電磁界の分布を利用するもの^{5), 10)} と CRT による表示方法^{7), 8)}が提案されている。前者は 2 次元の導電面の適当な点に適当な電流を供給して、根の位置に対応する点で電位や電位傾度が 0 になることを原理とし、後者は z 平面上の根の分布を CRT 上に表示するものである。筆者らは 1953 年より変数面根表示法の研究を行ないその特許を取得した⁷⁾、が後になり類似の試みを知った⁸⁾。この基礎的な実験は北海道大学と東洋通信機株式会社において行ない、これらの手法が実用的であるとの確信を得た。本論文では、 z 平面型アイソグラフに共通の問題である変数変換の自動化の方法と、演算速度がディジタル計算よりも大幅に向かうと思われるハイブリッド・システム

ムを提案する。代数方程式を解くことに話を限定すれば、汎用の計算機よりも本論文提案のシステムのほうが低価格であり、かつ演算速度も速い。

代数方程式の根は複素数平面全面に分布しており、根の絶対値も大小さまざまであるが、 z -平面型アイソグラフで根を求める際表示器が有限の大きさであるため、絶対値の大きな根は表示しにくい。根の絶対値が大きな場合には、手計算による変数変換により根を数平面上の原点近傍に移動させ表示するのが普通である。変数変換の自動化に関しては、電解槽を用いた電磁界分布型のものが報告されているが^{7), 10)}、CRT を用いた電子式のものについては著者の知る限りではまだ報告がない。本論文では $z' = p/z$, $z' = p(z-q)$, $z' = (j-z)/(j+z)$ 並びにこれらの変換の組合せの自動化を提案する。 p は任意の実定数で q は任意の複素定数である。

z -平面型アイソグラフの表示器は、複素数平面の原点中心の単位円内と周上を表示するのが普通であり、 $z' = p/z$ は数平面を半径 p の円の内外に分けて表示することを意味し、 $z' = p(z-q)$ は根 $z = q$ の近傍に目を移し、拡大鏡を用いて（倍率 p ）表示するものである。最後の変換は z 平面の実軸を含む上半を z' 平面の原点中心の単位円内と周上に写像するもので、いわば、全平面上の根の分布の鳥瞰図を表示するものである。鳥瞰図方式と移動拡大鏡方式の組合せも自動化可能である。原点移動を伴う変換の自動化には移相器が必要であり、方程式の係数が複素数の場合にも移相器が必要となる。本論文で提案の各方式ともシミュ

* Hybrid Isograph, by Akio Sasaki (Nikkei Electronics) and Yasutomo Ozawa (Faculty of Engineering, Hokkaido University)

** 日経エレクトロニクス

*** 北海道大学工学部

レーションでその原理は確認すみである。

単純なアイソグラフ

n 次の代数方程式で z^k の実係数を a_k とし、両辺に z を掛けて（直流の伝送を避けるため）極座標で表記すると

$$\sum_{k=0}^n a_k r^{k+1} \cos(k+1)\theta + j \sum_{k=0}^n a_k r^{k+1} \sin(k+1)\theta = 0 \quad (1)$$

(1)式の根の分布を CRT に表示するには、 r と θ を表わすアナログ量より (1) 式の実数部と虚数部を表わす信号を作ってそれぞれの大きさを終始観測する一方、 (r, θ) が数平面の表示対象部分をくまなく走査するように変化させて行き、かつ CRT のスポットを時々刻々座標 (r, θ) に偏向してやり、上記実数部と虚数部の符号により適宜の輝度変調をすればよい。第1図にこの方式用の金物構成の一例と第2図に方程式の解のシミュレーションを示す。数平面上で (1)

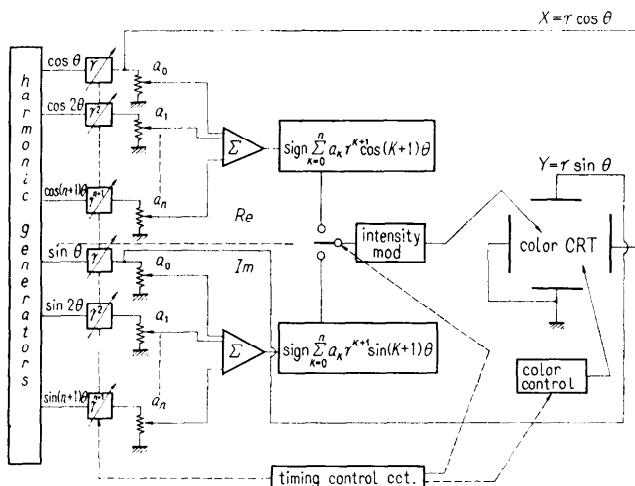


Fig. 1 A hardware configuration for the simple Isograph.

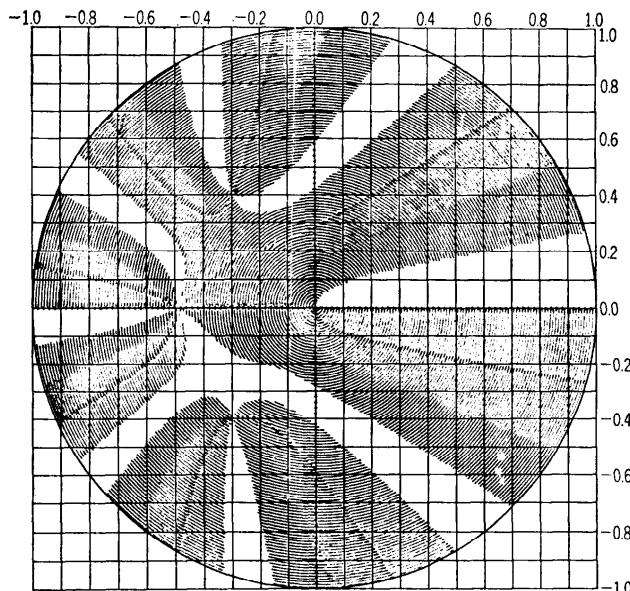


Fig. 2 Solution of $(z+0.5)^3(z+0.3 \pm j0.4)^2=0$ on the simple Isograph simulated by digital plotter.

式の実数部と虚数部がそれぞれ負の領域が CRT 管面で赤と青に光り、根は赤い領域と青い領域の縁端の交点として表示される。交点上では両者とも 0 というわけである。

γ と θ を表わす量は何でもよいが、(1)式の形から高調波発生器の正弦波出力と余弦波出力で $\pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を表わし、 γ^* はボテンショメータまたは整数比の容量の C の充電電流¹¹⁾ を用いるのがよいであろう。 γ と θ の変化範囲が原点中心の単位円内をカバーするように組み合わせるのである。

第2図には $-0.3 \pm j0.4$ に2重根、 -0.5 に3重根のある場合の解が表示されているが、一般に m 重根の点では実数部と虚数部の符号を表わす領域の縁端が 2π を $4m$ 等分する性質があり¹¹⁾、これは変数変換に関係ない。 $f(z)$ の m 重根を z_0 とすると

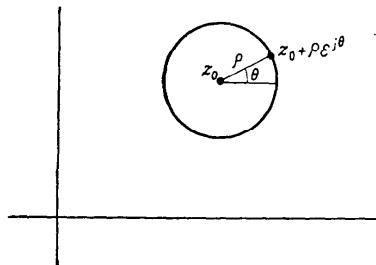


Fig. 3 $z = z_0 + \rho e^{j\theta}$ on the circle around $z = z_0$.

$$f(z) = (z - z_0)^m \prod_{k=m+1}^n (z - b_k) \quad (2)$$

m 重根の周辺の様子を見るため第3図のような半径 ρ の円を考えると、円周上では $z = z_0 + \rho e^{j\theta}$ ゆえ

$$f(z) = C \rho^m e^{jm\theta} \prod_{k=m+1}^n (1 + C_k \rho e^{j\theta}) \quad (3)$$

ただし

$$C_k = \prod_{k=m+1}^n (z_0 - b_k), \quad C_k = 1/(z_0 - b_k)$$

(3)式の連乗積を展開したものを $1 + \xi(\rho, \theta) + j\eta(\rho, \theta)$ 、 C を $\alpha + j\beta$ 、 $e^{jm\theta}$ を $\cos m\theta + j \sin m\theta$ と書くと実数部と虚数部は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_{I_m}[f(z)] &= \rho^m \left[[1 + \xi(\rho, \theta)] \left(\frac{\alpha}{\beta} \cos m\theta \mp \frac{\beta}{\alpha} \sin m\theta \right) \right. \\ &\quad \left. \mp \eta(\rho, \theta) \left(\frac{\beta}{\alpha} \cos m\theta \pm \frac{\alpha}{\beta} \sin m\theta \right) \right] \end{aligned}$$

$\rho \rightarrow 0$ のとき $\xi(\rho, \theta)$ と $\eta(\rho, \theta)$ は 0 に収斂するから、実数部と虚数部の符号を表わす領域の縁端部を表わす式は、 m 重根 z_0 の近傍ではそれぞれ

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(m\theta + \tan^{-1} \beta/\alpha) = 0 \quad (4)$$

となり、これは第2図の如く実数部=0 の軌跡と虚数部=0 の軌跡が m 重根の周囲では 2π を $4m$ 等分することを意味する。

解くべき方程式の z^k の係数が複素数 $A_k = a_k e^{jk\theta}$ で

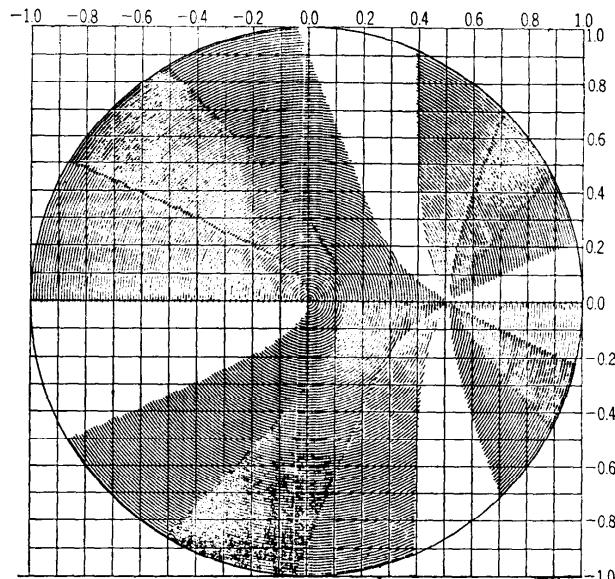


Fig. 4 Solution of $(z - 0.5)(z - 0.52 \pm j0.02) = 0$ on the simple Isograph simulated by digital plotter.

あるときは(1)式は

$$\sum_{k=0}^n a_k \gamma^{k+1} \cos[(k+1)\theta + \theta_k] + j \sum_{k=0}^n a_k \gamma^{k+1} \sin[(k+1)\theta + \theta_k] = 0 \quad (6)$$

となり、各周波数ごとに移相器が必要となる。複素係数の場合には複素根は共軛対にならないので、鳥瞰図方式の変数変換は有用でない。

移動拡大鏡方式アイソグラフ

第4図は単純なアイソグラフで近接した3根を求めた状態のシミュレーションであり、第5図は変数変換 $z' = p(z-q)$ により原点をこの3根の近傍へ移して20倍に拡大した場合である。この変換は次のようにして自動化できる。原点の移動先を $q = \gamma_0 e^{j\theta_0}$ とすると $z' = p(z - \gamma_0 e^{j\theta_0})$ 、すなわち $z = z' p^{-1} + \gamma_0 e^{j\theta_0}$ であり、 $f(z)$ を z' による表記に変換した後に z' を乗じ(直流の伝送を避けるためである)。

$$\sum_{k=0}^n a_k (p^{-1} \gamma' e^{j\theta'} + \gamma_0 e^{j\theta_0})^k \gamma' e^{j\theta'} = 0 \quad (7)$$

(7)式の実数部と虚数部が0の条件はそれぞれ

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{\rho=0}^k (s C_p p^{-\rho} \gamma_0^{k-\rho}) \gamma'^{\rho+1} \cos [(p+1)\theta' + (k-\rho)\theta_0] = 0 \quad (8)$$

係数 $s C_p p^{-\rho} \gamma_0^{k-\rho}$ は一定範囲の p と γ_0 に対してはポテンショメータなどで表わすことができる。また、 $(k-\rho)\theta_0$ を表わす移相器があれば、後は通常のアナログ演算要素で p と q をダイヤルで任意にセットして、自動的に変換 $z' = p(z-q)$ を行なうアイソグラフが構成できる。

鳥瞰図方式のアイソグラフ

上記2種のアイソグラフの共通の難点は、絶対値がある一定値以下の根しか表示できないことである。全根を表示するには $z' = (j-z)/(j+z)$ なる変換を行なえばよい。 $z = x + jy$, $z' = u + jv$ とすると

$$(1+u)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (9)$$

$$\left(u + \frac{y}{1+y}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \quad (10)$$

なる関係があり、 z 平面上の座標目盛は z' 平面では直交する円群に写像され、 z 平面の実軸を含む上半が z' 平面では原点中心の単位円内とその周に写像される(第6図の背景、これは電気工学でいうスミス图表と見掛けが似ている)。よって z' 平面で方程式を解けば原点中心の単位円内とその周上で、 z 平面上の実根のすべてと共軛複素根の一方に対応する根のすべてを

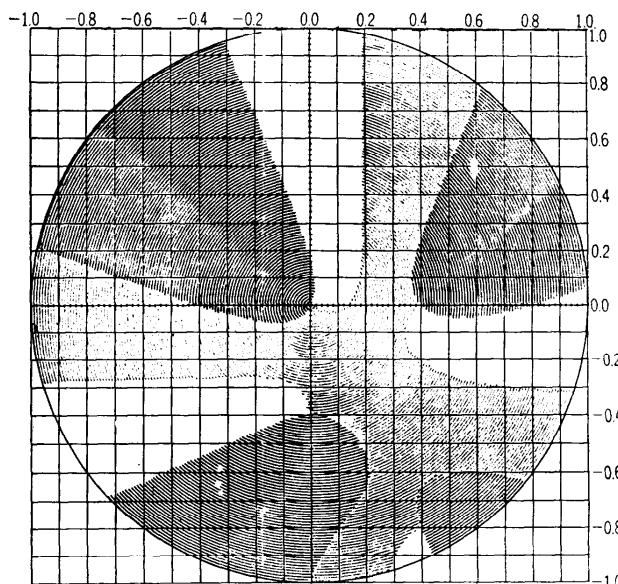


Fig. 5 Solution of $(z-0.5)(z-0.52 \pm j0.02)=0$ on the moving magnifier type Isograph with $p=20$, $q=0.5+j0.02$ simulated by digital plotter.

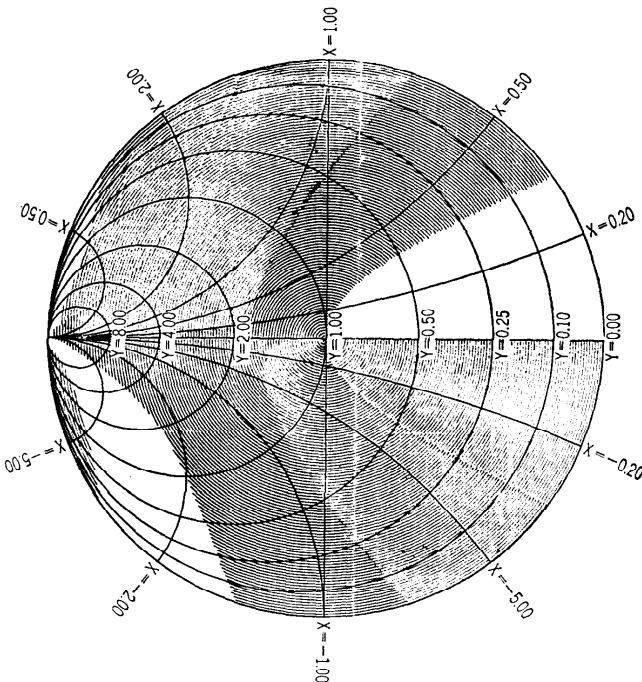


Fig. 6 Solution of $(z+50)(z-20 \pm j20)=0$ on the bird's eye view type Isograph simulated by digital plotter.

The transformation $z' = (j-z)/(j+z)$ maps the upper half and the real axis of the z plane onto the unit circle and its periphery around the origin on the z' plane.

見出すことができる。 z' から z への逆変換は CRT のスクリーンに第6図に示したようにマスクをかけておき、根の値を $x+jy$ として読みとることにより自動的に行なわれる。

$f(z)$ に変数変換を行なうと

$$\frac{1}{(1+z')^n} \sum_{k=0}^n a_k j^k (1-z')^k (1+z')^{n-k} = 0 \quad (11)$$

これと別な方程式 (12) を考えると (12) の根は

$$\sum_{k=0}^n a_k j^k (1-z')^k (1+z')^{n-k} = 0 \quad (12)$$

すべて (11) 式を満たし、また (11) 式の根のうち $z'=\infty \rightleftharpoons z=-j$ 以外の根は、すべて (12) 式を満たすので (11) 式の代わりに (12) 式を解いてもよいことがわかる。すなわち、(12) 式の根 z'_i は -1 でない ($\because z'=-1$ では (12) 式は $a_n j^{2n}$ なる値をとる) ので、 z'_i を (11) 式に代入しても $1/(1+z'_i) \cdot 0$ の形となり不都合は生じない。また $z=-j$ は興味の対象外である。直流伝送を避けるため (12) 式に z' を掛

けて多項式を展開すると

$$\sum_{k=0}^n a_k j^k \sum_{\rho=1}^{n+1} b_{kp} z'^{\rho} = 0 \quad (13)$$

(13) 式の実数部と虚数部について考えると

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{\rho=1}^{n+1} b_{kp} \gamma'^{\rho} \cos\left(\rho\theta' + \frac{k\pi}{2}\right) = 0 \quad (14)$$

(13) 式と (14) 式で B_{kp} は $(1-z')^k (1+z')^{n-k} z'$ を展開したときの z'^{ρ} の係数で、 b_{kp} は $\max B_{kp}$ で B_{kp} を割って得られる定数である。 b_{kp} は方程式の最大次数 n と変数変換 $z' = (j-z)/(j+z)$ で決まるシステム固有の定数であり、 $f(z)$ の係数とは関係がなく、これが自動化できる理由である。 $n=3$ の場合の b_{kp} の値を第1表に示す。(14) 式を前同様に CRT 上に表示することにより自動的に変換が行なわれる。第6図は z 平面上で原点から離れた根のある方程式の鳥瞰図方式のアイソグラフによる解のシミュレーションである。

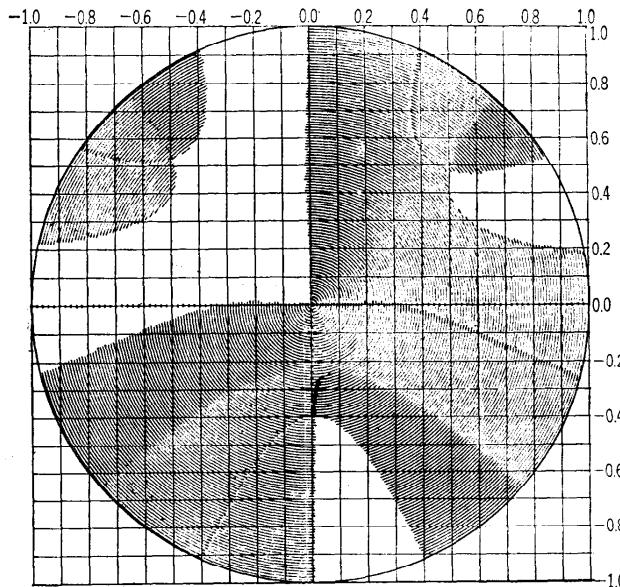


Fig. 7 Solution of $(z+50)(z-20 \pm j20)=0$ on the complex type Isograph simulated by digital plotted.

Table 1. Values of b are independent of the coefficients of the equation solved there by the bird's eye view transformation can be automated.

$k \setminus \rho$	4	3	2	1
0	1/3	1	1	1/3
1	-1/3	-1/3	1/3	1/3
2	1/3	-1/3	-1/3	-1/3
3	-1/3	1	-1	1/3

移動拡大鏡つき鳥瞰図方式

鳥瞰図方式のアイソグラフで一応全根を表示できるが、第6図よりわかる如く写像の密度は一様でなく、また z' 平面の原点中心の単位円上に現われる実根の表示もよくわからない場合がある。よって (12) 式にもう一度 $z'' = p(z' - q')$ なる変換を施して z' 平面上で拡大鏡を移動する方式をとれば、すべての根が表示されていて、かつそれらを拡大して観測できることとなり便利である。この過程も自動化が可能であり第7図は第6図と同じ方程式の全根表示を原点を $(-1, 0)$ に移動して10倍に拡大して見た場合のシミュレーションである。第6図は (12) 式に z' を乗じた (13) 式

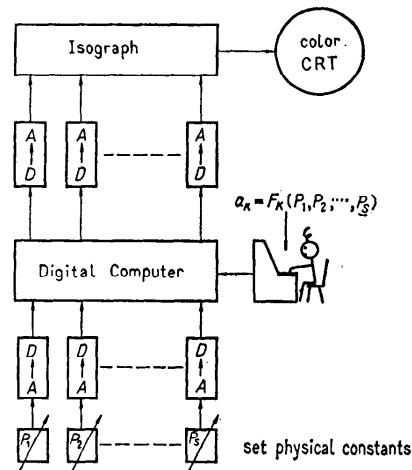


Fig. 8 Proposed hybrid system for designing linear system.

の表示であり、第7図は (12) 式に $z'' = p(z' - q')$ を施してから z'' を乗じて解いたものなので表示パターンの形は異なっているが、根の配置は正確に10倍に拡大表示されている。

$z'' = p(z' - q')$ で $q' = \gamma_0' e^{j\theta_0'}$ とすると $z' = z'' p^{-1} + \gamma_0' e^{j\theta_0'}$ 、(12) 式にこの関係を代入し、直流伝送を避けるために z'' を乗ずると

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{\rho=1}^{n+1} B_{k\rho} j^k (\gamma'' \varepsilon^{j\theta''} p^{-1} + \gamma_0 \varepsilon^{j\theta_0''})^{\rho-1} \gamma'' \varepsilon^{j\theta''} = 0 \quad (15)$$

多項式を二項展開し、実数部と虚数部を極座標表示して

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\rho=1}^{n+1} b_{k\rho} \sum_{s=0}^{\rho-1} C_s p^{-s} \gamma_0'^{(\rho-s-1)} \gamma''^{s+1} \\ & \times \frac{\cos}{\sin} [(s+1)\theta'' + (\rho-s-1)\theta_0' + \frac{k\pi}{2}] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式の表示も移相器があれば後は通常のアナログ演算要素で可能である。すなわち、 p 、 γ_0' 、 θ_0' 、および a_k をダイヤルで任意にセットするだけで変換 $z' = (j-z)/(j+z)$ 、および $z'' = p(z'-q')$ を行ない鳥瞰図方式の表示を部分的に拡大してながめるアイソグラフが構成できる。

変数変換に伴う誤差

一般にアナログ演算の誤差はディジタル演算の誤差よりも大きいので、計算が複雑なときは誤差の検討が大切である。上記の移動拡大鏡方式では根の分布が拡大表示されるので、接近した根は分離して見え、単独の根もスケールが p 倍に拡大されて精度よく表示されるが、誤差はそのときの金物全体の総合表示誤差の $1/p$ におさまる。

すなわち、単純なアイソグラフで真の根を z_0 、誤差を ε 、表示値を z_0 とすると $z_0 = z_0 + \varepsilon$ となる。使用者はこれを見て、原点を z_0 に移して移動拡大鏡モードで計算を行なうので $z' = p(z - z_0) = p(z - z_0 - \varepsilon)$ 。したがって $z = z_0$ の根は $-p\varepsilon$ となるが、移動拡大鏡モードのときの表示誤差を η とすると $-p\varepsilon + \eta$ として表示される。使用者はこの表示値より $z = z'/p + q$ としてその根の z 平面における値を手計算で求めるので、 $(-p\varepsilon + \eta)/p + z_0 = -\varepsilon + (\eta/p) + (z_0 + \varepsilon) = z_0 + \eta/p$ が求まる。これは z' 平面における表示誤差が表示の拡大率 p 倍だけ改善されて根が求まることを意味する。

鳥瞰図方式と移動拡大鏡方式の組合せの場合にも表示誤差は表示の拡大率 p 倍だけ改善されて z' 平面上の根の位置が求まる。

ハイブリッド・システムの提案

代数方程式を解くのが必要なのは、線型の物理系が与えられてその特性方程式の根を求めることと、逆に複素数平面上の根の分布が望ましい形の特性方程式に

対応する物理系の定数を求めるこどもシステムの設計に必要である。システムの物理定数と特性方程式の係数の間には、一般には複雑な関数関係がある。すなわち、

$$a_k = F_k(p_1, p_2, \dots, p_s) \quad k=0, 1, \dots, n \quad (16)$$

p_1, \dots, p_s はシステムの物理定数である。システムの設計とは応答が所要の条件を満たすように特性方程式の根の分布を決め、それに対応する物理定数を求めるということであるが、この手続きは以下に提案するハイブリッド・システムにより設計がきわめて簡単になるであろう。

第8図で使用者はシステムの物理定数を s 個のダイヤルでセットし、これがディジタルな形でミニコンピュータに行き、一方、使用者は会話モードで F_k の定義をターミナルから入れて行く。ミニコンのソフトウェアは最初使用者に F_k の定義を一つづつ聞いて行くようになっており、また使用者が割込みボタンを押すことにより、任意の時点で F_k を再定義できる。ミニコンの出力は特性方程式の係数であり、アイソグラフは直ちに根の分布を表示するので、使用者は直ちにシステムの物理定数の変化の影響を知ることができます。

第8図のシステムで CRT 管面の表示については、本論文で示したシミュレーションから 100 回巻きくらいの渦巻走査で実用上充分と思われるが、毎秒 1 回の表示を行なうには、実数部と虚数部をそれぞれ 0.5 秒ごとに表示するので $\sin \theta$ は 200 Hz ということになる。したがって、10次のシステムには 2.2 kHz までの高調波を扱えばよい。また(16)式の各 F は FORTRAN で 1 行程度とすれば、各 a_k の計算を 1 秒以下で終えるのは容易である。

よってシステムの物理定数の変化に対応する特性方程式の根軌跡を調べる設計作業を行なう場合、第8図のハイブリッド・システムでは物理定数をダイヤルで設定すると 1 秒前後で直ちに新しい根の分布が求まる。これは通常のディジタル計算機による解よりも早く、かつ第8図のシステムは上記のような設計作業を行なえる汎用ディジタル計算機よりも安価であろう。

むすび

z 平面の根表示の方法をシミュレーションにより確認、重根の表示の特徴を調べ、2, 3 の変数変換の自動化を提案しシミュレーションによりその原理を確認

した。表示原点の移動と複素係数の方程式には移相器が必要であるが鳥瞰図方式は移相器なしで実現できる。 γ_0 のべき演算は限られた大きさの γ_0 に対してのみ可能であるので、移動拡大鏡方式では表示可能な根の絶対値は限られるが、最後の方式では z'' 平面上で $0 \leq \gamma_0 \leq 1$ の範囲のべき演算により z 平面上で任意の大きさの根の近傍に原点の移動拡大表示が可能である。

本システムで得られる根の精度は CRT の偏向系の精度が限度であるから、根を高精度で求める必要のあるときには本システムで根の大体の位置を能率よく見定めてから、ディジタル計算をするのがよい。

根の分布が迅速かつ低コストで見定められるので本文中で提案したハイブリッド・システムを用いれば、汎用のディジタル計算機を用いるよりもはるかに早く、かつ安く線型システムの設計を行なうことができる。

本文中のシミュレーションは IBM の計算センターで行なったもので、プログラムは全文 Fortran IV で書かれている。 (r, θ) が渦巻状に数平面をスイープして行く途上で実数部の計算を行なって、正負をカルコンプデータプロッタのペンのアップダウンでプロットし、次に実数部の渦巻の間にはいるような渦巻きでスイープして、別の色のインクで虚数部のプロットを行なった。

謝 辞

この研究は文部省科学研究費により、昭和31年ころ筆者らが北海道大学応用電気研究所で開始し、最近ここに記した段階に至ったものである。昭和33年ころ東洋通信機株式会社は基礎的実験の機会を与えられ、また電子技術総合研究所は昭和40年に本文中のシミュレーションの機会を与えられたことを感謝します。なお著者の一人はハイブリッド・システムの着想に関し東京大学鶴坂教授よりヒントをいただき¹³⁾、また本文中

(2)～(4) 式に関し北海道大学加地教授よりご教示賜わったことを感謝いたします¹¹⁾。

参考文献

- 1) R. L. Diezold: "The Isograph", Bell Lab. Rec., Vol. 16, No. 4, pp. 130 (December 1937).
- 2) H. C. Hart & I. Travis: "Mechanical Solution of Algebraic Equations", JFI, pp. 63～72 (Jan. 1938).
- 3) A. H. Schooley: "An Electro-Mechanical Method for Solving Equations", RCA Rev., pp. 86～96 (July 1938).
- 4) 田中、永井: "ブラウン管による代数曲線表示器", 信学誌 194, pp. 217～221 (1939).
- 5) 伊藤、日比野: "電気演算器", 電気試験所調査報告 120 号(1940), 1940 年以前の文献の広汎なる調査報告.
- 6) S. L. Brown & L. L. Wheeler: "A Mechanical Method for Graphical Solution of Polynomials", JFI, pp. 223～243 (March 1941).
- 7) B. O. Marshall: "The Electronic Isograph for Roots of Polynomials", J. App. Phys., Vol. 21, No. 4, pp. 307～312 (1950).
- 7') 小沢、国藤: "電解槽による高次代数方程式の解法", 3 学連大 1 (1955).
小沢、佐々木: "変数面表示求根機", 信学北海道支部大会 1 (1956).
小沢、佐々木: "代数方程式求根機", 特許260941 (昭34).
- 8) Löfgren: "Analog Computer for the Roots of Algebrain Equations", Proc. IRE, pp. 907～913 (July 1953).
- 9) 喜安、山田、石森、大西: "高次方程式解法機(アイソグラフ)", 信学誌, Vol. 36, No. 8, pp. 424～429 (1953).
- 10) 国藤: "電解槽による高次方程式の解", 北海道大学修士論文 (1955).
- 11) 加地: 北海道大学, 面談 (1956).
- 12) A. Sasaki: "A New Type of Electronic Iso-graph", 北海道大学修士論文 (1957).
- 13) 鶴坂: 東京大学, 面談 (1969. 10).

(昭和 46 年 7 月 10 日受付)