

# ポートフォリオ最適化問題における縁付きヘッセ行列の極値判定を用いたGAの初期解決定法の有効性

折登 由希子<sup>1,a)</sup> 蔵澄 亨<sup>2</sup> 山本 久志<sup>2</sup> 辻村 泰寛<sup>3</sup>

**概要:** ロングのポジションをとるアセットの投資配分比率は0から1の間の実数値で表されるが、ポートフォリオの最適化に実数値型個体表現の進化計算を適用する場合、与えられる実数値範囲の両端の値を取る確率は極めて低い。これは、ポートフォリオへのアセット非選択（投資配分比率0）の操作を取り入れることが難しいという問題点を示唆している。そこで本研究では、二変数の縁付きヘッセ行列の極値判定を用いて目的関数インフォメーションレシオを極大にするアセットの選択と投資配分比率の決定を繰り返し、それらを初期個体集団に導入したGAを適用することでポートフォリオのアセット選択と最適化を効果的に示す。

**キーワード:** ポートフォリオ最適化, インフォメーションレシオ, 縁付きヘッセ行列, GAの初期個体集団

## Usefulness of GA with Initial Solutions Given by Bordered Hessian in Portfolio Optimization Problems

YUKIKO ORITO<sup>1,a)</sup> TORU KURAZUMI<sup>2</sup> HISASHI YAMAMOTO<sup>2</sup> YASUHIRO TSUJIMURA<sup>3</sup>

**Abstract:** In the portfolio optimization problems, the proportion-weighted combination is represented as a real-valued array between 0 and 1. While applying any evolutionary algorithm, however, the algorithm hardly takes the ends of a given real value. It means that the evolutionary algorithms have a problem that they can not control the asset unselection which the weights are represented as 0. In order to avoid this problem, we propose an asset selection method using the extreme value method of bordered hessian and an asset allocation method using the GA in this paper. In the numerical experiments, we show that our GA with initial population consisting of the solutions obtained by the extreme value method and the solutions given at random works well even if the portfolio consists of the large number of asset.

**Keywords:** Portfolio Optimization, Information Ratio, Bordered Hessian, Initial Population of GA

### 1. はじめに

ポートフォリオ最適化問題は、与えられた目的関数を

最小化あるいは最大化するよう、ポートフォリオに組み入れられた個々のアセットの投資配分比率を決定する問題である。この問題に対して、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm; GA), シミュレーテッドアニーリング, タブーサーチ, ローカルサーチ, 分布推定に基づくアルゴリズムなど様々な進化計算を適用した多くの研究報告がある [1], [2], [3], [4], [5]。これらの研究報告では、個々のアセットの投資配分比率を0から1の間の実数値で表現し、実数値型の個体を操作する進化計算により最適化を行っている。しかしながら、進化計算の個体生成の過程で個体の

<sup>1</sup> 広島大学 大学院社会科学部 社会経済システム専攻  
Department of Economics, Graduate School of Social Sciences, Hiroshima University,  
1-2-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima 739-8525, Japan

<sup>2</sup> 首都大学東京 大学院システムデザイン研究科  
Faculty of Systems Design, Tokyo Metropolitan University

<sup>3</sup> 日本工業大学 情報工学科  
Department of Computer and Information Engineering, Nippon Institute of Technology

a) orito@hiroshima-u.ac.jp

変数が実数値の両端を取る確率は極めて小さい。これは、ポートフォリオ最適化問題への進化計算の適用において、アセットの非選択を表す投資配分比率 0 を考慮することが難しいという問題を示唆しており、進化計算の適用によりアセット選択(アセットセレクション)と最適化(アセットアロケーション)の操作を同時に取り入れることは難しい。

この問題を解決するため、進化計算を用いてポートフォリオへのアセット選択と最適化の両操作を行う手法が提案されている。Aranha and Iba[6] は、アセットの選択/非選択を 1/0 のバイナリ表現、アセットの投資配分比率を実数値型表現とした二種の表現をもつ個体を提案し、GA を適用している。一方、折登ら [7] は、ポートフォリオのパフォーマンスに対するアセットの必要度に関する定量的な性質を導出し、この性質を利用して必要度が高いアセットをポートフォリオへ選択し、必要度が低いアセットをポートフォリオから削除するというアセットの動的選択操作を行う GA を提案している。しかしながら、これらの研究報告においても、与えられた全てのアセットに対してポートフォリオへの選択・非選択を繰り返しており、目的関数を最小化/最大化することを保証するアセットを効果的にポートフォリオへ選択できている訳ではない。また、進化計算の初期個体集団はランダムに生成されており、アセット数が増加するほど投資配分比率の組合せ数も増加し、最適解を得ることが困難になる。

そこで本研究では、ポートフォリオへの効果的なアセット選択と最適化の方法として、二変数の縁付きヘッセ行列の極値判定により目的関数であるインフォメーションレシオを極大化することを保証するアセットの性質を提案し、その性質を利用してアセットをポートフォリオへ選択する操作を繰り返すアセット選択方法を提案する。さらに、このアセット選択方法により得られた解を初期個体集団に導入した GA を適用することで、効果的にポートフォリオの最適化を行えることを示す。

東京証券取引所を対象とした数値実験において、提案手法が従来の GA だけでなく、提案手法において GA の初期個体集団の全個体を一様乱数で生成した場合より効果的な解探索を行えることを示す。

## 2. ポートフォリオ最適化問題

ポートフォリオ最適化問題の定式化にあたり、本研究で使用する記号とその意味を以下に定義する。

$M$  : ポートフォリオへの組入れ候補となる全アセット数。

$i$  : アセット  $i$  ( $i = 1, \dots, M$ )。

$A$  : 全アセットの集合  $A = \{1, \dots, M\}$ 。

$X$  : ポートフォリオに組み入れられたアセットの集合  $X = \{1, \dots, \#X\}$  ( $X \subseteq A$ )。但し、 $\#X$  は集合  $X$  の要素数を表す。

$t$  : 時点  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ )。

$r_B(t)$  : 時点  $t$  におけるベンチマーク指数の増減率。

$r_i(t)$  : 時点  $t$  におけるアセット  $i$  のリターン。

$w_i$  : ポートフォリオに組み入れられたアセット  $i$  の投資配分比率。但し、本研究では空売りを認めないため  $0 \leq w_i \leq 1$  となる。

$w$  : アセットの集合  $X$  のポートフォリオ  $w = (w_1, \dots, w_{\#X})$ 。

$r_w(t)$  : ポートフォリオ  $w$  の時点  $t$  におけるリターン。

$$r_w(t) = \sum_{i \in X} w_i \cdot r_i(t)$$

ベンチマーク指数に対するポートフォリオのパフォーマンスを評価する代表的指標として、平均分散モデルをもとにしたインフォメーションレシオが挙げられる。ポートフォリオのインフォメーションレシオが高いとき、そのポートフォリオはベンチマーク指数の変動率に対して小さなリスクで大きなリターンを得るポートフォリオであると云える。本研究では、ベンチマーク指数に対するポートフォリオの超過リターンを  $r_d = (r_w(1) - r_B(1), \dots, r_w(T) - r_B(T))$  としたとき、目的関数であるポートフォリオ  $w$  のインフォメーションレシオを次式で定義する。

$$IR_w = \frac{avg(r_d)}{\sqrt{var(r_d)}} \quad (1)$$

ここで、 $avg(r_d)$  は  $r_d$  の平均、 $var(r_d)$  は  $r_d$  の分散を表す。

以上より、インフォメーションレシオの最大化を目的とした本研究のポートフォリオ最適化問題を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \max_w IR_w & \quad (2) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^M w_i = 1, \\ & w_i \geq 0. \end{aligned}$$

## 3. 縁付きヘッセ行列の極値判定によるアセット選択と GA によるポートフォリオ最適化

### 3.1 縁付きヘッセ行列の極値判定によるアセット選択

#### 3.1.1 アセット選択方法

本研究で提案する縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したアセット選択方法は、目的関数であるインフォメーションレシオの極大化を保証するアセットをポートフォリオへ繰り返し選択する方法である。

まず、アセット選択操作プロセスの繰り返し回数を  $s$  (初期は  $s = 0$ ) と定義する。初期の全アセットの集合  $A$  のプロセス  $s$  における部分集合を  $X_s$  ( $X_s \subseteq A$ )、 $Y_s$  ( $Y_s \subseteq A$ ) と定義する。 $X_s$  が  $s$  回目のプロセスにおけるポートフォリオを構成するアセットの集合を表し、 $Y_s$  がそれ以外のアセットの集合を表す。本研究では以下、 $X_s$  をポートフォリオ集合、 $Y_s$  を候補集合と呼び、 $X_s$  のポートフォリオを  $w^{(s)} = (w_1, \dots, w_{\#X_s})$  と定義する。ここで、 $A = X_s \cup Y_s$

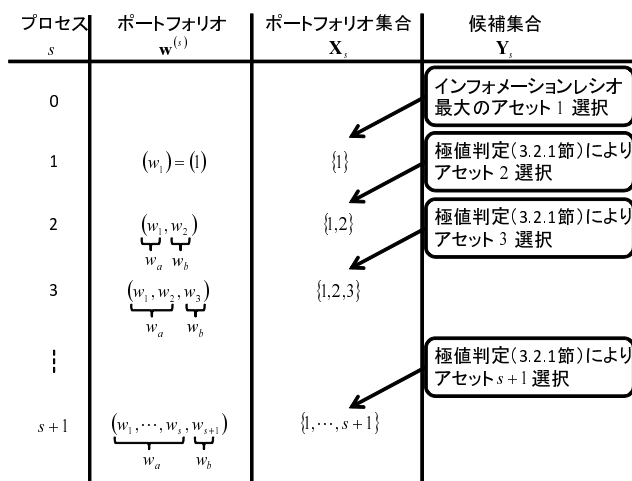


図 1 アセット選択操作プロセス  
Fig. 1 Process of Asset Selection.

かつ  $X_s \cap Y_s = \emptyset$  が成り立つ．アセット選択操作手順を以下に示し，図 1 にプロセスの推移を記述する．

(1) ポートフォリオの初期化

初期プロセス  $s = 0$  において，集合  $A$  に含まれる個々のアセットのインフォメーションレシオを算出する．最大のインフォメーションレシオを持つ 1 アセットをポートフォリオ集合へ選択し，便宜上  $X_{s+1} = \{1\}$  と記述する．このとき，ポートフォリオは  $w^{(s+1)} = (w_1) = (1)$  と表される．

(2) プロセス回数の加算

$s$  に 1 を加算する．

(3) 縁付きヘッセ行列の極値判定によるアセット選択

候補集合  $Y_s$  から抽出した個々のアセットをポートフォリオ集合  $X_s$  と組み合わせ，3.1.2 節で後述する縁付きヘッセ行列の極値判定により最大のインフォメーションレシオとなる 1 アセットを選択し，それを  $X_s$  へ組み入れてポートフォリオ集合  $X_{s+1}$  として更新する．ここで，ポートフォリオ集合  $X_s$  を 1 アセットとみなしアセット  $a$ ，候補集合  $Y_s$  から選択する 1 アセットをアセット  $b$  と呼ぶ．

$s \geq 1$  のとき，1 回のプロセス  $s$  において 1 アセットのみが選択されるため，ポートフォリオは  $w^{(s+1)} = (w_1, \dots, w_{\#X_{s+1}}) = (w_1, \dots, w_{s+1})$  と表されるが，本研究ではこのポートフォリオをアセット  $a$  と  $b$  の 2 アセットのポートフォリオ  $(w_a, w_b)$  とみなすため，次式で正規化を行う．

$$\begin{aligned} w^{(s+1)} &= (w_1, \dots, w_s, w_{s+1}) \\ &= (w_a \cdot w_1, \dots, w_a \cdot w_s, w_b) \end{aligned} \quad (3)$$

(4) 終了条件

ポートフォリオ  $w^{(s+1)}$  のインフォメーションレシオ  $IR_{w^{(s+1)}}$  がプロセス  $s$  のそれに対して次式を満たす場合，これ以上のアセット選択によるインフォメーション

レシオの上昇は期待できないと考え，ポートフォリオ集合  $X_s$  とポートフォリオ  $w^{(s)}$  を本アセット選択方法より得られたポートフォリオの組入れアセットとポートフォリオとして抽出し，アセット選択操作を終了する．

$$IR_{w^{(s+1)}} \leq IR_{w^{(s)}} \quad (4)$$

式 (4) を満たさない場合，アセット選択操作手順 (2) に戻る．

3.1.2 縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したインフォメーションレシオを極大化するアセットの性質の提案

本節では，縁付きヘッセ行列の極値判定を利用して，アセット  $a, b$  の 2 アセットで構成されるポートフォリオのインフォメーションレシオを極大化するようなアセットの性質を提案する．

ここで，式 (2) と同様に，アセット  $a, b$  の 2 アセットで構成されるポートフォリオ  $w = (w_a, w_b)$  のインフォメーションレシオの最大化問題を次式で定義する．

$$\begin{aligned} \max_w IR_w \\ \text{s.t. } w_a + w_b = 1, \\ w_a \geq 0, w_b \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

本研究では，この問題を制約条件付き極値問題と捉え，ラグランジュの未定乗数法から得られた解に対して縁付きヘッセ行列の極値判定により極大値となる解を求める．ベンチマーク指数の変動率に対するアセット  $a, b$  の超過リターンをそれぞれ  $r_a = (r_a(1) - r_B(1), \dots, r_a(T) - r_B(T))$ ， $r_b = (r_b(1) - r_B(1), \dots, r_b(T) - r_B(T))$  と表し，式 (5) における制約  $w_a \geq 0, w_b \geq 0$  を満たすため  $w_a = v_a^2, w_b = v_b^2$  と変換すると，本研究での制約条件付き極値問題の目的関数  $f(w_a, w_b)$  と制約条件  $g(w_a, w_b)$  は次式で定義される．

$$\begin{aligned} f(w_a, w_b) &= \frac{\text{avg}(w_a r_a + w_b r_b)}{\sqrt{\text{var}(w_a r_a + w_b r_b)}} \\ g(w_a, w_b) &= w_a + w_b - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで，ラグランジュ乗数を  $\lambda$  としたとき，ラグランジュ関数  $L(w_a, w_b, \lambda)$  は次式で表現される．

$$L(w_a, w_b, \lambda) = f(w_a, w_b) + \lambda \cdot g(w_a, w_b) \quad (7)$$

極大値の判定は，ラグランジュ関数の縁付きヘッセ行列が正となることにより行われる．ラグランジュの未定乗数法による停留点  $(w_a, w_b, \lambda) = (\alpha, \beta, \lambda_0)$  とラグランジュ関数の縁付きヘッセ行列  $|H|$  を式 (8), (9) にそれぞれ示す．なお， $\text{cov}(r_a, r_b)$  はアセット  $a, b$  の超過リターン  $r_a, r_b$  の共分散を表す．

$$\begin{cases} w_a = \alpha = \frac{cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)avg(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_a)var(\mathbf{r}_b)}{U} \\ w_b = \beta = \frac{cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)avg(\mathbf{r}_a) - avg(\mathbf{r}_b)var(\mathbf{r}_a)}{U} \\ \lambda = \lambda_0 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$|H| = \frac{-U^3|U|}{K^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

但し、

$$U = cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)(avg(\mathbf{r}_a) + avg(\mathbf{r}_b)) - avg(\mathbf{r}_a)var(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_b)var(\mathbf{r}_a) \quad (10)$$

$$K = (cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)^2 - var(\mathbf{r}_a)var(\mathbf{r}_b)) \times (2cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)avg(\mathbf{r}_a)avg(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_a)^2var(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_b)^2var(\mathbf{r}_a)) \quad (11)$$

式(8), (9)より,  $U < 0$  かつ  $K > 0$  の条件のとき縁付きヘッセ行列  $|H|$  が正となり, インフォメーションレシオは式(8)から与えられる投資配分比率  $(w_a, w_b) = (\alpha, \beta)$  において極大となる.

本研究では,  $U < 0$  かつ  $K > 0$  の条件に対する計算の簡略化のため, ポートフォリオ  $\mathbf{w} = (w_a, w_b)$  のインフォメーションレシオを極大化するアセット  $a, b$  のシンプルな性質を, 性質1として以下に提案する.

#### 性質1

時点  $t = 1$  から  $t = T$  までのベンチマーク指数の変動率に対するアセット  $a, b$  の超過リターンをそれぞれ  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$  と表す.  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$  が式(12)の条件を満たすとき, 式(8)で与えられるポートフォリオ  $\mathbf{w} = (w_a, w_b)$  のインフォメーションレシオは極大となる.

$$\begin{cases} avg(\mathbf{r}_a)avg(\mathbf{r}_b) > 0 \\ cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \neq \sqrt{var(\mathbf{r}_a)}\sqrt{var(\mathbf{r}_b)} \\ U < 0 \end{cases} \quad (12)$$

#### 証明

式(9)より,  $U < 0$  かつ  $K > 0$  のとき縁付きヘッセ行列  $|H|$  が正となる.

$K$  を表す式(11)の一項目は, 式(12)における  $cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \neq \sqrt{var(\mathbf{r}_a)}\sqrt{var(\mathbf{r}_b)}$  の条件が成り立つとき, コーシー・シュワルツの定理から次式が成り立つ.

$$cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)^2 - var(\mathbf{r}_a)var(\mathbf{r}_b) < 0$$

また, 同様に, 式(11)の二項目は, 式(12)における  $avg(\mathbf{r}_a)avg(\mathbf{r}_b) > 0$  の条件が成り立つとき,

$$2cov(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)avg(\mathbf{r}_a)avg(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_a)^2var(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_b)^2var(\mathbf{r}_a)$$

$$\begin{aligned} &< 2\sqrt{var(\mathbf{r}_a)}\sqrt{var(\mathbf{r}_b)}avg(\mathbf{r}_a)avg(\mathbf{r}_b) \\ &\quad - avg(\mathbf{r}_a)^2var(\mathbf{r}_b) - avg(\mathbf{r}_b)^2var(\mathbf{r}_a) \\ &= -\left(\sqrt{var(\mathbf{r}_a)}avg(\mathbf{r}_b) - \sqrt{var(\mathbf{r}_b)}avg(\mathbf{r}_a)\right)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

が成り立つことにより,  $K > 0$  が示される.

以上より,  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$  が式(12)の条件を満たすとき,  $U < 0$  かつ  $K > 0$  により縁付きヘッセ行列  $|H|$  が正となり, 式(8)で与えられるポートフォリオ  $\mathbf{w} = (w_a, w_b)$  のインフォメーションレシオは極大となることが証明された. □

一方, 式(6)で定義した制約条件  $g(w_a, w_b)$  は, 計算過程では  $w_a = v_a^2, w_b = v_b^2$  として扱ったため投資配分比率の制約  $w_a \geq 0, w_b \geq 0$  は満たすが,  $w_a \leq 1, w_b \leq 1$  を満たすことは保証しない. 本研究では, この問題を回避するため, 性質1によりインフォメーションレシオの極大値を与える投資配分比率  $(w_a, w_b)$  が実行可能解となったアセット  $b$  のみポートフォリオへの選択可能アセットとして採択する.

### 3.2 GAによるポートフォリオ最適化

3.1節で提案した縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したポートフォリオへのアセット選択方法は, ポートフォリオ  $\mathbf{w}^{(s)}$  を構成する複数アセットの投資配分比率の合計を  $w_a$ , 選択した1アセットの投資配分比率を  $w_b$  とした2変数により, 1プロセスにおけるアセット選択後のポートフォリオ  $\mathbf{w}^{(s+1)}$  を表現するため, 式(3)によりポートフォリオ  $\mathbf{w}^{(s)}$  を構成する複数アセットの投資配分比率の合計を  $w_a$  となるよう正規化している. このため, 本アセット選択方法により最終的に得られたポートフォリオは最適解ではないことが想定される. そこで, 本研究では, 本アセット選択方法により最終的に得られた解(ポートフォリオ)を初期個体集団に導入したGAを適用することで, より効果的にポートフォリオの最適化を行う手法を提案する.

本研究で用いたGAの遺伝子表現, 遺伝子操作について以下に示す.

#### 3.2.1 遺伝子表現と適応度

各遺伝子は各アセットの投資配分比率  $w_i$  に相当し, 遺伝子を列挙した染色体はポートフォリオ集合  $X$  のポートフォリオ  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{\#X})$  に相当する. GAの適応度は式(1)で定義したインフォメーションレシオを最大にすることである.

#### 3.2.2 遺伝子操作

GAの初期個体集団は, 一般的には探索空間に対して一様乱数で与えられる. 一方, 探索空間を分離した複数の領域に個々の初期個体集団を与え, 各領域において独立に探索を進める生得分離モデル[8]が提案されている.

本研究で利用する GA は、これらの研究報告の初期個体集団の与え方を組み合わせ、初期個体集団を本アセット選択方法により得られた個体と一様乱数から与えた個体により構成する。集団サイズは  $Pop\_Size$  とし、集団内に占める本アセット選択方法により得られた個体の導入数を  $Pp$  とする。また、二点交叉、二点突然変異により子個体を生成し、エリート選択とルーレット選択により次世代のための個体の選択を行う。終了条件は設定した最大世代数である。

GA 終了後の個体集団において、適応度最大の個体を抽出し、これを本アセット選択とポートフォリオ最適化手法により得られた最適解（最適ポートフォリオ）とする。

#### 4. 数値実験結果

数値実験では、ポートフォリオへ組み入れるアセットの候補集合として東京証券取引所一部市場の時価総額上位  $M$  アセット、ベンチマーク指数として TOPIX を利用した。1997 年から 2007 年の実験期間を 100 日から成る 26 期間に区切り、期間 1 から期間 26 のそれぞれの期間において数値実験を行った。

数値実験において比較考察を行う 5 手法により得られたポートフォリオと設定したパラメタ値について以下に示す。

- GA

候補集合の全アセットをポートフォリオに組み入れ、初期個体集団を一様乱数で与えた GA による最適化手法により得られたポートフォリオ。

実験に用いた GA のパラメタ値は、集団サイズ  $Pop\_Size = 100$ 、交叉確率  $Pc = 0.9$ 、突然変異確率  $Pm = 0.1$ 、エリート選択率  $Pe = 0.8$ 、最大世代数  $Gene\_Size = 1000$ 、GA のシミュレーション回数 10 である。

- 極値判定

縁付きヘッセ行列の極値判定によるアセット選択手法により得られたポートフォリオ。

- 極値判定 GA<sub>1</sub>

本研究で提案した縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したアセット選択と GA による最適化手法により得られたポートフォリオ。アセット選択方法により得られた 1 個体を GA の初期個体集団に導入している。

実験に用いた極値判定 GA<sub>1</sub> のパラメタ値は、アセット選択方法により得られた個体の導入数を  $Pp = 1$  とし、他は上記 GA だけの手法と同様に設定した。

- 極値判定 GA<sub>0</sub>

本研究で提案した縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したアセット選択と GA による最適化手法により得られたポートフォリオ。アセット選択方法により得られた個体は GA の初期個体集団に導入していない。すなわち、ポートフォリオに組み入れられたアセットはア

セット選択方法により極値判定 GA<sub>1</sub> と同様のアセットが選択されているが、GA の初期集団内の全個体の投資配分比率は一様乱数で与えられる。

実験に用いた極値判定 GA<sub>0</sub> のパラメタ値は、アセット選択方法により得られた個体の導入数を  $Pp = 0$  とし、他は上記 GA だけの手法と同様に設定した。

- 極値判定 GA<sub>all</sub>

本研究で提案した縁付きヘッセ行列の極値判定を利用したアセット選択と GA による最適化手法により得られたポートフォリオ。アセット選択方法により得られた個体を GA の初期個体集団の全ての個体としている。すなわち、初期個体集団は同一の個体で構成されている。

実験に用いた極値判定 GA<sub>all</sub> のパラメタ値は、アセット選択方法により得られた個体の導入数を  $Pp = Pop\_Size$  とし、他は上記 GA だけの手法と同様に設定した。

候補集合のアセット数が  $M = 1000$  の場合について、各最適化手法を適用することにより得られたポートフォリオのインフォメーションレシオとポートフォリオへ選択したアセット数  $\#X$  を表 1 に示す。なお、表中において、GA、極値判定 GA<sub>1</sub>、極値判定 GA<sub>0</sub>、極値判定 GA<sub>all</sub> の実験結果は、シミュレーション回数 10 回の平均インフォメーションレシオを示している。

表 1 より、候補集合のアセット数が多数の場合、極値判定 GA<sub>1</sub>、極値判定 GA<sub>all</sub> のインフォメーションレシオは、GA、極値判定、極値判定 GA<sub>0</sub> の各手法よりポートフォリオより極めて高い値を得ることが分かる。この結果は、GA の初期個体集団の生成に縁付きヘッセ行列の極値判定を利用した本アセット選択方法から得た解を取り入れることが有効であることを示し、初期個体集団を一様乱数で与える単純 GA や極値判定 GA<sub>0</sub> では十分なポートフォリオの最適化を行えないことを示している。

しかしながら、期間によって極値判定 GA<sub>1</sub> と極値判定 GA<sub>all</sub> のインフォメーションレシオの優位性が変わることが分かる。極値判定 GA<sub>1</sub> はアセット選択方法で得た 1 個体だけを GA の初期個体集団に導入し、他の個体を一様乱数で与えるが、極値判定 GA<sub>all</sub> は初期個体集団の全ての個体がアセット選択方法から得た同一個体である。多様な探索点からスタートする極値判定 GA<sub>1</sub> に対して、同一の探索点からスタートする極値判定 GA<sub>all</sub> の結果が良い期間は、GA が持つ多点探索機能が優位に働いていないことが原因であると考えられる。これについて、解の景観を詳細に分析して原因を明らかにする必要がある、今後の課題としたい。

#### 5. おわりに

本研究では、ポートフォリオへの効果的なアセット選択

表 1 インフォメーションレシオとアセット数 #X  
Table 1 Information Ratio and the Number of Assets #X .

期間	GA	アセット数	極値判定	極値判定 GA_1	極値判定 GA_0	極値判定 GA_all	アセット数
1	0.7522	1000	2.7909	4.4468	2.9632	4.4283	174
2	0.7348	1000	3.2919	4.8393	2.8939	4.7977	172
3	0.6329	1000	2.3733	4.3768	2.6910	4.3639	172
4	0.9576	1000	5.0526	9.3210	4.4335	8.9758	191
5	0.9297	1000	4.2420	8.3411	3.9049	8.2279	185
6	1.3226	1000	7.1441	13.5590	4.9654	13.6299	208
7	0.9593	1000	3.1604	5.2600	3.4526	5.1224	175
8	0.7739	1000	2.1156	3.3162	2.9503	3.2749	130
9	0.9335	1000	2.2412	4.2194	3.7259	4.2169	144
10	0.7320	1000	1.9590	3.4245	2.8419	3.5209	140
11	0.9915	1000	3.6093	6.2420	4.5067	6.1839	154
12	0.8085	1000	2.7147	4.8185	3.0263	4.7737	154
13	0.8702	1000	2.7293	5.4704	3.3307	5.3024	163
14	1.0069	1000	3.7112	6.9269	4.3082	6.9023	170
15	0.9090	1000	3.5506	6.0421	3.4999	6.0139	179
16	1.1913	1000	6.1578	12.5048	4.5328	11.8340	183
17	0.8862	1000	3.5160	6.7476	3.7258	6.5443	177
18	1.0720	1000	6.3271	11.9219	4.5363	11.6650	206
19	0.9678	1000	4.7517	9.1778	4.5332	9.0514	202
20	1.2138	1000	8.2027	18.5653	4.4133	18.0859	246
21	1.0302	1000	10.9735	24.1533	4.2993	22.7817	234
22	1.1510	1000	6.1336	11.6141	4.6261	10.4653	223
23	0.7345	1000	6.1476	12.4939	3.6633	12.7878	253
24	0.7067	1000	5.1687	10.6953	3.3011	11.0592	208
25	0.7921	1000	5.9207	9.6881	3.7018	9.2239	199
26	0.9925	1000	5.6358	11.0857	4.2293	11.3938	212

と最適化の方法として、二変数の縁付きヘッセ行列の極値判定により目的関数であるインフォメーションレシオの極大化を保障するアセットの性質を提案し、その性質を利用してアセットをポートフォリオへ選択する操作を繰り返すアセット選択方法を構築した。さらに、このアセット選択方法により得られた解を初期個体集団に導入した GA を適用することで、本研究の範囲内と言えることではあるが、特にポートフォリオへの組入れ候補となるアセット数が多い場合、提案手法が従来の GA だけでなく、提案手法において GA の初期個体集団を一様乱数で生成した場合より効果的にポートフォリオの最適化を行えることを示した。

一方、アセット選択方法に関して、本研究で提案した縁付きヘッセ行列の極値判定は、ポートフォリオの投資配分比率を二変数として捉えている。複数アセットに対応する多変数のポートフォリオの極値判定の性質を導出すること、また期間の違いに対する解の景観を明示することなどが今後の課題となる。

#### 参考文献

[1] Xia, Y., Liu, B., Wang, S. and Lai, K.K.: A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns, *Computers & Operations Research*, Vol.27, pp.409-422

(2000).  
[2] Lin, C.C. and Liu, Y.T.: Genetic Algorithms for Portfolio Selection Problems with Minimum Transaction Lots, *European Journal of Operational Research*, Vol.185, No.1, pp.393-404 (2008).  
[3] Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E. and Sharaiha, Y.M.: Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization, *Computers & Operations Research*, Vol.27, pp.1271-1302 (2000).  
[4] Crama, Y. and Schyns, M., Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems, *European Journal of Operational Research*, Vol.150, pp.546-571 (2003).  
[5] 折登由希子, 井ノ口学, 山本久志: 遺伝的アルゴリズムとヒューリスティックローカルサーチを用いたインデックスファンドの最適化, *電気学会論文誌 C*, Vol.128, No.3, pp.407-415 (2008).  
[6] Aranha, C. and Iba, H.: Portfolio Management by Genetic Algorithms with Error Modeling, Proc. of International Conference on Computational Intelligence in Economics & Finance, On the web of JCIS Online (2007).  
[7] 折登由希子, 山本久志, 井ノ口学, 杉崎翔大: GA による動的なアセットで構成されたポートフォリオの最適化, *電気学会論文誌 C*, Vol.129, No.7, pp.1348-1355 (2009).  
[8] 池田心, 小林重信: 生得分離モデルを用いた GA と JSP への適用, *人工知能学会論文誌*, Vol.17, No.5A, pp.530-538 (2002).  
[9] 株価 CD-ROM2003-2008, 東洋経済新報社 (2008).  
[10] DataStream, トムソンロイター社 (2012).