不動産の価格とリターンの時系列モデルと応用

石島 博[1,a)]　前田 章[2]　谷山 智彦[3]

受付日 2011年8月19日，再受付日 2011年10月7日 / 2011年11月21日，
採録日 2011年11月22日

概要：不動産市場と金融市場が相互に連動しつつ景気動向を左右するようになってきている昨今，不動産投資と国内外金融市場への投資とを関連付けて分析する理論的な枠組みが必要となってきている．本論文の目的は，不動産を一般的な金融資産と同列に扱うことのできる手法を開発し提示することである．具体的には，動的均衡モデルの枠組みを拡張して，個々の不動産物件について，仮想的な価格変化率データ，すなわち「擬似リターン」を生成し，それを用いて，「リスク」と「リターン」などの指標を算定する．これを通して，不動産の金融投資としての位置付けを考察するものである．

キーワード：不動産，価格とリターン，時系列モデル，実証分析，金融工学．

Time Series Modeling of Real Estate Prices and Its Application

Hiroshi Ishijima[1,a)]　Akira Maeda[2]　Tomohiko Taniyama[3]

Received: August 19, 2011, Revised: October 7, 2011/November 21, 2011,
Accepted: November 22, 2011

Abstract: As real estate and financial asset markets are merging in these days, there is a strong need for us to have a theoretical foundation for analysis of real estate investments in conjunction with both domestic and international financial investments. The purpose of this paper is to present a dynamic equilibrium model to evaluate prices of not only financial assets but also pieces of real estate. In particular, we extend our previous model to a sophisticated one that allows us to create “pseudo returns” on real estate and to estimate risks and returns on real estate investments. The results of our theory and statistical analysis here highlight the role of real estate investments, contrasting to that of financial ones.

Keywords: real estate, price and rate of return, time series model, empirical analysis, financial engineering

1. はじめに

近年，不動産市場と金融市場が相互に連動し，その連動が世界経済を大きく動かす要因となっている．2008 年のリーマン・ショックとそれに続く金融危機は，米国の住宅ローンを原資として高度に仕組み化された金融派生商品が暴落を始めたことに端を発しているといわれている．こうした例からも分かるように，不動産市場を経済動向だけでなく，国内外の金融市場と関連付けて分析し，金融投資と同じ脈絡で理解することが，近年きわめて重要になってきている．

ところが，これまで不動産は，実務としては不動産鑑定評価制度のもと，特殊な価値評価の枠組みのなかに置かれ，学術的には一般的なミクロ経済学やマクロ経済学とは趣を異にする特殊な応用分野とされてきた．また，資産運用や投資という面でも，一般的な投資対象である株，債券などとはまったく異なったものとなっている．国内外の経済情勢に鑑みれば，これらすべてを統一的に扱う理論的枠組みの確立が望まれるところである．

以上のような問題意識から，石島・前田 [7] は，不動産

1 中央大学大学院国際会計研究科
Graduate School of International Accounting, Chuo University, Shinjuku, Tokyo 162–8478, Japan
2 東京大学教養学部附属教養教育高度化機構
College of Arts and Sciences, the University of Tokyo, Meguro, Tokyo 153–8902, Japan
3 株式会社野村総合研究所
Nomura Research Institute, Ltd., Chiyoda, Tokyo 100–0005, Japan
a) hiroshi.ishijima@gmail.com

投資を株や債券といった一般的な投資対象と同列に位置付けて，その対比の中で不動産価値を算定する理論モデルを提案した．これは，金融工学（なかでも資産価格評価理論）の分野で比較的よく使われる動的ポートフォリオ理論を拡張して不動産価格評価に応用するものであった．さらに，その研究に基づいて，石島・前田・谷山 [8] は，国内マンション価格について統計分析を行い，あわせて，不動産価格評価と Google Earth/Google Maps とが連動して機能する「不動産バリュエーション・マップ」を提案した．

石島らの一連の研究 [7], [8] は，経済/金融工学理論に基礎を置きつつ，不動産評価の実務にも役立つ考え方とツールを提示したという点で重要な貢献があったと考えられる．しかしながら，不動産価格の算定に重点が置かれた結果，他の金融投資対象（株や債券，さらには金（ゴールド）などのコモディティ）との比較については，明示されてはいなかった．こうした他の投資対象との比較は，投資家にとっては，ポートフォリオの構成という点で最も重要な情報の 1 つである．そのため，これは，これまでの石島らの研究 [7], [8] をより包括的なものとするために，ぜひとも望まれる課題であった．

しかしながら，こうした不動産と一般的な金融商品との明示的な比較は，実は容易なことではない．一般に，金融工学の理論では，金融商品の特性を，「リスク」と「リターン」という 2 つの指標で記述する．前者は金融商品価格変化率の変動（数学的には分散あるいは標準偏差など），後者は金融商品価格の平均変化率である．これらは，一般的には，時々刻々変化する株式市場や債券市場，あるいはコモディティ市場（金など）の価格データに基づいて算定される．すなわち，一般的な金融商品の特性は，分単位，あるいは最長でも日単位という時間間隔で観測される豊富な市場データが入手可能であってこそ，記述可能なものとなっている．

これに対して，個別の不動産物件は，石島らの一連の研究 [7], [8] では，理論上どのような時間軸でも取り扱い可能とはされているが，実際問題として，月単位はおろか，年単位のデータですら，入手が困難となっている．直感的に考えても，不動産物件は数年～数十年の間隔でしか，実際の取引がなされることはない．毎年国土交通省によって公表される「公示地価」というものは，実際の取引価格（実勢価格）ではなく，不動産鑑定士の鑑定評価に基づいた更地の正常価格を示している．こうした不動産取引の実態と観測データの入手可能性を考えると，不動産を一般的な金融商品と同一の尺度で比較し，ポートフォリオ理論の枠組みに組み入れるということがいかに困難な作業であるかが分かる．

本論文の目的は，こうした不動産取引の実態・観測データ上の困難を克服して，不動産を一般的な金融資産と同列に扱うことのできる手法を開発し提示することである．具体的には，石島・前田 [7]，石島・前田・谷山 [8] の枠組みを利用して，個々の不動産物件について，仮想的な価格変化率データ，すなわち「擬似リターン」を生成し，それを用いて，「リスク」と「リターン」などの金融工学（特にポートフォリオ理論）で使われる指標を算定する．これを通して，不動産の金融投資としての位置付けを考察するものである．

本論文の構成は以下のとおりである．次章で石島・前田 [7]，石島・前田・谷山 [8] の議論を要約するとともに，それらを拡張した「不動産価格のリターン」の理論および「擬似リターン」生成の方法について，その概要を述べる．3 章では，全国の中古マンション取引データを対象に，実証分析を行う．そのうえで，「擬似リターン」の生成を試みる．4 章では，前章で生成された「擬似リターン」に基づいて，不動産の金融投資機会としての位置付けについて論じる．具体的には，国内外の株式市場と債券市場，さらに金（ゴールド）市場との関連で，不動産とポートフォリオ理論について考察する．5 章でまとめとする．

2. 不動産の価格とリターンの時系列モデル

2.1 不動産価格の理論

石島・前田 [7] は，動的一般均衡フレームワークを構築し，そのうえで 2 つの特殊な条件を仮定することにより，均衡不動産価格は次式のように表現されることを示した．

$$(\text{不動産の価格}) = \sum_k (\text{属性}\ k\ \text{の価格}) \times (\text{不動産が保有する属性}\ k\ \text{の量}) \tag{1}$$

この式は，均衡不動産価格が任意の時点において，属性価格の線形結合によって表現されることを意味している．これは結果として，Lancaster [9] や Rosen [13] をパイオニアとするヘドニック・モデル（hedonic model）となっている．以降，不動産価格について (1) 式が成立するとき，「ヘドニック性」を持つということにする．石島・前田 [7] では，均衡不動産賃料についてはただちにヘドニック性を有するが，均衡不動産価格については，2 つの特殊な条件を課すことによってはじめて，ヘドニック性を持つことが強調されている．

2.2 不動産の価格リターンの理論

石島・前田 [7] が，完全競争下における均衡不動産価格を導出するために用いた動的一般均衡フレームワークを拡張することにより，その時系列方向の価格変化率であるリターンに関する理論モデルを導出することができる．付録に示す導出を経て得られる不動産価格リターンは，次のように表現される．

(不動産価格のリターン)

$=$ (すべての不動産に共通する項)

$+$ (不動産ごとの個別性を反映する項)

$+$ (時系列データの不規則変動を表す確率項)　(2)

これは，Case and Shiller [3] が提案する，不動産の「対数価格」についての「リピート・セールス・モデル（weighted repeated sales index）」と，強い対応関係が見られる表現となっている．その詳細についても，付録において述べることにする．

2.3 不動産価格の統計モデル

分析対象とする N^H 個の不動産を，立地する地域やその用途などによって，N 個の不動産クラスに分ける．各クラスに属する不動産数 n_i は同一でなくてもよく，$\sum_{i=1}^{N} n_i = N^H$ とする．また，不動産が保有する属性の種類は，K 個あるとする．そのうえで，時点 t で取り引きされる不動産クラス i に属する第 j 番目の不動産について，その価格を $H_{ij,t}$，保有する属性 k を $x_{ij,t}^{(k)}$ とする．このとき本論文で用いる不動産価格の統計モデルは，石島・前田・谷山 [8] が提案した，以下の 2 つである．

（固定効果モデル）

$$H_{ij,t}^{*} = \alpha_t + \sum_{k=1}^{K} \beta_t^{(k)} x_{ij,t}^{(k)} + \varepsilon_{ij,t} \tag{3}$$

（混合効果モデル）

$$H_{ij,t}^{*} = \alpha_t + \sum_{k=1}^{K} \left(\beta_t^{(k)} + \nu_{i,t}^{(k)} \right) x_{ij,t}^{(k)} + \varepsilon_{ij,t} \tag{4}$$

ただし，上の 2 式で，$i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, n_i$ とする．これらの（3）と（4）式は，完全競争下での均衡不動産取引価格の表現である（1）式に基づいて提案されている．その要点は，(i) 不動産取引価格は理論上，保有する属性価格の線形結合で表さなければならないこと，(ii) これを構成する属性価格は，不動産によらず同一でなければならないこと，である．前者は資産の線形価格評価法（linear pricing）として，後者は一物一価の原則として，それぞれよく知られている（Luenberger [11]）．しかし，（1）式で表現される理論価格は，実際の市場価格と乖離している可能性が高い．そこで，（3）と（4）式は，以下の 2 つの観点より，これをとらえうる統計モデルとして提案されている．

（1）歪みの考慮

（1）式で表される理論上の不動産価格は，線形でなければならない．しかし，現実の不動産市場では，流動性の欠如，大きな取引コスト，情報の非対称性などに起因して，不動産価格は線形から歪んでいる可能性が高い．そこで，（1）式の左辺である不動産価格に，Box-Cox（べき乗）変換（Box and Cox [1]）を施すことを石島・前田・谷山 [8] は提案している．不動産クラス i に属する第 j 番目の不動産の価格を $H_{ij,t}$ とするとき，Box-Cox 変換は次式で表される．

$$H_{ij,t}^{*} = \begin{cases} \frac{H_{ij,t}^{\lambda} - 1}{\lambda} & (\lambda \neq 0 \text{ のとき}) \\ \log H_{ij,t} & (\lambda = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5}$$

$\lambda = 1$ のときは，不動産価格は理論上の完全競争均衡価格となる．λ が 1 でないときには，不動産価格には線形からの歪みがあることを表している．従来の先行研究（たとえば，吉田ら [14]）の研究においては，先験的に統計的なフィットの良さだけを根拠として対数変換した不動産価格についての回帰分析が行われてきた．これは，Box-Cox 変換において，そのパラメータを $\lambda = 0$ とした場合に相当する．しかし，対数変換を包含する Box-Cox 変換を用いた石島・前田・谷山 [8] の研究によれば，線形構造（$\lambda = 1$）や対数変換（$\lambda = 0$）とは異なる歪みがあることが示されている．これより，不動産価格 $H_{ij,t}$ 自体ではなく，これに（5）式による Box-Cox 変換を施した統計モデル，（3）および（4）式を用いて分析することとする．

（2）個別性の考慮

不動産には同じものは 1 つしかないという強い個別性があり，すべての不動産で共有される属性では説明がつかないプレミアムが存在していると考える．この個別性をもたらすものを「不動産のクラス」と呼び，立地する地域や用途などがこれを構成する．このような考察に基づき，次の 2 つの方法で不動産の個別性を考慮する．

第 1 の方法として，切片 α_t を，N 個の不動産クラスを表すダミー変数 $x_{ij,t}^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, N)$ の線形結合で，次のように置き換えることにする．

$$\alpha_t := \sum_{l=1}^{K} \beta_t^{(l)} x_{ij,t}^{(l)} \tag{6}$$

ただし，ダミー変数を，$x_{ij,t}^{(l)} = 1$ $(l = i$ のとき$)$，$x_{ij,t}^{(l)} = 0$ $(l \neq i$ のとき$)$ と定義する．以上の議論より，(6) 式によって，1 平米あたりの不動産価格におけるプレミアムを表現するとき，α_t は「不動産クラス・プレミアム」を表すことになる．

第 2 の方法として，不動産のクラスによって表される個別性に起因して，理論上は同一でなければならない属性単価が，変動する可能性を考慮する．つまり，属性 k の単価が，不動産によらず共通する固定単価 $\beta_t^{(k)}$ と，不動産クラス i によって確率的に変動する変動単価 $\nu_{i,t}^{(k)}$ とに分離・推定することを考える．これを考慮した統計モデルが，（4）式である．ただし，$\varepsilon_{ij,t}$ は，平均 $\mathbf{0}$ の N^H 次元の正規分布に従う誤差項である．その共分散行列は対角であって，成分は同一であるとする．また，$\varepsilon_{ij,t}$ と独立である $\boldsymbol{\nu}_{i,t} := \left(\nu_{i,t}^{(1)} \ldots \nu_{i,t}^{(k)} \ldots \nu_{i,t}^{(K)} \right)'$ は，平均 $\mathbf{0}$ の K 次元の正規分布に従い，その共分散行列を $\mathbf{G}$ と書く．

（4）式で表される混合効果モデルは，経時データやパネルデータを分析する際に有用とされ，近年さかんに研究さ

れるようになったものである（Hsiao [6]，Fitzmaurice et al. [4]，McCulloch et al. [12]）．したがって，本モデルの推定は，かかる分野の成果を礎として実装された，SAS 9.1.3 の MIXED プロシジャを用いて行うことができる（Littell et al. [10]）．ちなみに，(3) 式で表される固定効果モデルも，同プロシジャで推定することができる．推定は，制限付最尤法（REML; Restricted Maximum Likelihood）によって行い，推定値は，BLUP（Best Linear Unbiased Prediction）として得ることとする．なお，(4) 式における共分散行列 $\mathbf{G}$ は，混合効果モデルにおいて，自由にデザインすることができるが，本研究においては最も単純な構造として，対角行列を採用した．

また，各時点 t $(t = 1, \ldots, T)$ において，不動産データを (3) または (4) 式に適用して推定された，(5) 式による Box-Cox 変換済みの不動産価格を $\hat{H}_t^*$ $(t = 1, \ldots, T)$ と表記し，このとき同時に推定される Box-Cox 変換のパラメータ $\hat{\lambda}$ を用いて，不動産価格の推定値を

$$\hat{H}_t = \begin{cases} \left(1+\hat{\lambda}\cdot\hat{H}_t^*\right)^{1/\hat{\lambda}} & (\hat{\lambda}\neq 0 \text{ のとき}) \\ \exp\left(\hat{H}_t^*\right) & (\hat{\lambda}=0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (t=1,\ldots,T) \tag{7}$$

として得ることにする．

2.4 不動産の擬似リターンとその時系列モデル

不動産クラス i に属する第 j 番目の不動産は，時点 t で $H_{ij,t}$ という価格で取り引きされたとする．ここで，時点 $t-1$ では $H_{ij,t-1}$ という価格で取り引きされたとする．このとき，時点 $t-1$ と時点 t で挟まれた期間 t における不動産価格のリターン $\tilde{R}$ は，$\tilde{R}_{ij,t} := (H_{ij,t} - H_{ij,t-1})/H_{ij,t-1}$ として定義できる．しかしながら，現実の市場においては，時点 t で取り引きされた不動産が，時点 $t-1$ でも取り引きされることはきわめて稀である．そこで，時点 t でのみ取り引きされた属性 $\boldsymbol{x}_{ij,t}$ を持つ不動産が，時点 $t-1$ でも取り引きされていたとして，そのときに評価されたであろう不動産価格を $H_{t-1}(\boldsymbol{x}_{ij,t})$ と表記する．そして前節の方法を用いた時点 $t-1$ での推定値を $\hat{H}_{t-1}(\boldsymbol{x}_{ij,t})$ と書くことにする．これによって，不動産価格の真のリターン $\tilde{R}$ を考える代わりに，次のような「擬似リターン（pseudo return）」R を定義することにする．

$$R_{ij,t} \approx \frac{H_{ij,t} - \hat{H}_{t-1}(\boldsymbol{x}_{ij,t})}{\hat{H}_{t-1}(\boldsymbol{x}_{ij,t})} \tag{8}$$

期間 t における不動産クラス i に属する不動産 j の価格リターンは，理論的には (2) 式のように表現される（詳細は付録を参照）．そこで，擬似リターン $R_{ij,t}$ についても，(2) 式と同様の表現ができるものと考える．すなわち，次のように書けるとする．

$$R_{ij,t} = m_t + \mu_{i,t} + \eta_{ij,t} \tag{9}$$
$$(i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n_i)$$

(2) 式は価格リターンの性質を理論的に表現したものであり，その各項にはそれぞれ理論的な意味付けがなされていた．(9) 式の各項は，(2) 式の各項に対応するものであり，統計的には次のように実装されることになる[*1]．m_t はすべての不動産に共通する項であり，固定効果として表現する．$\mu_{i,t}$ は個別性を反映する不動産のクラスごとに取りうる値が異なる項であり，変量効果として表現する．具体的には，平均 $\mathbf{0}$ の N 次元正規分布に従い，その分散・共分散行列を対角行列の $\mathbf{H}$ とする．$\eta_{ij,t}$ は不規則変動を表す誤差項であり，平均 $\mathbf{0}$ の N^H 次元正規分布に従うとする．

3. 実証分析

3.1 データ

分析対象とする不動産のデータは，インターネット上の国土交通省土地総合情報システムより取得した，中古マンションについての取引価格と属性（築年数と駅徒歩）である．分析対象とした期間は，本システムが提供する全期間のうち分析するのに十分なデータ数が存在した，2006 年第 2 四半期から 2011 年第 1 四半期までの 20 四半期である．その中古マンションに関するデータより，「札幌市」「東京都心 5 区（千代田区，中央区，港区，渋谷区，新宿区）」「その他東京都区部」「名古屋市」「大阪市」「福岡市」という 6 つの地域に属する不動産のデータを抽出し，これを不動産の個別性を生む 6 つの不動産クラスとした．本実証分析においては，不動産価格自体ではなく，これを基準化した，1 平米あたりの不動産価格を分析する．これを説明する属性としては，住居用の不動産にとって基本的と考えられる「築年数（AGE，年）」と「最寄駅からの徒歩（WALK，分）」を取り上げた．

実証分析に先立ち，利用した中古マンションに関する，不動産の 1 平米あたりの価格データの概要を**表 1** に示す．

分析対象とした中古マンション市場の全体の平均価格挙動について述べる．2006 年第 2 四半期を底として，その後，2007 年第 1 四半期から 2008 年第 1 四半期にかけて高水準が続いている．その後，2008 年後半の金融危機の影響から価格は下落，2009 年第 1 四半期に底を打ち，直近に至るまで上昇傾向にある．次に，地域による不動産クラスごとに平均価格の挙動を見ることとする．分析期間を通した平均の大小でランキングすると，東京都心 5 区，その他東京都区部，大阪市，名古屋市，福岡市，札幌市の順になる．また，時系列のパターンについては，2 つの類型があるこ

[*1] この (9) 式は，価格リターンの理論 (2) 式に基づいた擬似リターンの表現である．したがって，付録で導出したように，不動産の理論上の価格 (1) 式とは密接な関係がある．しかしながら，市場価格について，理論価格からの乖離をとらえるべく提案した市場価格についての統計モデル (3)，(4) 式との対応関係が存在するとは限らない．

表 1　四半期ごとの中古マンションのデータ数（N）と平均価格（単位：万円）

Table 1　Quarterly reported the number of observations (N) and average prices (in ten thousand yen) for apartment data.

	全体		札幌市		都心5区		その他都区部		名古屋市		大阪市		福岡市	
	N	平均	N	平均	N	平均	N	平均	N	平均	N	平均	N	平均
2006_2	1,507	48.67	84	13.92	215	81.26	674	57.81	120	24.04	287	33.16	96	25.44
2006_3	1,502	50.43	60	16.16	177	78.83	757	62.38	118	21.59	289	29.21	84	19.59
2006_4	1,572	52.92	60	15.46	199	74.73	764	66.06	156	22.28	279	34.30	97	25.93
2007_1	2,005	57.23	79	15.67	239	80.69	1,083	70.16	131	21.22	292	34.88	139	22.51
2007_2	3,313	55.33	237	15.74	457	83.58	1,652	67.44	278	27.84	447	34.72	195	20.98
2007_3	3,161	55.20	283	15.96	403	91.81	1,559	67.81	237	25.94	457	33.00	183	21.62
2007_4	3,160	56.42	309	15.37	451	87.80	1,541	69.43	244	26.01	421	37.40	150	21.37
2008_1	3,197	57.07	238	15.77	528	87.46	1,565	68.56	250	25.12	430	32.97	148	20.83
2008_2	3,391	53.60	277	15.43	531	86.77	1,590	63.94	240	23.96	473	33.97	223	22.35
2008_3	3,320	53.26	270	15.40	511	85.36	1,554	63.81	258	23.53	458	33.45	224	24.17
2008_4	3,319	50.53	300	15.81	442	79.36	1,588	62.11	244	24.83	459	32.93	214	21.66
2009_1	3,389	50.36	279	15.89	445	79.22	1,673	61.06	270	24.97	473	32.79	196	21.09
2009_2	3,693	50.95	356	15.94	587	81.73	1,672	61.19	261	25.39	549	32.24	194	21.75
2009_3	3,728	52.63	276	16.33	585	83.39	1,789	61.34	264	26.15	579	34.28	187	19.74
2009_4	3,758	52.95	295	15.28	556	81.77	1,793	64.28	263	24.85	614	33.38	191	22.12
2010_1	3,881	53.19	284	15.03	499	83.32	1,923	65.18	292	26.81	624	33.03	200	21.42
2010_2	3,782	53.27	313	14.41	526	89.17	1,836	64.29	267	28.00	569	31.02	211	20.53
2010_3	3,316	51.59	292	16.05	346	85.91	1,541	67.49	279	27.12	597	30.29	198	21.44
2010_4	2,783	52.70	257	14.68	398	91.85	1,300	63.83	178	26.11	458	30.84	143	18.88
2011_1	2,556	55.71	94	16.94	378	88.60	1,335	63.80	225	26.95	414	32.29	87	19.53

表 2　中古マンションの平均面積（平米），平均築年数（年），および最寄り駅までの徒歩時間の平均（分）

Table 2　Averages of floor space (square meters), age of apartment (years) and walking distance from nearest subway/railway station (minutes) for apartment data.

属性	札幌市	都心5区	その他都区部	名古屋市	大阪市	福岡市	全体
平均面積(平米)	69.40	45.24	46.63	66.01	55.19	54.04	51.35
平均築年数(年)	17.10	13.17	12.30	16.07	17.27	14.39	13.96
平均駅徒歩(分)	8.43	5.46	7.60	8.74	6.24	9.80	7.38

とが分かる．第 1 の類型に属するのは，東京都心 5 区とその他東京都区部の 2 つの不動産クラスである．これらは，天井や底を打つタイミングこそ多少前後するものの，市場全体の時系列のパターンと似ていることが分かる．一方，第 2 の類型に属するのは，札幌市・名古屋市・大阪市・福岡市という地方圏であり，それらの時系列パターンは，ほぼ横ばいである．第 1 の類型はサンプル数が多いため，第 1 と第 2 の時系列のパターンを集約すると，市場全体のパターンになることが理解できる．

また，中古マンションの分析対象の全体，およびクラスごとの属性データを，**表 2** に示す．平均面積では都心 5 区が最も狭く，札幌市が最も広い．また，東京の中古マンションは比較的新しい物件が多く，駅から近いことが分かる．

3.2　不動産価格の推定結果

中古マンションの 1 平米あたりの価格について，2006 年第 2 四半期から，2011 年第 1 四半期までの各四半期において，固定効果モデル（3）式と混合効果モデル（4）式を用いた推定を行った．その結果を，**表 3** に示す．これを見ると，すべての四半期において，混合効果モデルの方が，固定効果モデルよりも，AIC の意味で適合度が高いことが分かる．したがって，以降では，混合効果モデル（4）式を用いて分析を行うことにする．次に，そのより高い適合度を示した混合効果モデルについて，Gurka et al. [5] の方法により，各四半期において推定された不動産市場の歪みを表す λ を見てみる．この λ は，1 のときに不動産価格は理論上の線形価格であり，それ以外の値を取るときには，不動産価格には歪みがあることを示している．特に，λ が 0 であるとき対数価格という歪みを意味する．混合効果モデルにおける λ の推定結果を見ると，0.06 から 0.29 までの小さな正の値を取ることが分かる．したがって，対数価格に近いが，それよりも若干，線形価格よりの歪みが存在する

表 3　混合効果モデルと固定効果モデルにより中古マンション価格を推定した場合の AIC 比較，および混合効果モデルによって推定された歪み

Table 3　Comparison of AICs when apartment prices are estimated quarterly by mixed and fixed effect models, and the distortion coefficients estimated by the mixed effect model.

	AIC		混合効果
	固定効果	混合効果	の推定 λ
2006_2	12,256.72	12,194.42	0.06
2006_3	12,382.24	12,354.03	0.06
2006_4	12,993.48	12,974.37	0.22
2007_1	16,779.48	16,747.81	0.11
2007_2	27,619.17	27,534.10	0.14
2007_3	26,618.19	26,524.05	0.09
2007_4	27,005.86	26,967.65	0.13
2008_1	27,192.92	27,076.73	0.07
2008_2	28,620.04	28,494.76	0.10
2008_3	27,794.58	27,695.48	0.16
2008_4	27,533.08	27,441.95	0.22
2009_1	28,099.55	28,037.24	0.13
2009_2	30,755.18	30,589.63	0.08
2009_3	31,092.53	30,970.32	0.11
2009_4	31,532.57	31,432.84	0.15
2010_1	32,390.27	32,293.65	0.18
2010_2	32,122.08	32,062.15	0.17
2010_3	27,731.66	27,708.73	0.19
2010_4	23,031.47	22,973.59	0.15
2011_1	21,847.14	21,839.28	0.29

情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用　Vol.5　No.1　74–85 (Mar. 2012)

表 4　四半期ごとの中古マンションの擬似リターンの平均と標準偏差
Table 4　Quarterly reported the averages and standard deviations for pseudo return of apartment prices.

	全体		札幌市		都心5区		その他都区部		名古屋市		大阪市		福岡市	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
2006_3	-0.28%	5.26%	2.55%	9.35%	-3.39%	2.33%	2.83%	2.23%	-7.10%	3.22%	-3.78%	6.13%	-1.89%	2.60%
2006_4	5.14%	8.03%	9.12%	1.98%	-3.43%	7.64%	5.34%	2.92%	3.23%	7.24%	5.64%	5.75%	17.99%	16.34%
2007_1	4.06%	7.14%	-7.62%	3.42%	8.93%	6.56%	4.76%	6.39%	5.93%	4.39%	0.63%	4.19%	2.73%	9.97%
2007_2	1.22%	5.72%	1.03%	3.00%	1.68%	4.64%	-1.27%	2.88%	11.47%	8.51%	6.77%	0.90%	-4.45%	2.20%
2007_3	0.87%	5.60%	-0.21%	1.74%	4.54%	3.08%	1.74%	6.12%	2.37%	7.38%	-3.65%	2.12%	-2.78%	2.50%
2007_4	0.78%	5.32%	-2.41%	3.00%	-3.26%	5.10%	1.76%	3.13%	-2.81%	3.16%	6.34%	2.84%	-0.08%	11.51%
2008_1	0.73%	7.15%	3.97%	4.33%	-2.10%	12.40%	1.63%	3.19%	2.44%	7.71%	-1.91%	7.79%	0.92%	6.96%
2008_2	-2.10%	4.74%	0.33%	1.12%	1.52%	2.58%	-4.29%	1.11%	-3.40%	4.16%	-2.94%	5.60%	3.54%	9.57%
2008_3	0.15%	2.79%	-1.31%	0.55%	0.27%	2.90%	-0.77%	1.35%	5.41%	4.94%	-0.50%	1.43%	2.70%	1.18%
2008_4	-4.10%	3.41%	-5.20%	4.25%	-5.07%	3.07%	-3.81%	0.41%	-4.50%	5.93%	-1.59%	2.85%	-6.77%	6.07%
2009_1	-1.25%	4.30%	5.50%	5.75%	-2.27%	2.57%	-2.11%	1.16%	1.81%	3.81%	-3.53%	1.56%	-0.20%	9.70%
2009_2	0.01%	4.03%	-2.59%	3.90%	0.15%	2.35%	0.35%	1.78%	0.13%	5.42%	0.01%	4.55%	0.98%	9.50%
2009_3	1.68%	3.87%	2.03%	5.88%	1.09%	1.06%	1.38%	2.39%	2.37%	2.80%	2.36%	5.02%	2.57%	8.72%
2009_4	1.04%	3.00%	-1.80%	2.12%	0.73%	2.63%	2.25%	2.07%	-1.57%	3.39%	-0.91%	2.55%	4.16%	3.29%
2010_1	3.59%	3.59%	2.93%	1.67%	4.05%	5.15%	2.95%	2.46%	6.55%	5.80%	4.62%	3.40%	2.35%	3.17%
2010_2	-0.47%	3.77%	-3.48%	2.60%	3.81%	3.95%	0.00%	1.70%	0.08%	4.44%	-3.23%	1.09%	-3.26%	6.88%
2010_3	1.08%	4.23%	4.21%	3.25%	-2.57%	1.10%	1.78%	2.32%	2.81%	8.67%	-2.66%	2.71%	5.00%	1.77%
2010_4	1.90%	4.42%	-2.81%	3.31%	3.65%	2.87%	2.46%	3.83%	2.92%	2.97%	4.35%	1.77%	-5.99%	4.54%
2011_1	0.52%	5.52%	10.68%	7.56%	1.03%	1.38%	-2.69%	3.63%	5.39%	3.87%	3.89%	2.36%	6.34%	10.15%

ことが分かる．

また，中古マンションの1平米あたりの価格を説明する，築年数と駅徒歩という2つの属性ファクター，および不動産クラスプレミアムという切片の推定結果について述べる．東京都心5区で有意にならない場合があったものの，ほぼすべての地域という不動産クラスにおいて，駅徒歩・築年数・不動産クラスプレミアムは，どの四半期においても有意に推定された．つまり，混合効果モデル（4）式によって，中古マンションの1平米あたりの価格は，駅徒歩・築年数・不動産クラスプレミアムによって有意に推定されたといえよう．詳細な推定結果の掲載は紙面の関係上割愛するが，類似の推定結果は，石島・前田・谷山 [8] にも示されているので参照されたい．

3.3　擬似リターンの生成

わが国の中古マンションの1平米あたりの価格に，より高い適合度を示した混合効果モデル（4）式の推定結果を利用すれば，2.4 節に示した方法で擬似リターンを生成することができる．不動産価格の推定は 2006 年第2四半期から 2011 年第1四半期まで行ったので，得られる擬似リターンはそれより1つ少ない，2006 年第3四半期から 2011 年第1四半期までの 19 個である．その中古マンションの擬似リターンについて，それら分析対象の全体およびクラスごとの平均と標準偏差を四半期ごとに求めたものが，**表 4** である．

中古マンション市場の全体のリターンの挙動は，3.1 節で述べたデータの概要とおおよそ対応していることが分かる．つまり，2006 年半ばのマイナス・リターンで価格は底を打ち，その後，2007 年第1四半期から，2008 年第1四半期にかけてはプラス・リターン（価格は高水準）が続いている．その後，マイナス・リターン（価格は下落），2009 年第1四半期のマイナス・リターンで底を打ち，直近に至るまでプラス・リターン（価格は上昇）の傾向にある．

次に，地域という不動産クラスごとの傾向を見ていく．名古屋市や福岡市はハイリスク・ハイリターンである．一方，東京都心5区以外の東京都区部や札幌市は，それに次ぐリターンをローリスクで獲得している．東京都心5区や大阪市は，最もローリターンである．しかし，最もローリスクであるわけでもなく，単位リスクあたりのリターンは最も低くなっている．このように不動産クラスごとに，擬似リターンのリスク・リターン・プロフィールが異なっていることが分かる．

3.4　擬似リターンの時系列モデルによる要因分解とリターン・インデックス

中古マンションについて生成した擬似リターンをすべて用いて，その時系列モデルである（9）式に基づき，各四半期ごとに要因分解を行った．つまり，（9）式という時系列モデルに基づいて，すべての不動産に共通する項（m_t），不動産のクラスごとに変動する項（$\mu_{i,t}$），および誤差項（$\eta_{ij,t}$）という要因を推定した．より具体的には，擬似リターンの時系列モデル（9）式は結果として混合効果モデルであるため，SAS 9.1.3 の MIXED プロシジャを用いて各要因を推定した．その推定結果を**表 5** に示す．結果として，不動産クラスごとに要因分解されたリターンは，表 4 に示した，クラスごとに求めた擬似リターンの平均値とほぼ等しい値となる．しかしながら，各四半期において，（9）式により抽出・推定された，表 5 に示す不動産市場の全体に共通する項（m_t）は，表 4 に示した擬似リターン全体の平均値とは一致しないことが分かる．この擬似リターン全体の平均値は，あくまで統計的な平均としてしか解釈することができないであろう．しかしながら，価格リターンの理論（2）式に基づいた擬似リターンの表現である（9）式によって推定された各要因については，合理的に解釈を与えることができよう．つまり，推定された m_t はすべての不動産に共通する項であり，マンション市場という不動産市場全体の動向を表すリターンと解釈することができる．つまり，その市場ベンチマークとしての「リターン・イン

表 5　マンション価格の擬似リターンの要因分解

Table 5　Decomposition of pseudo return of apartment prices.

	全体	札幌市	都心5区	その他都区部	名古屋市	大阪市	福岡市
2006_3	-1.80%	2.48%	-3.39%	2.83%	-7.06%	-3.78%	-1.89%
2006_4	6.31%	9.09%	-3.39%	5.34%	3.25%	5.65%	17.90%
2007_1	2.58%	-7.46%	8.90%	4.75%	5.90%	0.64%	2.73%
2007_2	2.54%	1.04%	1.68%	-1.27%	11.45%	6.77%	-4.44%
2007_3	0.34%	-0.21%	4.51%	1.74%	2.35%	-3.62%	-2.74%
2007_4	-0.08%	-2.40%	-3.25%	1.76%	-2.80%	6.32%	-0.08%
2008_1	0.81%	3.87%	-2.05%	1.63%	2.38%	-1.86%	0.92%
2008_2	-0.88%	0.32%	1.51%	-4.28%	-3.39%	-2.93%	3.52%
2008_3	0.97%	-1.30%	0.27%	-0.77%	5.40%	-0.49%	2.70%
2008_4	-4.49%	-5.19%	-5.07%	-3.81%	-4.50%	-1.61%	-6.75%
2009_1	-0.13%	5.48%	-2.27%	-2.11%	1.80%	-3.52%	-0.20%
2009_2	-0.16%	-2.53%	0.14%	0.35%	0.12%	0.01%	0.93%
2009_3	1.95%	2.02%	1.16%	1.40%	2.31%	2.34%	2.48%
2009_4	0.48%	-1.79%	0.73%	2.25%	-1.56%	-0.91%	4.14%
2010_1	3.91%	2.95%	4.05%	2.95%	6.51%	4.62%	2.38%
2010_2	-1.01%	-3.47%	3.80%	-0.01%	0.07%	-3.22%	-3.25%
2010_3	1.43%	4.20%	-2.56%	1.78%	2.81%	-2.66%	4.99%
2010_4	0.76%	-2.80%	3.64%	2.46%	2.91%	4.35%	-5.97%
2011_1	4.10%	10.63%	1.04%	-2.68%	5.38%	3.89%	6.33%

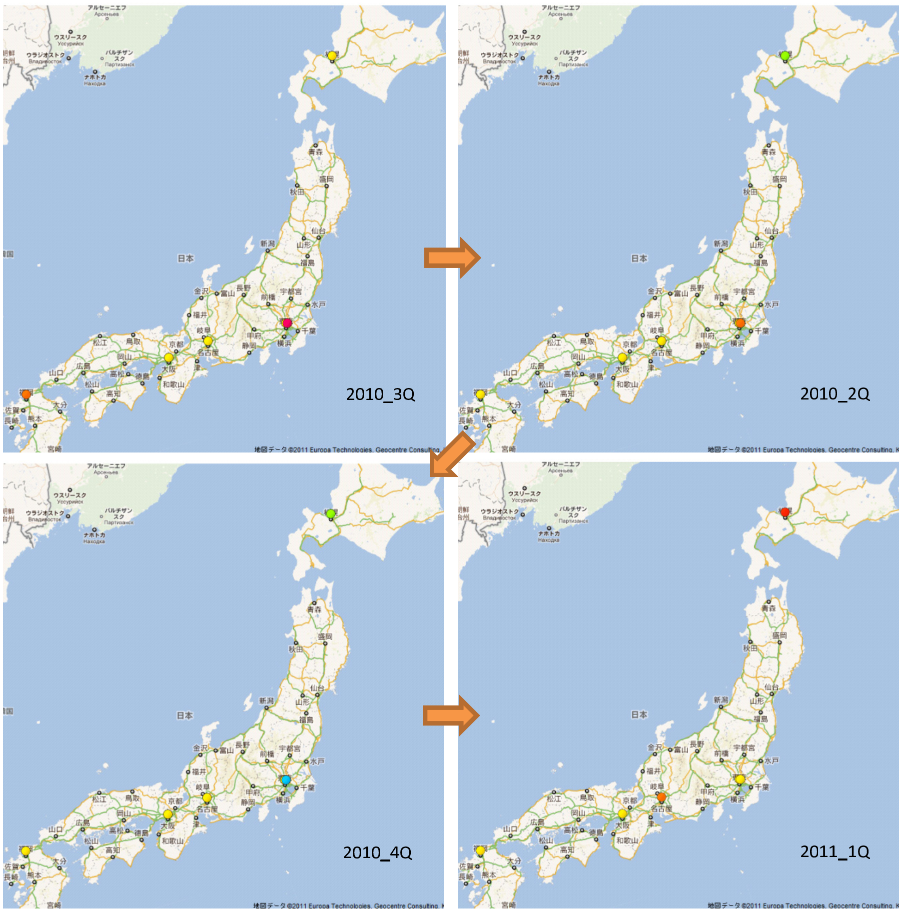

図 1　リターン・インデックスの Google Maps 上への表示例

Fig. 1　An example display of return index on Google Maps.

デックス」と見なせるであろう．このリターン・インデックスは，一定の時間間隔で把握することができるので，金融工学を直接的に適用することができる．したがって，不動産に対して，他の金融資産と同じ土俵で，金融工学を用いた分析ができることになる．

一方，このリターン・インデックスを，石島・前田・谷山 [8] にて提案された「不動産バリュエーション・マップ」上に，視覚的に表示することは有用である．これを，**図 1** に示す．石島ら [8] の不動産バリュエーション・マップでは，ある 1 時点において取り引きされた個々の不動産物件につい

て，それらの緯度・経度によって特定される座標にピンを打つ．そのうえで，クロスセクション方向に推定された不動産価格評価モデルを利用して，個々の不動産物件の理論価格を表示するものであった．そして，不動産の理論価格と実際の市場価格との乖離を不動産偏差値として計算し，その大小によって，ピンの色分けを行った．一方，本研究で新たに不動産バリュエーション・マップに付け加えた概念・機能は，不動産価格の時系列方向の挙動をリターンとして把握し，その推移を視覚的にとらえられる点である．地域によって構成する不動産クラスの代表的な座標（市役所）にピンを打つ．そして，(9) 式を用いて推定された各不動産クラスのリターンの大小によって，ピンの色分けを行う．そして，リターンの時間軸方向の推移を，スライダーを動かすことによって把握することができる．そのインタフェースはまだ改善の余地はあるものの，不動産価格の変動，ひいては不動産投資に関する有用な情報を提供してくれるツールとなり得る．今後の研究において，その完成度を高めていくこととする．

4. リターン・インデックスの応用：ポートフォリオにおける不動産の意義

前章では，不動産価格の擬似リターンを生成し，その時系列モデルに基づいて，わが国のマンションという不動産市場全体の動向を示すリターン・インデックスを一定の時間間隔で抽出した．本研究が提案するこのフレームワークは，金融工学が適用できる対象に不動産を追加したという点で大きな意義があり，種々の応用が可能となる．その 1 つの応用として本研究では，マンションという住宅用不動産は，投資対象として好ましい性質を持つのか，金融工学の理論を用いて分析することとする．不動産投資の比較対象として，国内外の株式や債券という 4 つの伝統的アセットへの投資に加えて，オルタナティブ投資も考慮する．ここで，オルタナティブ投資とは，株式や債券という伝統的アセットに代わる資産であり，かつ，それらと相関が低い（とされる）ものをいう．ヘッジ・ファンド，プライベート・エクイティ，コモディティ，不動産，排出権などがあげられ，不動産もこの投資における代表的アセットの 1 つである．本研究でとりあげるオルタナティブ投資は，十分なデータ期間が存在し，かつ，パフォーマンスが良好な「ヘッジ・ファンド」と「金（ゴールド）」をとりあげることとする．ヘッジ・ファンドは，2008 年第 2 四半期にピークを迎え（運用残高，1.93 兆ドル），その後の金融危機において運用残高が大きく暴落したものの，2009 年以降，金融危機前の水準まで運用残高は増加している（2011 年第 1 四半期の運用残高，1.75 兆ドル）．コモディティ（商品）の 1 つである金も，この 10 年間，持続的に上昇を続けており，金融危機以降も多くの金融資産の価格が低迷する中で，その価格は大きく上昇している．

分析期間は前章で行った不動産の価格リターンの分析と同一である，2006 年第 3 四半期から 2011 年第 1 四半期までの 19 四半期とした．上記アセットの価格リターンとして，次のベンチマーク・インデックスを用いた．国内株式（内株）は，MSCI Japan Net 指数（円建て），国内債券（内債）は，野村 BPI の総合指数（円建て），外国株式（外株）は，MSCI Kokusai Net Index（ドル建てを円換算），外国債券（外債）は，WGBI Non JPY（円建て），ヘッジ・ファンドは，HFRX グローバル・ヘッジファンド・インデックス（円建て），金は，金スポット価格（1 トロイオンスあたりの米国ドル建ての金現物価格を示す，Bloomberg 端末上におけるティッカーコード “GOLDS Cmdty” の値を円換算）である．

6 つのアセットのリターンに，前章で求めたマンションのリターン・インデックスを加えた 7 つのアセットのそれぞれについて，標準偏差と平均を求めたうえで，単位リスクあたりのリターン（平均を標準偏差で割った，リターン・リスク比）を計算したものを**表 6** に示す．また，x 軸にリスク（標準偏差），y 軸にリターン（平均）をとった平面上に，各アセットのリスク・リターン・プロフィールをプ

表 6　伝統的アセットとオルタナティブ・アセットのリスク指標（標準偏差，年率%），リターン指標（平均，年率%），単位リスクあたりのリターン（リターン・リスク比），およびアセット間の相関係数（%）

Table 6　Risk (standard deviation, in annual %), return (average, in annual %), return per unit risk (return-to-risk ratio) for traditional and alternative assets, and the correlation coefficient (%) between these assets.

	国内株式	国内債券	外国株式	外国債券	マンション	ヘッジファンド	金
標準偏差 (年率)	21.52%	2.12%	25.70%	9.39%	4.64%	9.32%	12.48%
期待値 (年率)	-8.28%	2.38%	0.02%	-0.59%	3.71%	3.48%	11.97%
リターン・リスク比	-0.38	1.12	0.00	-0.06	0.80	0.37	0.96

相関係数	国内株式	国内債券	外国株式	外国債券	マンション	ヘッジファンド	金
国内株式	100.00%	-55.86%	87.59%	51.31%	38.93%	85.59%	29.64%
国内債券	-55.86%	100.00%	-56.31%	-50.48%	-47.81%	-45.42%	-44.59%
外国株式	87.59%	-56.31%	100.00%	73.49%	53.47%	88.81%	43.81%
外国債券	51.31%	-50.48%	73.49%	100.00%	39.77%	49.80%	53.64%
マンション	38.93%	-47.81%	53.47%	39.77%	100.00%	45.21%	29.25%
ヘッジファンド	85.59%	-45.42%	88.81%	49.80%	45.21%	100.00%	43.70%
金	29.64%	-44.59%	43.81%	53.64%	29.25%	43.70%	100.00%

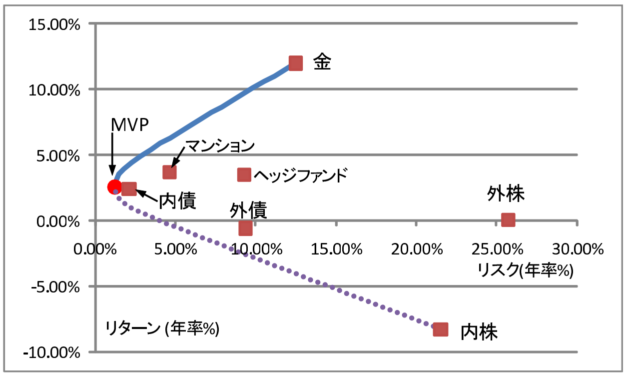

図 2　伝統的アセットとオルタナティブ・アセットのリスク・リターン・プロフィール．「内株」は国内株式，「内債」は国内債券，「外株」は外国株式，「外債」は外国債券，“MVP” は大域的最小分散ポートフォリオを示す．実線は Markowitz の MV モデルによる有効フロンティア

Fig. 2　Risk and return profiles of traditional and alternative assets, and the efficient frontier given by mean-variance model of Markowitz (solid line).

ロットしたものを図 **2** に示す（図中，四角のマーカー）．これより，内債が最もリスクが低く，外株・内株が最もリスクが高いことが分かる．その中間的なミドル・リスクを持つアセットが，金，ヘッジ・ファンド，外債，マンションである．金融工学の基本である Markowitz の MV モデル（平均分散モデル，たとえば，Luenberger [11]）によれば，単体のアセット，および複数のアセットに分散して投資するポートフォリオの選択は，2 つの規準によって行うべきである：

規準 1:　リターン（平均）が同じなら，リスクは低いほど良い（リターン一定のもとでのリスク最小化）．

規準 2:　リスク（分散，または標準偏差）が同じなら，リターンは高いほど良い（リスク一定の下でのリターン最大化）．

この 2 つの規準に照らせば，図 2 において，アセットのリスク・リターン・プロフィールは，「第 1 象限」の，左下（ローリスク・ローリターン），右上（ハイリスク・ハイリターン），またはその中間（ミドルリスク・ミドルリターン）にプロットされなければならない．したがって，第 4 象限に位置している外株・内株・外債は，金融工学的には投資対象となり得ない位置にある．ヘッジファンドは，規準 2 により外債と比較すれば選択すべきアセットだが，規準 1 によりマンションと比較すれば，やはり選択すべきではない．したがって，わが国における投資対象とすべきは，内債，金，マンションということになる．これは，表 6 のリターン・リスク比のランキングとも対応する．

次に，投資家が保有すべきポートフォリオの選択という観点より考察する．ポートフォリオ選択は，保有資金を各アセットへどれくらいずつ投資するのか，という投資金額比率（ポートフォリオ・ウェイト）によって特徴づけられる．その最適なウェイトの選択を，MV モデルに基づいて行うことにする．具体的には，7 つのアセットに対する最適ウェイトを求めるべく，規準 1 を実装した最適化問題（2 次計画問題）を解く．得られる最適ポートフォリオのリスクとリターンを算出し，これをリスク・リターン平面上に描いた軌跡を最小分散集合という（図 2，金と内株を結ぶ曲線）．その中で最小のリスクを持つポートフォリオを，大域的最小分散ポートフォリオと呼ぶ（図 2，MVP と表示）．さらに，規準 2 により，MVP より上方の曲線（MVP と金を結ぶ実線）のみが選択される．これを有効フロンティアという．得られた最適ポートフォリオについて，以下に考察する．

まず，MVP では内債とマンションへの投資で 90%強を占める（図表としては示さなかったが，その内訳は内債に 76.6%，マンションに 15.5%である）．これは，対象資産の中で最小のリスクを持つ内債よりも，さらなるリスク軽減効果を狙いたければ，これと強い負の相関を持つマンション（表 6）を組み入れるべきである，ということを意味する．そして，MVP よりもリスクを取ってでもリターンを狙いたければ，内債と強い負の相関を持つ金（表 6）への投資比率を増やすべきである．そして，最大のリターンは，有効フロンティアの上端に位置する，金への 100%投資というポートフォリオにより獲得できる．

以上の分析より，マンションは，内債と金との中間的なリスク・リターン・プロフィールを持ち，最適なポートフォリオを構成するのに非常に有用なアセットであることが明らかになった．そして，これは機関投資家にとって大きな示唆に富んでいる．そのポートフォリオにマンションを組み入れることは，リスク・リターンの観点より好ましい性質を持ち，その保有に加えて国内債券や金をリスク許容度に応じて保有すれば良いことを意味している．このような 2010 年代初頭の投資に関する 1 つの知見は，実物不動産のリターン・インデックスを抽出する本研究のフレームワークを応用してはじめて，獲得できたと考えられる．

5.　おわりに

本研究では，不動産の価格とリターンの時系列を擬似的に生成・分析するためのフレームワークを提案した．このフレームワークは金融工学の理論と手法に基づいており，不動産のリスクとリターンの分析に役立つものとなっている．より具体的には，次の 5 点が本研究の意義と貢献であると考えられる．

第 1 に，議論の出発点として，金融工学の理論と手法に基づき不動産の価格を評価する理論モデルと，そのリターンが備えるべき理論モデルを構築した．

第 2 に，その理論モデルに基づきつつも，それとの乖離をとらえうる実際の市場における，不動産価格評価の統計モデルと，価格リターンを分析するための時系列モデルを

提案した．

第 3 に，その提案モデルを用いて，不動産の価格リターンを擬似的に一定の時間間隔で生成する方法を考案した．

第 4 に，わが国の住居用マンション不動産データに対して，提案モデルを適用して実証分析を行った．これは，提案する統計・時系列モデルによって，一定時間間隔で不動産価格擬似リターンを生成し，その要因分解を行って性質を調べるものである．これにより，不動産市場全体の価格の挙動を表すリターン・インデックスを抽出することができ，さらにこれを不動産バリュエーション・マップ上に表示することによって，より視覚的に結果を把握することもできるようになった．

第 5 に，不動産のリターン・インデックスの応用として，従来の金融資産と比較検討しつつ，不動産の投資としての意義を示した．

参考文献

[1] Box, G.E.P. and Cox, D.R.: An Analysis of Transformations (with Discussion), *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, Vol.26, pp.211–252 (1964).

[2] Campbell, J.Y. and Viceira, L.M.: *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press (2002). See also its appendix which is, available from ⟨http://kuznets.fas.harvard.edu/∼campbell/papers.html⟩ (accessed 2011-08-09).

[3] Case, K.E. and Shiller, R.J.: The Efficiency of the Market for Single-Family Homes, *American Economic Review*, Vol.79, No.1, pp.125–137 (1989).

[4] Fitzmaurice, G.M., Laird, N.M. and Ware, J.H.: *Applied Longitudinal Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. (2004).

[5] Gurka, M.J., Edwards, L.J., Muller, K.E. and Kupper, L.L.: Extending the Box-Cox Transformation to the Linear Mixed Model, *Journal of Royal Statistical Society A*, Vol.169, No.2, pp.273–288 (2006).

[6] Hsiao, C.: *Analysis of Panel Data: Second Edition*, Cambridge University Press (2003).

[7] 石島　博，前田　章：不動産価格評価の枠組みと政策的含意，経済政策ジャーナル，Vol.8，No.2，pp.95–98 (2011).

[8] 石島　博，前田　章，谷山智彦：不動産の価格とリスクの評価モデルとその応用，情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用，Vol.4，No.2，pp.1–12 (2011).

[9] Lancaster, K.: A New Approach to Consumer Theory, *Journal of Political Economy*, Vol.74, pp.132–157 (1966).

[10] Littell, R.C., Milliken, G.A., Stroup, W.W., Wolfinger, R.D. and Schabenberber, O.: *SAS for Mixed Models: Second Edition*, SAS Publishing (2006).

[11] Luenberger, D.G.: *Investment Science*, Oxford University Press (1997)（今野　浩，枇々木規雄，鈴木賢一（訳）：金融工学入門，日本経済新聞社 (2002)）.

[12] McCulloch, C.E., Searle, S.R. and Neuhaus, J.M.: *Generalized, Linear, and Mixed Models: Second Edition*, John Wiley & Sons (2008).

[13] Rosen, S.: Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition, *Journal of Political Economy*, Vol.82, pp.34–55 (1974).

[14] 吉田　靖，駒井正晶，森平爽一郎，喜多村広作，森永昭彦：新築マンション価格の変動と家計の選択，ファイナンシャル・プラニング研究，Vol.3, pp.30–42 (2003).

付　　録

付録では，関連する先行研究である石島・前田 [7] が構築した動的一般均衡フレームワークに基づいて，本研究で提案する不動産価格のリターンの理論モデル（2）式を導出する．

経済には 3 つのタイプの市場：(1) 金融資産取引市場（株式や債券などの証券の取引市場），(2) 不動産取引市場（土地や建物などの売買市場），(3) 不動産賃貸契約市場（土地や建物などの広義の賃貸契約市場）が存在すると考える．経済を構成する主体を 1 人の代表的経済主体で表し，離散時点において，不動産と金融資産に対して投資を行うとする．代表的経済主体が一般財の消費と不動産属性（延床面積，築年数，駅徒歩など）から得られる期待効用を最大化するとき，その必要十分条件にマーケット・クリアリング条件を付加すると，完全競争下における均衡金融資産価格，均衡不動産取引価格，均衡不動産賃料はそれぞれ，以下のように与えられる（石島・前田 [7] の命題 1）．

$$P_{j,t} = E_t\left[\left(P_{j,t+1} + D^P_{j,t+1}\right)\tilde{M}^C_{t+1}\right]\ (j = 1, \ldots, N^P) \tag{A.1}$$

$$H_{i,t} = L_{i,t}D^H_{i,t} + E_t\left[H_{i,t+1}\tilde{M}^C_{t+1}\right]\ (i = 1, \ldots, N^H) \tag{A.2}$$

$$D^H_{i,t} = \boldsymbol{b}_{i,t}\tilde{\boldsymbol{M}}^Z_t\ (i = 1, \ldots, N^H) \tag{A.3}$$

ここで，$P_{j,t}$ は時点 t で取り引きされる N^P 個の金融資産のうち，第 j 番目の金融資産の均衡価格，$D^P_{j,t}$ は時点 t における金融資産 j の配当，$\tilde{M}^C_{t+1} := \delta \cdot \partial u(C_{t+1}, \boldsymbol{Z}_{t+1})/\partial C_{t+1}\Big/\partial u(C_t, \boldsymbol{Z}_t)/\partial C_t$ は，異時点間の限界代替率である．ただし，u は時間加法性を仮定した効用関数，δ は時間割引率，C_t は時点 t における代表的経済主体の消費量，$\boldsymbol{Z}_t := (Z_{1,t} \ldots Z_{k,t} \ldots Z_{K,t})'$ は，時点 t において市場で取り引きされる不動産の全体が保有する属性の量を，それぞれ表す．

一方，$H_{i,t}$ は，時点 t で取り引きされる N^H 個の不動産のうち，第 i 番目の不動産の均衡取引価格，$D^H_{i,t}$ は時点 t における不動産 i の賃料，$L_{i,t}$ は時点 t における不動産 i の利用率，つまり，1 から空室率を差し引いたもの，$\boldsymbol{b}_{i,t} := (b_{i1,t} \ldots b_{ik,t} \ldots b_{iK,t})$ は，時点 t において不動産 i が保有する K 種類の属性の量，$\tilde{M}^Z_{k,t} := \partial u(C_t, \boldsymbol{Z}_t)/\partial Z_{k,t}\Big/\partial u(C_t, \boldsymbol{Z}_t)/\partial C_t$ $(k = 1, \ldots, K)$ は，属性・消費間の限界代替率であり，$\tilde{\boldsymbol{M}}^Z_t := \left(\tilde{M}^Z_{1,t} \ldots \tilde{M}^Z_{k,t} \ldots \tilde{M}^Z_{K,t}\right)'$ と書く．

さて，定常状態における各資産の価格の性質について考えよう．ここでいう定常とは，(A.1)，(A.2) および (A.3) 式を記述するすべての変数が t に依らない値を取ることを意味する．定常状態において，異時点間の限界代替率

$\tilde{M}^C_{t+1}$ は任意の時点 $t+1$ で $M^C_{t+1}=\delta$ であるから，これを代入した（A.1）式と（A.2）式より δ を消去すれば，金融資産と不動産の取引価格の収益率には，次のパリティが成立する．

$$\left(\frac{L_i D_i^H}{H_i}\right)^{-1} = 1 + \left(\frac{D_j^P}{P_j}\right)^{-1} \quad \forall i, j \,. \tag{A.4}$$

つまり，「(利用率)×（実物資産キャップレート）の逆数」=「1 +（金融資産の配当利回り）の逆数」なるパリティが成立している．

さて，（A.2）式を再帰的に解いたうえで，（A.3）式を代入すると，均衡不動産取引価格を次式のように書き直せる．

$$H_{i,t} = \sum_{\tau=0}^{\infty} E_t\left[\delta^\tau L_{i,t+\tau} \boldsymbol{b}_{i,t+\tau} \boldsymbol{M}^Z_{t+\tau}\right] \tag{A.5}$$

ただし，$\boldsymbol{M}^Z_{t+\tau} := \partial u(C_{t+\tau}, \boldsymbol{Z}_{t+\tau})/\partial \boldsymbol{Z}_{t+\tau} \Big/ \partial u\left(C_t, \boldsymbol{Z}_t\right)/\partial C_t$ と書いた．そのうえで，以下の仮定をおくことにする．

仮定 1　不動産が保有する属性量が時間によらず一定値を取るとする．つまり，

$$\boldsymbol{b}_{i,t} = \boldsymbol{b}_i \quad \forall i, t \tag{A.6}$$

を仮定する．たとえば，広さ（延床面積）や最寄駅からの徒歩時間という属性量は一定であると見なしてよいであろう．

この仮定の下，（A.5）式は，次のように書き直すことができる．

$$H_{i,t} = \boldsymbol{b}_i E_t\left[\sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^\tau L_{i,t+\tau} \boldsymbol{M}^Z_{t+\tau}\right] \tag{A.7}$$

これは，さらに以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} H_{i,t+1} &= \boldsymbol{b}_i \delta^{-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^{\tau+1} E_{t+1}\left[L_{i,t+\tau+1} \boldsymbol{M}^Z_{t+\tau+1}\right] \\ &= \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k E_{t+1}\left[L_{i,t+k} \boldsymbol{M}^Z_{t+k}\right] \\ &= \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k E_{t+1}\left[L_{i,t+k} \boldsymbol{M}^Z_{t+k}\right] \\ &\quad - \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i E_{t+1}\left[L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t\right] \,. \end{aligned} \tag{A.8}$$

時点 t での期待値をとることにより，次式を得る．

$$\begin{aligned} &E_t\left[H_{i,t+1}\right] \\ &\quad = \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k E_t\left[L_{i,t+k} \boldsymbol{M}^Z_{t+k}\right] - \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t \\ &\quad = \delta^{-1} H_{i,t} - \delta^{-1} \boldsymbol{b}_i L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t \,. \end{aligned} \tag{A.9}$$

あるいは，

$$\frac{E_t\left[H_{i,t+1}\right] - H_{i,t}}{H_{i,t}} = \left(\delta^{-1} - 1\right) - \frac{\delta^{-1} \boldsymbol{b}_i L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t}{H_{i,t}} \,. \tag{A.10}$$

ここで，定常均衡状態において（A.4）式が成立することに注意する．ただし，これはあくまでも定常均衡状態という条件付きである．現実的には，経済体系は非定常あるいは不均衡の状態から，徐々に（A.4）式へと収束していくと考えるのが妥当である．

この（A.4）式は，任意の不動産 i と金融資産 j について成り立つとしている．これより，金融市場において「市場ポートフォリオ」が存在すると仮定し，金融資産 j を市場ポートフォリオ m と読み替えたうえで，その配当利回りを $r_{m,t} := D^P_{m,t}/P_{m,t-1}$ とする（これは，時点 t における情報の下で観測可能な変数となっている）．これを用いれば，不動産 i のキャップレート $L_{i,t} D^H_{i,t}/H_{i,t} = \boldsymbol{b}_i L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t / H_{i,t}$ は，次のように表される（ここで，$\boldsymbol{M}^Z_t = \tilde{\boldsymbol{M}}^Z_t$ であることに注意する）．

$$\frac{\boldsymbol{b}_i L_{i,t} \boldsymbol{M}^Z_t}{H_{i,t}} = \frac{r_{m,t}}{1 + r_{m,t}} - \delta \sigma_i \varepsilon_{i,t} \,. \tag{A.11}$$

ここで，$\sigma_i \varepsilon_{i,t}$ は，$r_{m,t}/(1+r_{m,t})$ を中心とするバラつきを表し，不動産 i に固有の誤差項である．簡略化のため，$\varepsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0,1)$ とする．

さらに，市場ポートフォリオの配当利回り $r_{m,t}$ は確率的な変動をすると考えられるので，$\varepsilon_{m,t} \sim \mathcal{N}(0,1)$ として，$r_{m,t}/(1+r_{m,t})$ を次のように書くことにする．

$$\frac{r_{m,t}}{1 + r_{m,t}} := \hat{\mu}_{m,t-1} - \delta \sigma_{m,t-1} \varepsilon_{m,t} \tag{A.12}$$

ただし，$\hat{\mu}_{m,t-1} := E_{t-1}\left[\frac{r_{m,t}}{1+r_{m,t}}\right]$，$\sigma^2_{m,t-1} := \delta^{-2} E_{t-1}\left[\left(\frac{r_{m,t}}{1+r_{m,t}} - \hat{\mu}_{m,t-1}\right)^2\right]$ とおいた．また，$\varepsilon_{i,t}$ と $\varepsilon_{m,t}$ は互いに独立であるとする．

（A.11）と（A.12）式を（A.10）式に代入すれば次式を得る．

$$\frac{E_t\left[H_{i,t+1}\right] - H_{i,t}}{H_{i,t}} = \mu_{m,t-1} + \sigma_{m,t-1} \varepsilon_{m,t} + \sigma_i \varepsilon_{i,t} \,. \tag{A.13}$$

ただし，$\mu_{m,t-1} := \left(\delta^{-1} - 1\right) - \delta^{-1} \hat{\mu}_{m,t-1}$ とおいた．

これより，時系列計測データのノイズを $\tilde{\eta}_{i,t+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ として，不動産の価格リターン $\Delta H_{i,t}/H_{i,t} := \left(H_{i,t+1} - H_{i,t}\right)/H_{i,t}$ は次のように書き直される．

$$\frac{\Delta H_{i,t}}{H_{i,t}} = \mu_{m,t-1} + \sigma_{m,t-1} \varepsilon_{m,t} + \sigma_i \varepsilon_{i,t} + \sigma^\eta_{i,t} \tilde{\eta}_{i,t+1} \,. \tag{A.14}$$

ここで，$\left(\sigma^\eta_{i,t}\right)^2 := E_t\left[\left(\frac{\Delta H_{i,t}}{H_{i,t}} - E_t\left[\frac{\Delta H_{i,t}}{H_{i,t}}\right]\right)^2\right]$ とする．また，$\tilde{\eta}_{i,t+1}$ と $\varepsilon_{m,t}$ と $\varepsilon_{i,t}$ のいずれもが，互いに独立であるとする．（A.14）式の右辺を見てみると，以下のようにいえる．

(i) 第 1 項と第 2 項は，すべての不動産に共通する確率項である．

（ii）第 3 項は，不動産ごとの個別性を反映したランダム・ウォーク項である．

（iii）第 4 項は，時系列データの不規則変動を表した項である．

また，第 1 項から第 3 項までは，時点 t での情報集合について可測であるが，第 4 項のみ時点 $t+1$ での情報集合について可測である．以上の議論より，不動産の価格リターンは，本文（2）式のように 3 つの要因に分解することができる，ということが理論的にいえる．

さて，この分解は，Case and Shiller [3] の「リピート・セールス・モデル（Weighted Repeated Sales Index）」と対応関係がある．ただし，このリピート・セールス・モデルは，理論的に導出されたものではなく，不動産の「対数価格」についての，統計モデルとして先験的に与えられたものであることに注意する（Case and Shiller [3]，p.126，右段，l.6 以降）．まずは，そのモデルを Case and Shiller [3] より引用することにしよう．

$$\check{P}_{i,t} = \check{C}_t + \check{H}_{i,t} + \check{N}_{i,t} \ . \tag{A.15}$$

ここで，$\check{P}_{i,t}$ は時点 t における住宅 i の対数価格，$\check{C}_t$ は時点 t における分析対象地域の対数住居価格水準，$\check{H}_{i,t}$ は $\check{C}_t$ と無関係にランダムウォークする項（$\Delta\check{H}_{i,t}$ は平均ゼロ，分散 σ_h^2 の正規分布に従う），$\check{N}_{i,t}$ は $\check{C}_t$ とも $\check{H}_{i,t}$ とも相関を持たない誤差である．

不動産の価格リターンが正規分布を用いて表現されていれば，離散時点における伊藤の公式に相当する対数線形近似 [2] といった適切な近似により，対数価格を正規分布として再表現することが可能である．したがって，本研究で導出した不動産価格のリターンの理論モデルはほぼ同一の形式で，不動産の対数価格のモデルとして表現し直すことが可能である，と予想される．本研究では，不動産の価格リターンに関する 1 つの合理的な理論モデルを提案することが第一義的な目的であるため，リピート・セールス・モデルの対応関係に関する詳細な分析は将来の研究で行うこととする．

石島 博

1971 年生．1999 年東京工業大学大学院社会理工学研究科経営工学専攻博士課程修了．同年慶應義塾大学総合政策学部専任講師．2004 年 10 月より早稲田大学ファイナンス研究センター助教授．2006 年 5 月より大阪大学金融・保険教育研究センター特任助教授．2007 年 4 月より中央大学大学院国際会計研究科准教授．ファイナンス理論，金融工学の研究に従事．博士（工学）．2010 年日本 FP 学会賞最優秀論文賞，SAS ユーザー総会アカデミア/テクノロジー & ソリューションセッション 2010 優秀賞受賞．日本金融・証券計量・工学学会（JAFEE），日本経営財務研究学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本ファイナンス学会，日本 FP 学会各会員．

前田 章

1963 年生．1990 年 3 月東京大学大学院工学系研究科電気工学専攻修士課程修了．同年 4 月東京電力株式会社入社．1996 年 6 月スタンフォード大学大学院 MS，1999 年 4 月同 Ph.D.（Engineering-Economic Systems and Operations Research，Minor: Economics）．1999 年 4 月慶應義塾大学総合政策学部専任講師．2004 年 4 月京都大学大学院エネルギー科学研究科助教授（2007 年 4 月職名変更により准教授）．2011 年 4 月東京大学教養学部附属教養教育高度化機構（現職）．2004 年 10 月より 2007 年 4 月，内閣府経済社会総合研究所客員主任研究官．2010 年 9 月環境経済政策学会学術賞受賞．

谷山 智彦

1978 年生．2004 年 3 月慶應義塾大学大学院政策・メディア研究科修士課程修了．同年 4 月株式会社野村総合研究所入社．2010 年 3 月大阪大学大学院経済学研究科経営学系専攻博士課程修了．現在，株式会社野村総合研究所主任研究員．不動産等のオルタナティブ投資の調査研究に従事．博士（経済学）．2010 年日本 FP 学会賞最優秀論文賞受賞．