

多面体の非同型な展開図の個数について

堀山 貴史¹ 庄子 亘¹

概要: 多面体の展開図 (辺展開とも呼ばれる) は, 多面体を辺に沿って切り開くことで得られる多角形である. 切り開く辺が異なっても, 同型な展開図が得られることがある. 例えば, 立方体には 384 通りの展開の仕方 (つまり辺の切り開き方) があるが, 同型なものを除去することで, 11 種類の本質的に異なる (非同型な) 展開図が得られる. 本稿では, 任意の多面体に対し, 非同型な展開図の個数を数え上げる方法について述べる. また, この手法をすべての整凸面多面体 (正多面体, 半正多面体, ジョンソン・ザルガラーの多面体, アルキメデスの角柱と反角柱) に適用し, それぞれの非同型な展開図の個数を示す. たとえば, 角切り二十面体 (サッカーボールフルーレン) には 375,291,866,372,898,816,000 通りの展開方法があるが, 同型なものを排除することで 3,127,432,220,939,473,920 種類の異なる展開図が存在することが分かった.

キーワード: 多面体, 辺展開, 数え上げ, 整凸面多面体, 正多面体, 半正多面体, ジョンソン・ザルガラーの多面体, アルキメデスの角柱, アルキメデスの反角柱, 行列木定理

The Number of Different Unfoldings of Polyhedra

TAKASHI HORIYAMA¹ WATARU SHOJI¹

Abstract: An unfolding (also called an edge unfolding) of a polyhedron is a simple polygon obtained by cutting along the edges of the polyhedron and unfolding it into a plane. Different edge-cuts of a polyhedron may have the same (i.e., isomorphic) unfolding. For example, a cube has 384 way of unfolding (i.e., cutting its edges). By omitting mutually isomorphic unfoldings, we have 11 essentially different (i.e., nonisomorphic) unfoldings. In this paper, we propose how to count the number of nonisomorphic unfoldings for any polyhedron. We also give the number of nonisomorphic unfoldings for all regular-faced convex polyhedra (i.e., Platonic solids, Archimedean solids, Johnson-Zalgaller solids, Archimedean prisms, and antiprisms). For examaple, while a truncated icosahedron (a Buckminsterfullerene, or a soccer ball fullerene) has 375,291,866,372,898,816,000 way of unfolding, it has 3,127,432,220,939,473,920 nonisomorphic unfoldings. (This article is a technical report without peer review.)

Keywords: Polyhedra, edge-unfolding, counting, Platonic solids, Archimedean solids, Johnson-Zalgaller solids, Archimedean prism, Archimedean antiprism, matrix tree theorem

1. はじめに

展開図 (辺展開とも呼ばれる) は, 多面体を辺に沿って切り開くことで得られる多角形である. 例えば, 立方体には, 展開図を与える切り開き方が 384 通り存在する. しかし, 図 1 のように, 切り開く辺が異なっても, 同型な展開図が得られることがある. 実際, 図 1 (c) の展開図と同型な展開図を与える立方体の切り開き方は, 24 通り存在す

る. 立方体では, 全 384 通りの切り開き方による展開図の内, 同型なものを除くと, 11 種類の互いに異なる展開図が得られる. 以下では, どの辺を切るかを区別して数えた展開図の数 (すなわち展開図を与える切り開き方が何通りあるか) を, 辺ラベル付き展開図の個数と呼び, そこから同型なものを除いた本質的に異なる展開図の数を, 非同型な展開図の個数と呼ぶ.

展開図の個数は分野横断的な関心の対象であり, 以下に示す多面体について, その具体的な個数が求められている. 正多面体については, 表 1 のようにまとめられ

¹ 埼玉大学, Saitama University

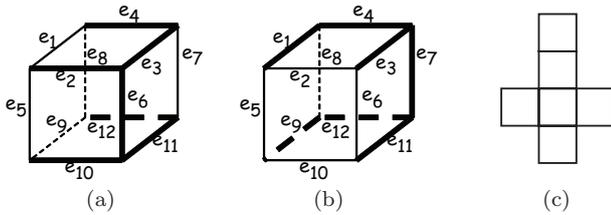


図 1 異なる切り開き方 (a), (b) が同様な展開図 (c) を与える

表 1 正多面体の展開図の個数

名称	辺ラベル付き展開図の個数	非同型な展開図の個数
正四面体	16	2
正八面体	384	11
立方体	384	11
正十二面体	5,184,000	43,380
正二十面体	5,184,000	43,380

る [3], [11], [12]. 計算化学の分野では, フラーレンの一種である, 角切り二十面体 (サッカーボールフラーレン), 角切り十二面体, 角切り二十・十二多面体の辺ラベル付き展開図の個数が, それぞれ 375,291,866,372,898,816,000 [5], 4,982,259,375,000,000,000 [6], 21,789,262,703,685,125,511, 464,767,107,171,876,864,000 [6] と求められている. また, 角切り八面体の非同型な展開図の数が, 約 2,300,000 個であると概算されている [16]. これらの多面体は, 半正多面体 (複数種類の正多角形を面として持ち, 頂点の周りの面の関係がすべて同じ凸多面体) である.

秋山仁らはタイリング可能な展開図の個数を調べており, その第一歩目で, 立方八面体および角切り四面体の 2 種類の半正多面体について, 辺ラベル付き展開図の個数を示している. また, 92 種類あるジョンソン・ザルガラーの多面体 (複数種類の正多角形を面として持つ凸多面体) のうち 17 種類について, 辺ラベル付き展開図の個数を示している.

アルキメデスの角柱 (正 n 角形の上下の面と n 個の正方形の側面からなる角柱), およびアルキメデスの反角柱 (正 n 角形の上下の面と $2n$ 個の正三角形の側面からなる反角柱) については, 辺ラベル付き展開図の個数がそれぞれ $\frac{n}{2}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 2\}$ [7], $\frac{2n}{5}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 2\}$ [14] であることが知られている. しかし, 非同型な展開図の個数については, アルキメデスの角柱に対して, $n = 3$ から 14 の場合が報告されているのみである [17].

これまでに知られている辺ラベル付き展開図の個数は, キルヒホッフの行列木定理 [13], [15] を利用してグラフの全域木の数を求めることで得られている. これは, 切り開く辺の集合が多面体の全頂点を結ぶ全域木となることから, 展開図となるための必要十分条件であるからである. 一方, 同型性を除いた本質的に異なる展開図の個数については, 上記のアルキメデスの角柱について $n = 3$ から 14 の場合

の具体的な個数を求めた結果 [17] の他には, 表 1 の正多面体についての結果 [11] と, それを拡張した 6 個の 4 次元凸正多胞体についての結果 [4] が知られているのみであり, さらなる研究が必要である.

本稿では, 文献 [4] の手法をさらに拡張することで, 任意の (3 次元) 多面体に対し, 非同型な展開図が何種類あるかを数え上げる方法について述べる. また, この手法をすべての整面凸多面体 (正多面体 5 種類, 半正多面体 13 種類, ジョンソン・ザルガラーの多面体 92 種類, アルキメデスの角柱, アルキメデスの反角柱) に適用し, それぞれの非同型な展開図を数え上げた結果を示す. なお, アルキメデスの角柱および反角柱については, 底面の頂点数 n に対して漸化式を導く.

この結果, 例えば, 角切り二十面体 (サッカーボールフラーレン) には 375,291,866,372,898,816,000 通りの展開方法があることが知られているが, 同型性を除くことで 3,127,432,220,939,473,920 個の非同型な展開図が存在することが分かった. また, 角切り八面体の非同型な展開図の個数は, 約 2,300,000 個との概算 [16] はほぼ正しく, それより 1 割程度少ない 2,108,512 個であることが分かった.

2. 準備

展開図であるための必要十分条件は, 以下の通りである.

補題 1 ([10], Lemma 22.1.1 参照). **多面体の展開図を得るために切る辺の集合は, そのスケルトングラフ (多面体の頂点と辺からなるグラフ) の全域木を構成する.**

したがって, 多面体の辺ラベル付き展開図の数え上げと, 多面体のスケルトングラフにおけるラベル付き全域木の数え上げは等価となる. グラフ中の全域木の数え上げを行う方法として, 行列木定理が知られている. A を自己ループのない (多重) グラフ G の隣接行列, D を G の各頂点の次数を対角成分に並べた対角行列とする. この時, G の全域木の数 $\tau(G)$ について, 以下の定理が成り立つ.

定理 1. [15] G のラベル付き全域木の数 $\tau(G)$ は, ラプラシアン行列 $D - A$ の任意の余因子の行列式と等しい.

次に, 多面体の自己同型群上で, 非同型な展開図を数え上げる方法について述べる. 多面体のスケルトングラフを Γ , 多面体の自己同型群を $\text{Aut } \Gamma$ とする. $\text{Aut } \Gamma$ は回転, 鏡映, 回映, 反転による, 多面体の頂点 (辺) の置換群である. 図 2 に, 立方体の頂点 4, 6 を通る軸での 120° 回転による置換を例示する. $g \in \text{Aut } \Gamma$ で動かされない全域木の集合を, \mathcal{T}_g と表すこととする. この時, $\text{Aut } \Gamma$ 上で非同型となる全域木の数 $u(\Gamma)$ は, 以下の式より求められる.

定理 2. [8]

$$u(\Gamma) = \frac{\sum_{g \in \text{Aut } \Gamma} |\mathcal{T}_g|}{|\text{Aut } \Gamma|}$$

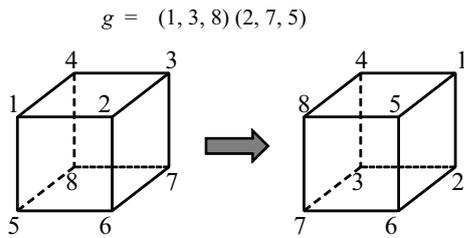


図 2 回転による立方体の置換

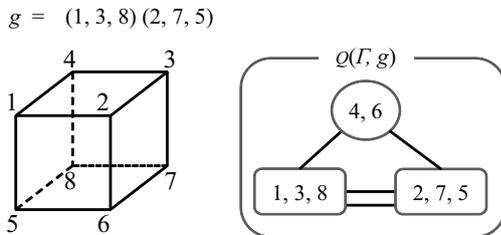


図 3 図 2 の置換による quotient graph $Q(\Gamma, g)$

$|T_g|$ の数え上げには, quotient graph [4] を用いる. Quotient graph $Q(\Gamma, g)$ は, g の位数が素数 p であるとき, 以下のように定義される. まず, $Q(\Gamma, g)$ の頂点集合 U を定義する. Ω を g による長さ p の軌道の集合とする. また, g による頂点 $v \in V(\Gamma)$ の軌道を θ_v とする. $\text{Fix } g$ を g によって動かされない Γ の部分グラフとする. すなわち, $\text{Fix } g$ の頂点集合と辺集合は以下のように定義される.

$$V(\text{Fix } g) = \{v \mid g(v) = v, v \in V(\Gamma)\}$$

$$E(\text{Fix } g) = \{(v_0, v_1) \in E(\Gamma) \mid v_0, v_1 \in V(\text{Fix } g)\}$$

また, g によって, すべての頂点が動く場合, すなわち $\text{Fix } g$ の頂点集合および辺集合が空集合となる場合には, $\text{Fix } g = \phi$ と表記する. このとき, quotient graph の頂点集合 U は以下のように定義される.

$$\begin{cases} U = \Omega & (\text{Fix } g = \phi) \\ U = \Omega \cup \{V(\text{Fix } g)\} & (\text{Fix } g \neq \phi) \end{cases} \quad (1)$$

次に Quotient Graph の辺集合 \mathcal{F} を定義するため, π を以下のような写像と定める.

$$\pi : V \rightarrow U \begin{cases} v \rightarrow \theta_v & (v \notin V(\text{Fix } g)) \\ v \rightarrow V(\text{Fix } g) & (v \in V(\text{Fix } g)) \end{cases}$$

$E(\Gamma)$ のうち, 辺の両端点 v_0, v_1 に対して, $\pi(v_0) \neq \pi(v_1)$ となる $E(\Gamma)$ の部分集合を, E' とする. g による辺 $e \in E'$ の軌道の長さは, すべて p である. これらの辺の軌道の集合 \mathcal{F} が $Q(\Gamma, g)$ の辺の (多重) 集合である.

例えば, 図 2 の置換による quotient graph は, 図 3 のようになる. ここで, $g = (1, 3, 8)(2, 7, 5)$ の位数は 3 である. また, $V(\text{Fix } g) = \{4, 6\}, E(\text{Fix } g) = \phi$ であり, $U = \{\{1, 3, 8\}, \{2, 7, 5\}, \{4, 6\}\}$ となる.

いくつかの制約のもとで, quotient graph を用いて $|T_g|$ を求められる.

定理 3. [4] 位数が素数 p である $g \in \text{Aut } \Gamma$ が与えられ, $\text{Fix } g \neq \phi$ であるとき, $|T_g| = \tau(\text{Fix } g) \cdot \tau(Q(\Gamma, g))$.

定理 4. [4] 位数が 2 である $g \in \text{Aut } \Gamma$ が与えられ, $\text{Fix } g = \phi$ であるとき, $|T_g| = \tau(Q(\Gamma, g)) \cdot \alpha(g)$.

ここで, 辺 $e = (v_0, v_1)$ が $g(v_0) = v_0$ かつ $g(v_1) = v_1$, もしくは $g(v_0) = v_1$ かつ $g(v_1) = v_0$ を満たす時, e が不動辺であるといい, $\alpha(g)$ は g による不動辺の数を表す.

また, $T_g = \phi$ すなわち $|T_g| = 0$ となる十分条件も知られている.

補題 2. [4] $T \in \mathcal{T}_g$ が存在し, かつ $\text{Fix } g \neq \phi$ ならば, $\text{Fix } g$ は連結で, かつ $T \cap \text{Fix } g$ は $\text{Fix } g$ の全域木となる.

この補題より, $\text{Fix } g \neq \phi$ かつ $\text{Fix } g$ が非連結ならば, $T_g = \phi$ となることがすぐに導かれる.

3. 非同型な展開図の数え上げ

本節では, quotient graph の拡張を提案し, 定理 3 の拡張を行う, また, $T_g = \phi$ となる新たな十分条件を導く. そして, 任意の多面体に対し, その自己同型群をもとに, 非同型な展開図の個数を求めるアルゴリズムを提案する. また, このアルゴリズムが任意の多面体に適用可能であることを証明する.

$g \in \text{Aut } \Gamma$ が, g で固定されない任意の頂点 $v_0, v_1 \notin V(\text{Fix } g)$ に対し $|\theta_{v_0}| = |\theta_{v_1}|$ とする時を考える, この時, $Q(\Gamma, g)$ は位数が素数であった場合と同様に定義することができる. そして, 定理 3 の自明な拡張として次の定理を得る.

定理 5. $g \in \text{Aut } \Gamma$ が, 任意の $v_0, v_1 \notin V(\text{Fix } g)$ に対し $|\theta_{v_0}| = |\theta_{v_1}|$ とする時, $|T_g| = \tau(\text{Fix } g) \cdot \tau(Q(\Gamma, g))$.

次に, $\text{Fix } g = \phi$ かつ $\alpha(g) = 0$ ならば, $T_g = \phi$ を示す. これを証明するために, いくつかの補題を示していく.

補題 3. $g \in \text{Aut } \Gamma, T_g \neq \phi, \theta_u \neq \theta_v, u, v \notin V(\text{Fix } g)$ とする. $|\theta_u| = |\theta_v|$ ならば, 軌道 θ_v 上の相違なる 2 頂点 v_0, v_1 に対し, (u, v_0) および (u, v_1) が同時に $T \in \mathcal{T}_g$ の辺となることはない.

証明の概略. $g^k(v_0) = v_1$ となる g^k を g' とおき, 辺 $(u, v_0), (u, v_1)$ の g' による軌道を考えると, T がサイクルを持つことになり矛盾. よって, $(u, v_0), (u, v_1)$ が同時に T の辺となることはない. \square

補題 4. $g \in \text{Aut } \Gamma$ による頂点の軌道 θ_u, θ_v について $|\theta_u| \bmod |\theta_v| \neq 0$ かつ $|\theta_v| \bmod |\theta_u| \neq 0$ の時, $T \in \mathcal{T}_g$ とすると, 任意の $u \in \theta_u, v \in \theta_v$ に対して, $(u, v) \notin E(T)$ となる.

証明の概略. $(v_0, v_1) \in E(T)$ と仮定する. T は, 4 つの

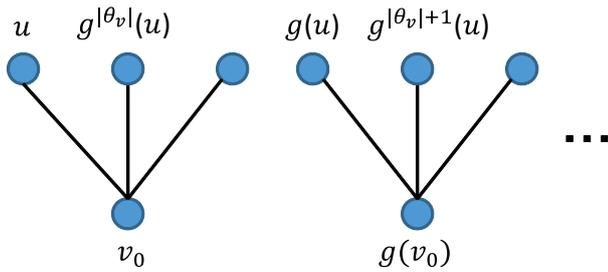


図 4 $|\theta_u| \bmod |\theta_v| = 0$ の場合の辺の軌道

辺 $(u, v), (u, g^{|\theta_u|}(v)), (g^{|\theta_v|}(u), v), (g^{|\theta_v|}(u), g^{|\theta_u|}(u))$ を持つことになり、この 4 辺が長さ 4 のサイクルを作る。これは、 T が木であることに矛盾する。 □

補題 5. $g \in \text{Aut } \Gamma, T \in \mathcal{T}_g, v_0, v_1 \in \theta_v, u \notin \theta_v, v_0, v_1, u \notin V(\text{Fix } g)$ とした時、 $(v_0, u), (v_1, u) \in E(T)$ ならば、 $|\theta_v| > |\theta_u|$ である。

証明. $|\theta_v|, |\theta_u|$ に対して、(1) $|\theta_v| = |\theta_u|$, (2) $|\theta_v| \neq |\theta_u|$ に場合分けをする。さらに、(2) を以下のように分ける。

- (2-1) $|\theta_v| \bmod |\theta_u| \neq 0$ かつ $|\theta_u| \bmod |\theta_v| \neq 0$
- (2-2) $|\theta_u| \bmod |\theta_v| = 0$
- (2-3) $|\theta_v| \bmod |\theta_u| = 0$

(1) および (2-1) の場合には、補題 3 および、補題 4 より、 $(v_0, u), (v_1, u) \in E(T)$ となることはない。次に、(2-2) の場合には、 $g^{|\theta_v|}$ により、辺 (u, v_0) は辺 $(g^{|\theta_v|}(u), v_0)$ に動かされるため、図 4 のように θ_v の各頂点から θ_u へ $\frac{|\theta_u|}{|\theta_v|}$ 本ずつ辺が出る。 θ_u の各頂点から θ_v へは、1 本ずつの辺が伸びる。 $(v_0, u), (v_1, u) \in E(T)$ となるためには、 u から少なくとも 2 本の辺が θ_v の頂点へと伸びなければならない。したがって、(2-2) の場合に $(u, v_0), (u, v_1) \in E(T)$ となることはない。逆に、(2-3) の場合には、 θ_u の各頂点から θ_v の頂点へ $\frac{|\theta_v|}{|\theta_u|}$ 本ずつ辺が出るため、 $(u, v_0), (u, v_1) \in E(T)$ となりえる。 □

補題 6. $T \in \mathcal{T}_g$ であり、 $(u, v) \in E(T)$ かつ $|\theta_u| < |\theta_v|$ ならば、 θ_u の各頂点から、 θ_v の頂点に、少なくとも 2 つの辺が伸びる。

証明. $|\theta_v| \bmod |\theta_u| = 0$ の場合には、補題 5 の証明で述べたように、 $|\theta_u|$ の頂点から $\frac{|\theta_u|}{|\theta_v|}$ 本の辺が伸びる。 $|\theta_v| \bmod |\theta_u| \neq 0$ の場合には、 $|\theta_v|$ と $|\theta_u|$ の最小公倍数を ℓ とする。この時には、辺 (u, v) を $g, g^2, \dots, g^{\ell-1}$ のいずれで動かしても $g^{|\ell|}$ で動かすことで、初めて (u, v) と一致する。したがって、 θ_u の各頂点から、 $\frac{\ell}{|\theta_u|}$ 本の辺が伸びる。以上より、いずれの場合も 2 本の辺が伸びる。 □

長さが 2 以上となる Γ 上のパスを考える。このパスが通る頂点を v_0, v_1, \dots, v_k とし、 $p(v_0, v_k)$ と表すことにする ($k \geq 2$)。この時、以下の補題が成り立つ。

補題 7. $|\theta_{v_0}| < |\theta_{v_1}| \leq |\theta_{v_2}| \leq \dots \leq |\theta_{v_{k-1}}| > |\theta_{v_k}|$ ($k \geq$

2) ならば、 $T \in \mathcal{T}_g$ 上に $p(v_0, v_k)$ は存在しない。

証明. T 上に $p(v_0, v_k)$ が存在すると仮定して、矛盾を示す。この時、補題 6 より、 T 上で、 θ_{v_0} の各頂点から θ_{v_1} へ、2 つ以上の辺が伸びる。 θ_{v_k} の各頂点から $\theta_{v_{k-1}}$ へも同様である。 θ_{v_i} ($1 \leq i \leq k-1$) の各頂点は、 T 上で、 $\theta_{v_{i-1}}$ および $\theta_{v_{i+1}}$ に対して、それぞれ 1 つ以上の辺を持つ。この時、軌道 $\theta_{v_0}, \theta_{v_1}, \dots, \theta_{v_k}$ の各頂点は、これらの軌道中の頂点 2 つ以上と隣接しており、かつ連結となっているため、 T 内のどこかでサイクルが含まれることになる。これは T が全域木になることに矛盾する。したがって、パス $p(v_0, v_k)$ は T に含まれない。 □

補題 8. $g \in \text{Aut } \Gamma$ について、 $\alpha(g) = 0$ ならば、 $T \in \mathcal{T}_g$ は、同一軌道の頂点 u, v を両端点とする辺 (u, v) を持たない。

証明. $|\theta_u| = 2$ の場合を考える。この場合は $\alpha(g) = 0$ であるため、辺 (u, v) は存在しない。 $|\theta_u| > 2$ の場合を考える。 (u, v) が T の辺ならば、 $g(u) = v$ もしくは $g(v) = u$ である。 $g(u) = v$ の場合を考える。 (u, v) が T の辺ならば、 $(g(u), g(v)) = (v, g(v))$ も T の辺である。同様に、 $(g(v), g^2(v)), (g^2(v), g^3(v)), \dots, (g^{|\theta_u|-1}(v), g^{|\theta_u|}(v) = v)$ も T の辺である。これは長さ $|\theta_u|$ のサイクルを作る。 $g(v) = u$ の場合も同様である。したがって、 T が全域木であるという仮定に矛盾するため、 T は、同一軌道の頂点 u, v を両端点とする辺 (u, v) を持たない。 □

補題 9. 式 (1) の π に対して、パス $p(v_0, v_k)$ の両端点が、 $\pi(v_0) = \pi(v_k)$ かつ、 $\pi(v_1) \neq \pi(v_{k-1})$ となる時、 $T \in \mathcal{T}_g$ は、パス $p(v_0, v_k)$ を持たない。

証明. T がパス $p(v_0, v_k)$ を持つと仮定して、矛盾を示す。まず、 $v_0, v_k \in V(\text{Fix } g)$ の時を考える。 $\pi(v_0) = \pi(v_k)$ かつ、 $\pi(v_1) \neq \pi(v_{k-1})$ より、 v_1 と v_{k-1} のいずれかが、 $\text{Fix } g$ の頂点に属さない。ここで、 v_1 が $\text{Fix } g$ の頂点に属しないと仮定する。この時には、 $v_0, v_k \in V(\text{Fix } g)$ のため、 $|\theta_{v_1}| > |\theta_{v_0}| = 1$ である。 k' を $1 \leq k' \leq k-1$ を満たし、かつ $|\theta_{v_{k'}}| > |\theta_{v_{k'+1}}|$ となる最小の整数とする。 $|\theta_{v_0}| < |\theta_{v_1}| > |\theta_{v_k}|$ から、これを満たす k' は必ず存在する。この時、 $|\theta_{v_0}| < |\theta_{v_1}| \leq \dots \leq |\theta_{v_{k'}}| > |\theta_{v_{k'+1}}|$ となり、補題 7 より、 T は $p(v_0, v_k)$ を持たない。 v_{k-1} が $\text{Fix } g$ の頂点に属さなかった場合についても、同様の議論により、 T は $p(v_0, v_k)$ を持たない。

次に、 $\pi(v_0) = \pi(v_k)$ の仮定から、 $v_0, v_k \notin V(\text{Fix } g)$ となる場合を考える。 v_0 が v_1 との間に辺を持ち、かつ $\pi(v_0), \pi(v_k) \notin V(\text{Fix } g)$ であるため、 $\pi(v_0) = \pi(v_k)$ 、 $v_0, v_k \notin V(\text{Fix } g)$ より、 $\theta_{v_0} = \theta_{v_k}$ である。したがって、 $g^i(v_0) = v_k$ となる整数 i が存在する。 T は $p(v_0, v_k)$ 上の辺 (v_0, v_1) を持つため、辺 $(g^i(v_0), g^i(v_1))$ すなわち $(v_k, g^i(v_1))$ も T に属する。したがって、 v_k も θ_{v_1} のい

ずれかの頂点と1つ以上の辺を T 上で持つ。同様に、 v_k が v_{k-1} との間に辺を持ち、かつ $\pi(v_0), \pi(v_k) \notin V(\text{Fix } g)$ であるため、 v_0 も $\theta_{v_{k-1}}$ のいずれかの頂点と1つ以上の辺を T 上で持つ。 i を $1 \leq i \leq k$ を満たす整数とし、 $\theta_{v_{i-1}} \neq \theta_{v_{i+1}}$ の場合と、 $\theta_{v_{i-1}} = \theta_{v_{i+1}}$ の場合をそれぞれ考える。まず、 $\theta_{v_{i-1}} \neq \theta_{v_{i+1}}$ の場合には、 θ_{v_i} の各頂点は、 $\theta_{v_{i-1}}$ のいずれかの頂点と辺で結ばれている。同様に θ_{v_i} の各頂点は、 $\theta_{v_{i+1}}$ のいずれかの頂点とも辺で結ばれている。次に、 $\theta_{v_{i-1}} = \theta_{v_{i+1}}$ の場合も、 v_i は $p(v_0, v_k)$ 上の頂点となっているため、 v_i は、 $\theta_{v_{i-1}}$ の少なくとも2つの頂点と辺で結ばれている。そのため、他の θ_{v_i} に属する各頂点についても、 $\theta_{v_{i-1}}$ の少なくとも2つの頂点と辺で結ばれている。したがって、 $\theta_{v_0}, \theta_{v_1}, \dots, \theta_{v_k}$ に属する各頂点は、これらの軌道中の頂点2つ以上と隣接しており、かつ連結となっているため、 T 内のどこかでサイクルが含まれることになる。これは T が全域木になることに矛盾する。したがって、 T は $p(v_0, v_k)$ を持つことはない。□

補題 10. $g \in \text{Aut } \Gamma$ について、 $\text{Fix } g = \phi$ かつ $\alpha(g) = 0$ ならば、 $\mathcal{T}_g = \phi$

証明. $T \in \mathcal{T}_g$ が存在すると仮定し、矛盾を導く。 T が存在するならば、同じ軌道に属する2頂点 u_0, v_0 を結ぶパス $p(u_0, v_0)$ が T 上に1つだけ存在する。 $p(u_0, v_0)$ を結ぶパスの長さを1とすると、これは、同一軌道上の頂点を両端点とする辺を T に含むことになる。これは、補題8に矛盾する。したがって、 $p(u_0, v_0)$ の長さは2以上である。

次に、 $p(u_0, v_0)$ を u_0 から v_0 にたどる際に通る頂点の列を $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ 、これらの頂点の属する軌道の列を $\mathbf{s}_{\mathbf{u}} = (\theta_{u_0}, \theta_{u_1}, \dots, \theta_{u_k})$ とする。同様に、 $p(u_0, v_0)$ を v_0 から u_0 にたどる際に通る頂点の列を $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ 、頂点の属する軌道の列 $\mathbf{s}_{\mathbf{v}} = (\theta_{v_0}, \theta_{v_1}, \dots, \theta_{v_k})$ とする。 $\mathbf{s}_{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ が異なる場合、等しい場合について矛盾を示していく。まず、 $\mathbf{s}_{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ が異なる場合について考える。 $\theta_{u_0} = \theta_{v_0}$ であるため、 $\theta_{u_i} = \theta_{v_i}$ かつ $\theta_{u_{i+1}} \neq \theta_{v_{i+1}}$ を満たす最小の整数 i が必ず存在する。この時、補題9より、 $p(v_i, u_i)$ の部分パスは、 T 上に存在しない。したがって、 $\mathbf{s}_{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ が異なることは無い。

次に $\mathbf{s}_{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ が等しい場合を考える。パスの長さ k が奇数であると仮定すると、図5のように、頂点 $u_{\lfloor k/2 \rfloor} = v_{\lfloor k/2 \rfloor}$ と頂点 $v_{\lfloor k/2 \rfloor} = u_{\lfloor k/2 \rfloor}$ の間の辺 $(u_{\lfloor k/2 \rfloor}, v_{\lfloor k/2 \rfloor})$ が $E(T)$ に含まれることになる。しかし、 $\mathbf{s}_{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{s}_{\mathbf{v}}$ が等しいことは $\theta_{u_{\lfloor k/2 \rfloor}} = \theta_{v_{\lfloor k/2 \rfloor}}$ を意味し、同一軌道上の頂点を両端点とする辺が存在することになり、補題8に矛盾する。したがって、パスの長さ k は偶数であり、 $u_{k/2} = v_{k/2}$ となる(図6)。 $\text{Fix } g = \phi$ であるため、 $\theta_{u_{k/2}}$ 上には必ず2つ以上の頂点が存在する。ここで、 $\theta_{u_{k/2}}$ から相違なる2頂点を選び、これらを新たに u_0, v_0 として同様の議論を繰り返す。ここで、 u_0, v_0 を更新するたびに、 u_0, v_0 の属する軌道の長さが

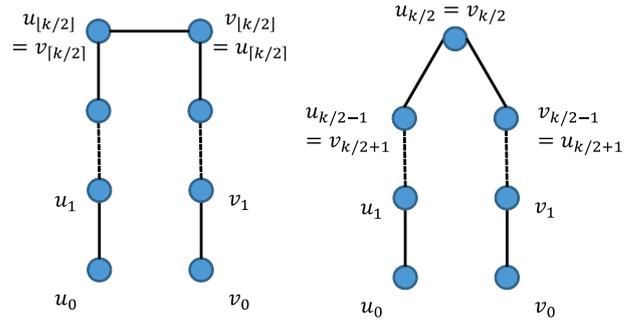


図5 $p(v_0, v_k)$ の長さが奇数 図6 $p(v_0, v_k)$ の長さが偶数

入力. 多面体のスケルトングラフ Γ , 自己同型群 $\text{Aut } \Gamma$

出力. $\text{Aut } \Gamma$ 上で非同型となる全域木の数 $u(\Gamma)$

Step 1.(初期化) $t := 0$

Step 2.(繰り返し)

$g \in \text{Aut } \Gamma$ に対して、以下を行う。

if $\text{Fix } g \neq \phi$ **then**

$t := t + \tau(\text{Fix } g) \cdot \tau(Q(\Gamma, g))$

else if $\alpha(g) \geq 1$ **then**

$t := t + \tau(Q(\Gamma, g)) \cdot \alpha(g)$

end if

Step 3. $t/|\text{Aut } \Gamma|$ を出力。

図7 アルゴリズム NumberOfNonequivalentSpanningTrees

単調減少するすなわち $|\theta_{u_0}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ であることを示す。そのために、 $|\theta_{u_0}| \geq |\theta_{u_1}| \geq \dots \geq |\theta_{u_{k/2-1}}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ を示す。 $u_{k/2} = v_{k/2}$ より、 $(u_{k/2-1}, u_{k/2})$ と $(v_{k/2-1}, v_{k/2}) = (v_{k/2-1}, u_{k/2})$ が T の辺であり、かつ図6に示すように $\theta_{u_{k/2-1}} \neq \theta_{u_{k/2}}$ であるため、補題5より $|\theta_{u_{k/2-1}}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ である。この時、 $|\theta_{u_0}| \geq |\theta_{u_1}| \geq \dots \geq |\theta_{u_{k/2-1}}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ が成り立たないと仮定すると、 $0 \leq i \leq k/2 - 1$ かつ $|\theta_{u_i}| > |\theta_{u_{i+1}}|$ を満たす最大の整数 i が存在することとなる。これは、 $|\theta_{u_i}| < |\theta_{u_{i+1}}| \leq \dots \leq |\theta_{u_{k/2-1}}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ となるパスが、 T 上に存在することとなり、補題7に矛盾する。したがって、 $|\theta_{u_0}| \geq |\theta_{u_1}| \geq \dots \geq |\theta_{u_{k/2-1}}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ であり、すなわち $|\theta_{u_0}| > |\theta_{u_{k/2}}|$ である。

u_0, v_0 の更新は、これらの属する軌道の長さが単調減少するため、必ず停止する。この時、 $\text{Fix } g = \phi$ より、 u_0, v_0 の属する軌道の長さは2以上となる。また、補題8により、辺 (u_0, v_0) は T 上に存在しない。さらに、軌道の長さの最小性より、 u_0, v_0 を結ぶパスも存在しない。したがって、 u_0 と v_0 は、 T 上で非連結となる。これは T が全域木であることに矛盾する。したがって、 $\mathcal{T}_g = \phi$ となる。□

補題10, 定理4, 定理5を用いて、任意の多面体の非同型な展開図の数を求めるアルゴリズムを図7に示す。

定理 6. アルゴリズム NumberOfNonequivalentSpanningTrees は、任意の多面体のスケルトングラフ Γ の $\text{Aut } \Gamma$ 上で非同型となる展開図の個数を計算可能である。

証明. このアルゴリズムは、すべての $g \in \text{Aut } \Gamma$ が以下

の状態のいずれかである場合に、 $u(\Gamma)$ を求めることが可能である。

- $\text{Fix } g \neq \phi$ で、かつ任意の $v_0, v_1 \notin V(\text{Fix } g)$ に対し $|\theta_{v_0}| = |\theta_{v_1}|$ である
- $\text{Fix } g = \phi$ かつ $\alpha(g) \geq 1$ かつ g の位数は 2
- $\text{Fix } g = \phi$ かつ $\alpha(g) = 0$

g が、 $\text{Fix } g \neq \phi$ で、かつ任意の $v_0, v_1 \notin V(\text{Fix } g)$ に対し $|\theta_{v_0}| = |\theta_{v_1}|$ とする場合には、定理 5 を適用できるため、このアルゴリズムは $|\mathcal{T}_g|$ を正しく計算できる。また、 $\text{Fix } g = \phi$ かつ g の位数が 2 ならば、定理 4 から、このアルゴリズムは、 $|\mathcal{T}_g|$ を正しく計算できる。そして、 $\text{Fix } g = \phi$ かつ $\alpha(g) = 0$ ならば、補題 10 より、 $\mathcal{T}_g = \phi$ であり、このような g に対しては、 t の値を更新しない。

以降では、任意の多面体の自己同型群の要素 $g \in \text{Aut } \Gamma$ が上記の 3 つのパターンに属することを示す。まず、任意の多面体は以下の 17 種類の対称型のうちの 1 つを持つ [9].

$$C_1, C_i, C_s, C_n, C_{nv}, C_{nh}, \\
 D_n, D_{nh}, D_{nv} \text{ (} D_{nd} \text{ とも呼ばれる)}, \\
 S_n, T, T_d, T_h, O, O_h, I, I_h$$

そして、これらの対称型より、多面体の自己同型群は以下の 5 種類の共役類 [2] に分類される。

- (1) 恒等置換: E
- (2) 1 つの回転軸で行う回転による置換の集合: C_n^j
- (3) 1 つの鏡映面で行う鏡映による置換の集合: $\sigma_h, \sigma_v, \sigma_d, \sigma$
- (4) 直交する回転軸と鏡映面での、回転と鏡映の合成 (回転) による置換の集合: S_n^j
- (5) 多面体の中心で、対角にある頂点を入れ替える操作 (反転) による置換: i

g が恒等置換の場合には、すべての頂点が動かないため、 $|\mathcal{T}_g| = \tau(\Gamma)$ として計算できる。 g が回転による置換の場合には、動かされるすべての頂点は回転軸の周りで同じ角度だけ回転した位置に移動する。したがって、動かされるすべての頂点の軌道の長さは g の位数に等しくなり、 $\text{Fix } g \neq \phi$ の場合は、正しく $|\mathcal{T}_g|$ が計算される。次に、 $\text{Fix } g = \phi$ の場合を考える。回転による不動辺は、回転軸上に存在する辺、または、回転角度が 180° の時に回転軸に垂直に交わる辺である。多面体の回転軸上に辺が存在することはありえない。一方、回転角度が 180° である時には、 g の位数は、2 である。したがって、 $\alpha(g) = 0$ の時でも、 $\alpha(g) > 0$ の時でも、 $|\mathcal{T}_g|$ は正しく計算される。

g が回映による置換の場合について考える。回映とは、回転操作後に回転軸に垂直な面で鏡映を行う操作である。まず、回転によって、回転軸上にない頂点および辺は、元の位置とは異なる位置へ移動する。そして鏡映面は回転軸に対して垂直となっているため、回転によって移動した頂点および辺を元の位置へと戻すことはない。また、回転軸

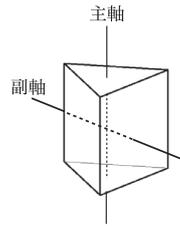


図 8 角柱 ($n = 3$)

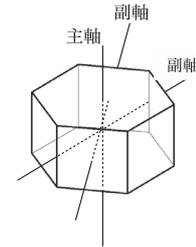


図 9 角柱 ($n = 6$)

上に存在していた頂点および辺も、回転軸に垂直な面での鏡映によって、元の位置から異なる位置へと動かされることとなる。したがって、 $\text{Fix } g = \phi$ となる。回映による不動辺は、回転軸上に存在して、鏡映面で対称な辺、または、鏡映面上にあって、回転軸と垂直な辺である。いずれも多面体の中心を通る必要があるため、 $\alpha(g) = 0$ となる。

最後に反転について考える。反転とは、多面体の中心で多面体の対角にある頂点を入れ替える操作である。反転は、すべての頂点を動かすため $\text{Fix } g = \phi$ となる。また、多面体の不動辺は多面体の中心を通る必要があるため、 $\alpha(g) = 0$ となる。したがって、定理が成り立つ。 □

4. 整面凸多面体の非同型な展開図の数え上げ

3 章で提案した非同型な展開図の数え上げ手法を、すべての整面凸多面体 (正多面体 5 種類、半正多面体 13 種類、ジョンソン・ザルガラーの多面体 92 種類、アルキメデスの角柱および反角柱) に適用する。

正多面体については、表 1 と同じ結果を得た。半正多面体およびジョンソン・ザルガラーの多面体に対する適用結果を表 2, 3 に示す。辺ラベル付き展開図の個数は、定理 1 により求めた。非同型な展開図の個数は、3 章のアルゴリズム NumberOfNonequivalentSpanningTrees により求めた。

以下では、アルキメデスの角柱について、非同型な展開図の個数を求める。底面を正 n 角形として、 $n = 4$ の場合には、この多面体は立方体となり、他の場合とは異なる自己同型群を持つ。(特例として、 $u(\Gamma) = 11$ とする。)

まずはじめに、 $\mathcal{T}_g \neq \phi$ となえる置換を求める。底面に垂直で、底面の中心を通る回転軸を主軸、主軸に対して垂直な回転軸を副軸と呼ぶ。例として、正三角形と正六角形を底面としたアルキメデスの角柱の、主軸と副軸の一部を、図 8 および図 9 にそれぞれ示す。このとき、 \mathcal{T}_g に対して、以下の補題が成り立つ。

補題 11. $\mathcal{T}_g \neq \phi$ となりえる置換 g は、以下のいずれかである。

- C_0 : 恒等置換.
- C_1 : 底面に平行な面での鏡映による置換.
- C_2 : 底面に垂直で、底面の辺の中点を通る面での鏡映による置換.

表 2 半正多面体の展開図の個数

名称	辺ラベル付き展開図の個数	非同型な展開図の個数
立方八面体	331,776 [1]	6,912
十二・二十面体	208,971,104,256,000	1,741,425,868,800
角切り四面体	6,000 [1]	261
角切り八面体	101,154,816	2,108,512
角切り立方体	32,400,000	675,585
角切り二十面体	375,291,866,372,898,816,000 [5]	3,127,432,220,939,473,920
角切り十二面体	4,982,259,375,000,000,000 [6]	41,518,828,261,687,500
斜立方八面体	301,056,000,000	6,272,012,000
斜方二十・十二面体	201,550,864,919,150,779,950,956,544,000	1,679,590,540,992,923,166,257,971,200
角切り立方八面体	12,418,325,780,889,600	258,715,122,137,472
角切り十二・二十面体	21,789,262,703,685,125,511,464,767,107,171,876,864,000 [6]	181,577,189,197,376,045,928,994,520,239,942,164,480
ねじれ立方体	89,904,012,853,248	3,746,001,752,064
ねじれ十二面体	438,201,295,386,966,498,858,139,607,040,000,000	7,303,354,923,116,108,380,042,995,304,896,000

C_3 : 副軸における 180° 回転のうち、回転軸が辺の中点を通る置換。

このそれぞれの置換に対して $|T_g|$ を求めることで、以下の定理を得る。

定理 7. 底面が正 n 角形で構成されたアルキメデスの角柱の非同型な辺展開の個数は、以下の通りである。

n が奇数の場合:

$$u(\Gamma) = \frac{1}{8\sqrt{3}} \left\{ 2\sqrt{3}n + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (4 + 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2\sqrt{3} - 4) + \sqrt{3}((2 - \sqrt{3})^n - 2) \right\}$$

n が偶数の場合:

$$u(\Gamma) = \frac{1}{24} \left\{ 6n + 3(2 + \sqrt{3})^n + 4\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})^{\frac{n}{2}} - 4\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^{\frac{n}{2}} + 3(2 - \sqrt{3})^n - 6 \right\}$$

アルキメデスの反角柱についても、同様にして非同型な展開図の個数を求めることができる。

定理 8. 底面が正 n 角形で構成されたアルキメデスの反角柱の非同型な辺展開の個数は、以下の通りである。

$$u(\Gamma) = \frac{1}{10} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{4n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{-4n} - 2 \right\} + \frac{(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

参考文献

[1] J. Akiyama, T. Kuwata, S. Langerman, K. Okawa, I. Sato, G. C. Shephard: Determination of All Tessellation Polyhedra with Regular Polygonal Faces, In Proc. of the China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications, LNCS 7033, pp. 1–11, 2011.
 [2] P. W. Atkins, M. S. Child, C. S. G. Phillips: Tables for Group Theory, Oxford University Press, 1970.
 [3] S. Bouzette, F. Vandamme: The regular Dodecahedron and Icosahedron unfold in 43380 ways, Unpublished manuscript.

[4] F. Buekenhout, M. Parker: The Number of Nets of the Regular Convex Polytopes in Dimension ≤ 4 , Disc. Math. vol. 186, pp. 69–94, 1998.
 [5] T. J. N. Brown, R. B. Mallion, P. Pollak, B. R. M. de Castro, J. A. N. F. Gomes: The number of spanning trees in buckminsterfullerene, Journal of Computational Chemistry, vol. 12, pp. 1118–1124, 1991.
 [6] T. J. N. Brown, R. B. Mallion, P. Pollak, A. Roth: Some Methods for Counting the Spanning Trees in Labelled Molecular Graphs, examined in Relation to Certain Fullerenes, Discrete Applied Mathematics, vol. 67, pp. 51–66, 1996.
 [7] G. F. T. Boesch, Z. R. Bogdanowicz: The Number of Spanning Trees in a Prism, Inter. J. Comput. Math, vol. 21, pp. 229–243 1987.
 [8] A. Burnside: Theory of Groups of Finite Order, Cambridge University Press, 1911.
 [9] P. R. Cromwell: Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.
 [10] E. D. Demaine and J. O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
 [11] C. Hippenmeyer: Die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze eines regulären Ikosaeders, Elem. Math., vol. 34, pp. 61–63, 1979.
 [12] M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders, Elemente der Mathematik, vol. 30, pp. 73–83, 1975.
 [13] G. R. Kirchhoff, "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer Ströme geführt wird." Ann. Phys. Chem. 72, 497–508, 1847.
 [14] D. J. Kleitman, B. Golden: Counting trees in a certain class of graphs, Am. Math. Monthly, vol. 82, pp. 40–44, 1975.
 [15] M. Lewin: A generalization of the matrix tree theorem, MATH. Z. , vol. 181(1), pp. 55–70, 1982.
 [16] S. Pandey, M. Ewing, A. Kunas, N. Nguyen, D. H. Gracias, G. Menon: Algorithmic design of self-folding polyhedra, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 108, no. 50, pp. 19885–19890, 2011.
 [17] N. J. A. Sloane: Sequence A103535, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

表 3 ジョーンソン・ザルガラーの多面体の展開図の個数

名称	辺ラベル付き展開図の個数	非同型な展開図の個数	非同型な展開図の数
J01	45	8	
J02	121	15	1,864,897,711,733,918,792
J03	1,815 [1]	308	267,015,959,942,030,583,130
J04	24,000	3,030	
J05	297,025	29,757	
J06	78,250,050	7,825,005	
J07	361 [1]	63	
J08	3,509	448	
J09	30,976	3,116	
J10	27,216	3,421	
J11	403,202	40,321	
J12	75	9	
J13	1,805	99	
J14	1,728	156	
J15	31,500	2,010	
J16	508,805	25,574	
J17	207,368	13,041	
J18	1,609,152 [1]	268,260	
J19	227,402,340	28,427,091	
J20	29,821,320,745	2,982,139,245	
J21	8,223,103,375,490	822,310,337,549	
J22	37,158,912 [1]	6,193,152	
J23	15,482,880,000	1,935,360,000	
J24	5,996,600,870,820	599,660,087,082	
J25	1,702,422,879,696,000	170,242,287,969,600	
J26	1,176 [1]	152	
J27	324,900 [1]	27,195	
J28	29,859,840 [1]	1,867,560	
J29	30,950,832 [1]	1,934,427	
J30	2,518,646,460	125,939,163	
J31	2,652,552,060	132,627,603	
J32	699,537,024,120	69,953,702,412	
J33	745,208,449,920	74,520,844,992	
J34	193,003,269,869,040	9,650,165,403,136	
J35	301,896,210 [1]	25,158,925	
J36	302,400,000 [1]	25,203,000	
J37	301,988,758,680	18,874,379,520	
J38	270,745,016,304,350	13,537,250,963,730	
J39	272,026,496,000,000	13,601,327,004,000	
J40	75,378,202,163,880,700	7,537,820,216,388,070	
J41	75,804,411,381,317,500	7,580,441,138,131,750	
J42	20,969,865,292,417,385,400	1,048,493,264,659,994,295	
J43	21,115,350,368,078,435,000	1,055,767,519,017,973,725	
J44	5,295,528,588 [1]	882,609,105	
J45	13,769,880,349,680	1,721,235,971,518	
J46	32,543,644,773,848,180	3,254,364,517,723,165	
J47	9,324,488,558,669,593,960		1,864,897,711,733,918,792
J48	2,670,159,599,304,760,178,000		267,015,959,942,030,583,130
J49			672
J50			1,401
J51			3,549
J52			4,201
J53			38,526
J54			19,035
J55			88,776
J56			176,967
J57			544,680
J58			9,272,497
J59			82,580,526
J60			410,335,964
J61			4,790,966,400
J62			7,050
J63			289
J64			1,409
J65			207,576
J66			6,865,163,910
J67			5,685,916,514,256
J68			6,849,584,355,849,548,062,500
J69			46,849,407,942,992,327,926,343,838
J70			232,575,882,499,181,854,544,317,560
J71			2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
J72			20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
J73			10,597,511,106,353,370,064,654,696,448
J74			52,898,913,344,353,749,804,959,881,152
J75			36,042,636,312,577,358,126,529,767,936
J76			2,108,152,090,439,487,210,452,928
J77			2,163,545,802,723,460,484,299,200
J78			10,819,092,174,083,407,318,469,376
J79			11,085,623,675,648,531,139,403,888
J80			108,182,283,486,496,129,152
J81			523,563,323,531,253,902,848
J82			1,075,622,906,381,856,553,376
J83			32,858,151,465,900,184
J84			1,109
J85			80,742,129
J86			21,204
J87			326,423
J88			500,959
J89			8,094,150
J90			64,950,268
J91			108,936
J92			39,287,808