漸化式を用いる複素変数のベッセル関数 $I_n(z)$ の数値計算†

吉 田 年 雄†† 浅 野 道 雄††
梅 野 正 義†† 三 木 七 郎††

Abstract

The recurrence techniques are useful for computing the value of $I_n(z)$ or $J_n(z)$ with complex argument as well as that with real argument.

The approximate value of $I_n(z)$ is given by

$$I_n(z) \simeq \frac{e^z G_n(z)}{\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)}, \qquad \epsilon_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 2 & (k \geqq 1) \end{cases},$$

where $G_{m+1}(z)=0$, $G_m(z)=\alpha \fallingdotseq 0$ (α: an arbitrary constant) and then $G_{m-1}(z)$, $G_{m-2}(z)$, $\cdots$, $G_n(z)$, $\cdots$, $G_1(z)$, $G_0(z)$ are the values obtained by the successive application of the recurrence relation

$$G_{k-1}(z) = \frac{2k}{z} G_k(z) + G_{k+1}(z).$$

The larger the value of the integer m, the higher the accuracy in the approximate value of $I_n(z)$. However, in order to compute the value of $I_n(z)$ with a given accuracy as efficiently as possible, the value of m must be chosen minimum.

In this paper is obtained for a given value of z the minimum value M of m in the computation of $I_n(z)$ with a desired accuracy. Also for convenience of the actual computation, we could give a simple function of $R_e(z)$ and $I_m(z)$ for M.

1. まえがき

複素変数 z のベッセル関数 $I_n(z)$ の計算法については，$K_n(z)$，$K_n(-z)$ を連分数法[1]によって計算し，それから $I_n(z)$ を求める方法が報告されている．しかし，実数変数 x の $I_n(x)$ の計算に利用されている漸化式を用いる方法[2)~6)]を複素変数 z の場合に適用し，誤差解析を行なった報告はなされていない．漸化式を用いる計算法は，任意の大きさの次数 n に対する $I_n(z)$ を必要とする場合とか，多くの n に対して $I_n(z)$ の値をいっせいに必要とする場合，たとえば，e^{ax}，$\sin ax$ などのチェビシェフ展開の係数を求める場合，あるいは，$I_n'(z)/I_n(z)$ $(2I_n'(z)=I_{n-1}(z)+I_{n+1}(z))$ を求める場合などに，有利である．

本論文は，複素変数の $I_n(z)$ の計算に対して，実数変数の場合と同様，漸化式を用いる方法が有効であることを誤差解析を通じて示すとともに，所要の精度で，できるだけ速く，$I_n(z)$ の値を計算する方法について述べるのが目的である．

ここでは，

$$\left.\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \\ I_n(-z) &= (-1)^n I_n(z), \\ I_n(\bar{z}) &= \overline{I_n}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

が成立することを考慮して，整数 n は $n \geqq 0$，$\arg z$ は $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{2}$ とする．

なお，非整数次の場合については，整数次のものを一般化すれば得られるので，ここでは述べない．

† Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Function $I_n(z)$ with Complex Argument, by Toshio Yoshida, Michio Asano, Masayoshi Umeno and Shichiro Miki (Nagoya University)

†† 名古屋大学工学部電子工学科

2. 計算法および誤差解析

$I_n(z)$ および $\bar{K}_n(z)=(-1)^n K_n(z)$ は，次の漸化式

$$G_{k-1}(z)=\frac{2k}{z}G_k(z)+G_{k+1}(z) \tag{2}$$

を満たす．逆に，この漸化式の解は，$I_n(z)$ と $\bar{K}_n(z)$ の一次結合で表わされる．

いま，適当な大きさの正整数 m を選び，α をある任意定数 ($\alpha \neq 0$) とすれば，

$$G_{m+1}(z)=\xi I_{m+1}(z)+\eta \bar{K}_{m+1}(z)=0 \tag{3}$$

$$G_m(z)=\xi I_m(z)+\eta \bar{K}_m(z)=\alpha \tag{4}$$

を満たす ξ, η が存在する．そのとき，$G_n(z)$ は，

$$G_n(z)=\xi I_n(z)+\eta \bar{K}_n(z) \tag{5}$$

と表わされる．したがって，(5) は (3) より，

$$G_n(z)=\xi\left(I_n(z)-\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_n(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}\right) \tag{6}$$

となる．(6) と関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon_k I_k(z)=e^z, \tag{7}$$

$$\epsilon_k=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 2 & (k\geqq 1)\end{cases}$$

より，l を適当な大きさの正整数 ($l \leqq m$) として，

$$\sum_{k=0}^{l}\epsilon_k\left(\frac{G_k(z)}{\xi}+\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_k(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}\right)+2\sum_{k=l+1}^{\infty}I_k(z)=e^z \tag{8}$$

が得られる．そのとき，(6) と (8) より ξ を消去すると，

$$I_n(z)=\frac{e^z G_n(z)\left\{1-e^{-z}\left(\sum_{k=0}^{l}\epsilon_k\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_k(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}+2\sum_{k=l+1}^{\infty}I_k(z)\right)\right\}}{\sum_{k=0}^{l}\epsilon_k G_k(z)}+\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_n(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)} \tag{9}$$

が得られる．したがって，(3) と (4) を初期値とし，漸化式を用いて，$G_{m-1}(z)$, $G_{m-2}(z)$, …, $G_n(z)$, …, $G_1(z)$, $G_0(z)$ を計算し，$I_n(z)$ の値を

$$I_n(z)\simeq\frac{e^z G_n(z)}{\sum_{k=0}^{l}\epsilon_k G_k(z)} \tag{10}$$

として求めることができるためには，(9) において，

$$\left|e^{-z}\left(\sum_{k=0}^{l}\epsilon_k\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_k(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}+2\sum_{k=l+1}^{\infty}I_k(z)\right)\right|\ll 1 \tag{11}$$

および，

$$\left|\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_n(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}\right|\ll|I_n(z)| \tag{12}$$

が満たされなければならない．

(8) の l は，実際のプログラムに都合のよいように，

$$l=m \tag{13}$$

とする．そのとき，$|I_n(z)|$ の値が p 桁正しく求められるためには，

$$\left|e^{-z}\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{I_{m+1}(z)\bar{K}_k(z)}{\bar{K}_{m+1}(z)}+2\sum_{k=m+1}^{\infty}I_k(z)\right)\right|$$
$$\leqq|e^{-z}|\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\left|\frac{I_{m+1}(z)K_k(z)}{K_{m+1}(z)}\right|+2\sum_{k=m+1}^{\infty}|I_k(z)|\right) \tag{14}$$

の成立することを考慮して，

$$|e^{-z}|\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\left|\frac{I_{m+1}(z)K_k(z)}{K_{m+1}(z)}\right|+2\sum_{k=m+1}^{\infty}|I_k(z)|\right)<0.5\times10^{-p} \tag{15}$$

および，

$$\left|\frac{I_{m+1}(z)K_n(z)}{K_{m+1}(z)I_n(z)}\right|<0.5\times10^{-p} \tag{16}$$

が満たされればよい．

いま，ν を正の大きい実数とすれば ($\nu\gg1$), $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ は Debye の漸近展開式[7] によって表わすことができ，さらに，

$$\left|\frac{1}{\nu^2+z^2}\right|\cdot\left|1-\frac{5}{3}\frac{\nu^2}{\nu^2+z^2}\right|<1 \tag{17}$$

の領域では，その展開式の初項，すなわち，

$$I_\nu(z)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+z^2}}{z}\right)^{-\nu}e^{\sqrt{\nu^2+z^2}}(\nu^2+z^2)^{-1/4} \tag{18}$$

$$K_\nu(z)\simeq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+z^2}}{z}\right)^{\nu}e^{-\sqrt{\nu^2+z^2}}\cdot(\nu^2+z^2)^{-1/4} \tag{19}$$

で近似できる．そのとき，(18), (19) より，

$$\left|\frac{I_\nu(z)}{K_\nu(z)}\right|\simeq\frac{1}{2}\left|\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+z^2}}{z}\right|^{-2\nu}e^{\mathrm{Re}(2\sqrt{\nu^2+z^2})} \tag{20}$$

がなりたつ．与えられた z に対して，(20) の右辺は，その対数微分 (ν に関する) をとることにより，少くとも (17) の領域では，ν の単調減少関数であることがわかる．(付録参照.)

したがって，(15) の左辺は，与えられた z に対して，m が大きいとき，(17) の領域 ($m=[\nu]+1$) では，m の単調減少関数であることがわかる．これは，

(17) の領域は ν に関する上限がないので，m を大きくさえすれば必ず (15) の左辺は m の単調減少関数になることを意味する．

そこで，(15) を満足する m の最小値を M とし，

$$\left|\frac{I_{M+1}(z)K_n(z)}{K_{M+1}(z)I_n(z)}\right| < 0.5\times 10^{-p} \qquad (21)$$

を満足する n の最大値を N とすれば，$m=M$ としたとき，$I_n(z)$ の値は，$n\leqq N$ に対しては，(10)，すなわち，

$$I_n(z) \simeq \frac{e^z G_n(z)}{\sum_{k=0}^{M}\epsilon_k G_k(z)} \qquad (22)$$

によって，p 桁正しく求められる．

また，$n>N$ に対しては，m の値を M より増さないと所要の精度で $I_n(z)$ を求めることができない．与えられた z，M，N ($M>N$) に対して，$|I_{M+\mu}(z)\cdot K_{N+\mu}(z)/(K_{M+\mu}(z)I_{N+\mu}(z))|$ は，μ の単調減少関数であることが，その対数微分よりわかるから（付録の場合と同様な手順を用いて），

$$N+\mu=n,\quad M+\mu=M'$$

すなわち，

$$M'=n+M-N \qquad (23)$$

を m の値とすれば，(16) は満たされる．それで，$I_n(z)$ の値は，(22) によって，p 桁正しく求められる．((15) は，$m=M$ で成立しているから，(22) の $\sum$ は $k=M$ までで十分である．)

3. M および N の値

ここでは，与えられた z に対して，(15) を満足する m の最小値 M，および，その M に対し (21) を満足する n の最大値 N を具体的に示す．

Re(z)，Im(z)=0(0.1)1(1)10(10)100 に対して，p

Re(z)		Im(z): 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	M		5	5	6	7	7	7	8	8	8	9	11	14	16	17	19	21	22	24	25	39	52	64	76	87	99	110	121	133
	N		3	3	4	5	5	4	5	5	5	6	7	10	12	12	14	16	16	18	19	31	43	55	66	76	88	98	108	120
0.1	M	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	11	14	16	17	19	21	22	24	25	39	52	64	76	87	99	110	121	132
	N	2	3	4	4	5	5	4	5	5	5	6	7	10	12	12	14	16	16	18	19	31	43	55	66	76	88	98	108	119
0.2	M	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	11	14	16	17	19	21	22	24	25	39	52	64	76	87	99	110	121	132
	N	3	3	4	4	5	4	4	5	5	5	6	7	10	12	12	14	16	16	18	19	31	43	55	66	76	88	98	108	119
0.3	M	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	11	14	16	17	19	21	22	24	25	39	52	64	76	87	99	110	121	132
	N	4	4	4	5	5	4	5	5	5	6	6	7	10	10	12	14	16	16	18	19	31	43	55	66	76	88	98	108	119
0.4	M	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	11	14	15	17	19	21	22	24	25	39	52	64	76	87	96	110	121	132
	N	4	4	5	5	4	4	5	5	5	6	6	7	10	10	12	14	16	16	18	19	31	43	55	66	76	86	98	108	119
0.5	M	7	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	11	14	15	17	19	21	22	24	25	39	52	64	75	87	98	110	121	132
	N	5	5	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	10	10	12	14	16	16	18	19	31	43	55	65	76	86	98	108	119
0.6	M	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	11	14	15	17	19	21	22	24	25	39	51	64	75	87	98	110	121	132
	N	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	10	10	12	14	16	16	18	19	31	42	55	65	76	86	98	108	119
0.7	M	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	11	14	15	17	19	20	22	24	25	39	51	63	75	87	98	109	121	132
	N	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	10	10	12	14	14	16	18	19	31	42	53	65	76	86	97	108	119
0.8	M	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	12	14	15	17	19	20	22	23	25	39	51	63	75	87	98	109	120	132
	N	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	8	10	10	12	14	14	16	17	19	31	42	53	65	76	86	97	107	119
0.9	M	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	12	14	15	17	19	20	22	23	25	39	51	63	75	87	98	109	120	131
	N	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	8	10	10	12	14	14	16	17	19	31	42	53	65	76	86	97	107	118
1	M	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	10	12	14	15	17	19	20	22	23	25	39	51	63	75	86	98	109	120	131
	N	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	10	10	12	14	14	16	17	19	31	42	53	65	75	86	97	107	118
2	M	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	14	16	17	19	20	22	23	25	38	50	62	74	85	97	108	119	130
	N	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	10	11	12	14	14	16	17	19	30	41	52	63	73	85	95	106	116
3	M	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13	13	14	15	16	17	19	20	22	23	24	37	50	61	73	84	96	107	118	129
	N	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	10	11	12	14	14	16	17	17	29	41	51	62	72	84	94	105	115
4	M	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	15	16	17	18	19	20	22	23	24	37	49	61	72	83	95	106	117	128
	N	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12	13	13	14	16	17	17	29	39	51	61	71	82	93	103	114
5	M	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	17	17	18	19	21	22	23	24	36	48	60	71	83	94	105	116	126
	N	10	10	10	10	10	20	10	10	10	10	10	11	12	11	12	13	15	16	16	17	27	36	49	59	71	81	91	102	111
6	M	16	16	16	16	16	16	16	16	16	17	17	17	17	18	19	20	21	22	23	24	36	48	59	70	82	93	104	114	125
	N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	12	12	11	11	12	13	14	15	15	16	17	27	38	48	58	69	80	90	99	109
7	M	17	17	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19	20	21	22	22	23	25	36	47	58	70	81	92	102	113	124
	N	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	13	14	15	16	15	16	18	27	37	46	58	69	78	87	97	108
8	M	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	20	20	21	22	23	24	25	36	47	58	69	80	91	101	112	123
	N	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	14	13	14	15	16	17	18	27	37	46	56	66	77	85	96	106
9	M	19	19	19	19	19	19	19	19	20	20	20	20	20	21	21	22	23	23	24	25	35	46	57	68	79	90	100	111	122
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	14	14	14	14	13	15	14	15	16	17	17	17	26	35	45	55	65	75	84	94	105
10	M	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	21	21	21	22	22	23	24	25	26	35	46	57	67	78	89	99	110	120
	N	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	14	14	14	15	15	16	17	18	18	25	35	45	53	63	74	82	93	101
20	M	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	29	29	29	30	30	36	44	53	62	71	80	90	100	109
	N	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	20	20	20	21	20	25	32	39	47	54	61	69	78	85
30	M	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	35	35	39	45	51	59	66	75	83	91	100
	N	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	24	24	27	32	36	43	48	55	61	67	74
40	M	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	39	39	39	39	39	39	39	39	42	46	52	58	64	71	78	86	93
	N	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	27	27	27	27	27	27	27	26	29	32	37	41	45	51	56	62	67
50	M	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	44	46	49	53	58	64	70	76	82	89
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	29	29	29	29	29	29	29	30	32	34	37	40	45	50	54	58	64
60	M	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	49	52	55	59	64	69	74	80	86
	N	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	34	36	38	41	45	48	52	56	61
70	M	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	51	51	51	51	51	52	54	57	61	65	69	74	79	84
	N	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	35	35	35	35	35	36	37	39	42	45	48	52	55	59
80	M	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	55	57	60	63	66	70	74	79	83
	N	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	38	39	42	44	46	49	51	55	58
90	M	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	58	60	62	64	68	71	75	79	83
	N	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	40	41	43	44	47	49	52	55	58
100	M	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	61	62	64	67	69	72	76	79	83
	N	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	42	42	44	46	47	50	53	55	58

表 1　$p=8$ に対する M および N の値
Table 1　M and N for $p=8$

Re(z) \ Im(z)		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	M		9	11	12	12	13	14	14	15	15	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	83	96	109	121	133	145	157
	N		5	7	8	7	8	9	9	9	9	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	67	78	90	101	112	124	135
0.1	M	9	10	11	12	12	13	14	14	15	15	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	83	96	108	121	133	145	157
	N	5	6	7	7	7	8	9	9	9	9	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	67	78	89	101	112	124	135
0.2	M	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	83	96	108	121	133	145	157
	N	6	7	6	7	8	8	9	8	9	9	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	67	78	89	101	112	124	135
0.3	M	11	12	12	12	13	14	14	15	15	15	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	82	96	108	121	133	145	157
	N	6	7	7	7	8	9	9	10	9	9	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	65	78	89	101	112	124	135
0.4	M	12	12	13	13	13	14	14	15	15	16	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	82	95	108	121	133	145	157
	N	7	7	8	8	8	9	8	9	9	10	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	65	77	89	101	112	124	135
0.5	M	13	13	13	13	14	14	15	15	15	16	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	82	95	108	121	133	145	157
	N	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	65	77	89	101	112	124	135
0.6	M	14	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	69	82	95	108	120	133	145	157
	N	9	9	9	9	8	9	9	9	10	10	10	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	54	65	77	89	100	112	124	135
0.7	M	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	20	23	25	28	30	32	34	36	38	54	68	82	95	108	120	133	145	157
	N	9	9	8	8	9	9	9	10	10	10	11	13	15	17	19	21	22	24	26	27	41	53	65	77	89	100	112	124	135
0.8	M	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	17	20	23	25	28	30	32	34	36	37	54	68	82	95	108	120	133	145	156
	N	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	11	13	15	16	19	21	22	24	25	26	41	53	65	77	89	100	112	124	134
0.9	M	15	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	20	23	25	28	30	32	34	36	37	54	68	82	95	108	120	132	144	156
	N	9	9	9	9	9	10	10	10	10	11	11	13	15	16	19	21	22	24	25	26	41	53	65	77	89	100	111	122	134
1	M	16	16	16	16	16	16	16	17	17	17	17	20	23	25	28	30	32	34	36	37	54	68	82	95	108	120	132	144	156
	N	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	13	15	16	19	21	22	24	25	26	41	53	65	77	89	100	111	122	134
2	M	19	19	19	19	19	19	19	19	20	20	20	22	24	26	28	30	32	34	35	37	53	68	81	94	107	119	131	143	155
	N	12	12	12	12	12	12	12	12	13	13	13	14	16	17	19	20	22	24	24	26	39	53	64	76	88	99	110	121	132
3	M	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	23	25	27	28	30	32	34	35	37	53	67	81	94	106	119	131	143	154
	N	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	15	16	18	18	20	22	23	24	26	39	51	64	76	87	99	110	121	131
4	M	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	25	26	28	29	31	32	34	36	37	53	67	80	93	105	118	130	142	153
	N	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	17	19	19	21	21	23	25	25	39	51	63	75	85	97	109	120	130
5	M	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	27	28	29	30	32	33	34	36	38	52	66	79	92	105	117	129	141	153
	N	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	18	19	19	20	22	22	23	25	26	38	50	61	73	85	96	107	118	130
6	M	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	29	30	31	32	34	35	36	38	52	66	79	92	104	116	128	140	152
	N	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19	20	20	21	23	24	24	26	38	50	61	73	84	95	106	117	128
7	M	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	30	30	31	32	33	34	36	37	38	52	66	78	91	103	115	127	139	151
	N	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	20	19	20	21	22	23	24	25	26	38	50	60	72	83	93	105	116	127
8	M	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	32	32	33	34	35	36	38	39	52	65	78	91	103	115	127	138	150
	N	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	21	21	22	23	23	24	26	27	37	48	60	72	83	93	105	114	126
9	M	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	33	33	34	34	35	36	37	38	39	52	65	78	90	102	114	126	138	149
	N	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	22	22	23	22	23	24	25	26	26	37	48	60	70	81	92	103	114	124
10	M	33	33	33	33	33	34	34	34	34	34	34	34	34	35	35	36	37	38	39	40	52	65	77	89	102	113	125	137	148
	N	21	21	21	21	21	23	23	23	23	23	23	23	22	23	23	24	25	26	26	27	37	48	59	69	81	91	102	113	123
20	M	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	45	45	45	45	46	46	46	47	48	55	65	75	86	97	108	119	130	141
	N	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	30	30	30	30	31	31	31	32	33	38	47	55	64	74	83	93	103	113
30	M	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	54	54	54	54	55	60	67	76	85	94	104	114	124	134
	N	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	37	37	37	36	37	41	47	55	62	69	77	86	94	103
40	M	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	61	61	61	61	61	61	65	71	77	85	93	102	111	120	130
	N	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	42	42	42	42	41	41	45	50	54	60	67	74	81	89	97
50	M	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	68	70	75	80	87	94	102	110	118	126
	N	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	45	47	48	52	56	61	67	73	80	86	92
60	M	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	73	73	73	73	73	73	73	73	75	79	84	89	95	102	109	117	124
	N	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	50	50	50	50	51	55	59	62	67	72	78	84	89
70	M	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	80	83	87	92	97	103	109	116	123
	N	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	53	53	53	53	53	53	53	53	55	57	60	64	68	73	77	82	88
80	M	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	85	87	91	95	99	105	110	117	123
	N	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	59	60	63	66	69	74	77	83	88
90	M	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	89	91	94	98	102	107	112	117	123
	N	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	60	60	61	62	65	68	71	75	79	82	87
100	M	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	94	95	98	101	105	109	114	119	124
	N	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	65	65	68	70	73	76	80	84	87

表 2　$p=18$ に対する M および N の値
Table 2　M and N for $p=18$

$=8$ および $p=18$ のときの M, N の値をそれぞれ**表1**および**表2**に示す．これらの表から，$|z|$ の大きさが同じときでも，M, N の値は $\arg z$ の大きさによって，かなり異なっていることがわかる．例えば，**表1**において（$p=8$），$z=100$ では $M=60$, $N=41$ であるのに対して，$z=i100$ では $M=133$, $N=120$ である．

$I_n(z)$ の計算結果例　$z=30+i40$ に対し，$p=8$ として，**表1**から $m=l=M=51$ を選んだときの $I_n(z)$ の近似値，すなわち，$e^zG_n(z)\Big/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_k(z)$ を計算した数値例が**表3**に示されている．ここで，下線部は，これらの値が $I_n(z)$ の真値と一致する部分を表わしている．また，これらの値の絶対値は，どれだけの桁数が $|I_n(z)|$ の真値と一致するかを示すために $\left|e^zG_n(z)\Big/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_k(z)\right|$ の値が示されている．下線部は，$|I_n(z)|$ の真値と一致する部分を表わしており，$n\leqq 36$ では8桁以上一致している．それで，$p=8$ に対して，$m=l=M=51$ のとき，$N=36$ であることがわかる．

つぎに，**表4**には，同じ z の値に対して，$m=l=M-1=50$ とした場合の結果が示されている．この表は，$n\leqq 36$ において，$\left|e^zG_n(z)\Big/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_k(z)\right|$ の値は，$|I_n(z)|$ の真値と8桁以上一致しており，$m=l=50$ でも十分であることを示している．これは，M, N を決めるために，誤差解析において，(14)を用いたことによる M の過大評価であると考えられる．

さらに，**表5**には，同じ z の値に対して，$m=l=M-2=49$ とした場合の結果が示されている．この場合には，$\left|e^zG_n(z)\Big/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k G_k(z)\right|$ の値は，$|I_n(z)|$ の真値と7桁しか一致しない次数 n (0, 6〜10, 16) がある．

n	$e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)$ real part	$e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)$ imaginary part	$\lvert e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)\rvert$
50	-1.2700904228660D 04	3.3431889127988D 04	3.5763167909061D 04
49	2.1403832707062D 04	6.5291875530160D 04	6.8710647390327D 04
48	1.1484766386614D 05	7.6653925066784D 04	1.3807899957507D 05
47	2.7144877038343D 05	-2.2808814491289D 04	2.7240535413456D 05
46	3.8673741986375D 05	-3.5733336833607D 05	5.2654816308603D 05
45	1.7241216372231D 05	-9.8658233517374D 05	1.0015341523265D 06
44	-8.4773600596634D 05	-1.6711158060838D 06	1.8738421420053D 06
43	-3.0757281135442D 06	-1.5576683299977D 06	3.4476708158877D 06
42	-6.1652390412207D 06	9.5357236159538D 05	6.2385473216279D 06
41	-8.0086878131105D 06	7.6896138818912D 06	1.1102668244185D 07
40	-3.9570144362803D 06	1.9027550832177D 07	1.9434650856653D 07
39	1.2547843393247D 07	3.1021041159220D 07	3.3462716094536D 07
38	4.6502026346506D 07	3.2403536802435D 07	5.6678282010289D 07
37	9.4360392173021D 07	4.0266026856894D 06	9.4446265888254D 07
36	1.3506155217600D 08	-7.5743544345530D 07	1.5485059698372D 08
35	1.2379701016704D 08	-2.1700672773561D 08	2.4983518488959D 08
34	-3.9964943475618D 06	-3.9668184703052D 08	3.9670197848085D 08
33	-3.1105397878978D 08	-5.3635092906237D 08	6.2002169061011D 08
32	-8.1673782663893D 08	-4.9299878124591D 08	9.5399605647656D 08
⋮	⋮	⋮	⋮
17	-5.4433372925367D 10	-8.9366735655521D 10	1.0463940715503D 11
16	-9.3020339828264D 10	-8.8188604301934D 10	1.2817961441075D 11
15	-1.3530574882201D 11	-7.5604745715392D 10	1.5499588136133D 11
14	-1.7802068734758D 11	-5.0459553324910D 10	1.8503386621225D 11
13	-2.1772657966036D 11	-1.2805887700848D 10	2.1810285245820D 11
12	-2.5127862948516D 11	3.6119266851134D 10	2.5386128313275D 11
11	-2.7622502648125D 11	9.4087454874580D 10	2.9180938027990D 11
10	-2.9108325236036D 11	1.5818956425942D 11	3.3129050400709D 11
9	-2.9546434648472D 11	2.2519959105216D 11	3.7150240356383D 11
8	-2.9004606897804D 11	2.9192640771429D 11	4.1151883268033D 11
7	-2.7642003135364D 11	3.5550125499168D 11	4.5032119207762D 11
6	-2.5685235312731D 11	4.1356870557610D 11	4.8683899344540D 11
5	-2.3400157873337D 11	4.6437080039506D 11	5.1999709528927D 11
4	-2.1063321451210D 11	5.0673345422085D 11	5.4876693111220D 11
3	-1.8936048518626D 11	5.3997826345783D 11	5.7221841840062D 11
2	-1.7242925615356D 11	5.6379049576770D 11	5.8956897094034D 11
1	-1.6155449775250D 11	5.7807567964851D 11	6.0022608002747D 11
0	-1.5780814235087D 11	5.8283405600734D 11	6.0382029332758D 11

表 3　$I_n(z)$ に対する数値例 ($p=8$). ただし，$z=30+i40$，$m=l=M=51$
Table 3　Numerical example for $I_n(z)$ ($p=8$)

n	$e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)$ real part	$e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)$ imaginary part	$\lvert e^z G_n(z)/\sum_{k=0}^{m} \epsilon_k G_k(z)\rvert$
49	2.3425985200661D 04	6.9036655787580D 04	7.2902926038359D 04
48	1.1521156811607D 05	7.4536553228096D 04	1.3722027253613D 05
47	2.7063785742873D 05	-2.2062203519935D 04	2.7153561589185D 05
46	3.8730951720169D 05	-3.5738894991520D 05	5.2700618937210D 05
45	1.7215103014423D 05	-9.8673921354721D 05	1.0016437753670D 06
44	-8.4767183775052D 05	-1.6709647839539D 06	1.8736784285809D 06
43	-3.0757088463274D 06	-1.5577560778498D 06	3.4476932731109D 06
42	-6.1652757302816D 06	9.5360631625165D 05	6.2385887696493D 06
41	-8.0086598934090D 06	7.6896096704304D 06	1.1102645188057D 07
40	-3.9570291777914D 06	1.9027544012108D 07	1.9434647180914D 07
39	1.2547848431409D 07	3.1021049269627D 07	3.3462725502359D 07
38	4.6502026442502D 07	3.2403531286080D 07	5.6678278935295D 07
37	9.4360390590844D 07	4.0266056484494D 06	9.4446264433829D 07
36	1.3506155437494D 08	-7.5743545357657D 07	1.5485059939671D 08
35	1.2379700931877D 08	-2.1700672818049D 08	2.4983518485568D 08
34	-3.9964933594499D 06	-3.9668184746629D 08	3.9670197890664D 08
33	-3.1105397930587D 08	-5.3635093093790D 08	6.2002169249146D 08
32	-8.1673782804012D 08	-4.9299878262212D 08	9.5399605838734D 08
⋮	⋮	⋮	⋮
17	-5.4433372975074D 10	-8.9366735893772D 10	1.0463940738436D 11
16	-9.3020339963454D 10	-8.8188604567648D 10	1.2817961469167D 11
15	-1.3530574905968D 11	-7.5604745986460D 10	1.5499588170102D 11
14	-1.7802068769844D 11	-5.0459553574129D 10	1.8503386661778D 11
13	-2.1772658012756D 11	-1.2805887898467D 10	2.1810285293620D 11
12	-2.5127863006400D 11	3.6119266734615D 10	2.5386128368912D 11
11	-2.7622502715990D 11	9.4087454865678D 10	2.9180938091944D 11
10	-2.9108325312150D 11	1.5818956437944D 11	3.3129050473316D 11
9	-2.9546434730764D 11	2.2519959131562D 11	3.7150240437802D 11
8	-2.9004606984105D 11	2.9192640812821D 11	4.1151883358223D 11
7	-2.7642003223630D 11	3.5550125555555D 11	4.5032119306456D 11
6	-2.5685235401230D 11	4.1356870628248D 11	4.8683899451238D 11
5	-2.3400157960783D 11	4.6437080123058D 11	5.1999709642891D 11
4	-2.1063321536835D 11	5.0673345516740D 11	5.4876693231489D 11
3	-1.8936048602177D 11	5.3997826449380D 11	5.7221841965472D 11
2	-1.7242925697051D 11	5.6379049686904D 11	5.8956897223247D 11
1	-1.6155449855673D 11	5.7807568078963D 11	6.0022608134295D 11
0	-1.5780814315060D 11	5.8283405716181D 11	6.0382029465093D 11

表 4　$I_n(z)$ に対する数値例 ($p=8$). ただし，$z=30+i40$，$m=l=M-1=50$
Table 4　Numerical example for $I_n(z)$ ($p=8$)

	$e^zG_n(z)/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_kG_k(z)$		$\left\|e^zG_n(z)/\sum_{k=0}^{m}\epsilon_kG_k(z)\right\|$
n	real part	imaginary part	
48	1.2373758673130D 05	7.7829796056362D 04	1.4617957286934D 05
47	2.6820385604157D 05	-2.6070422948648D 04	2.6946794864749D 05
46	3.8706162023143D 05	-3.5495624051623D 05	5.2517676123149D 05
45	1.7302429873717D 05	-9.8769681745923D 05	1.0027374587461D 06
44	-8.4835555427372D 05	-1.6708237935537D 06	1.8738621335553D 06
43	-3.0753590678995D 06	-1.5576021230346D 06	3.4473116729118D 06
42	-6.1653866336416D 06	9.5342489290435D 05	6.2386706411459D 06
41	-8.0086657385468D 06	7.6897298046273D 06	1.1102732608685D 07
40	-3.9569882167006D 06	1.9027488469631D 07	1.9434584461960D 07
39	1.2547810814548D 07	3.1021063652850D 07	3.3462724730540D 07
38	4.6502050144473D 07	3.2403536152142D 07	5.6678301163693D 07
37	9.4360380507313D 07	4.0265956479240D 06	9.4446253933106D 07
36	1.3506155728211D 08	-7.5743537433160D 07	1.5485059805618D 08
35	1.2379701087606D 08	-2.1700673468332D 08	2.4983519127569D 08
34	-3.9964964273181D 06	-3.9668184674833D 08	3.9670197821962D 08
33	-3.1105397947082D 08	-5.3635093351703D 08	6.2002169480529D 08
32	-8.1673783396219D 08	-4.9299878377263D 08	9.5399606405191D 08
⋮	⋮	⋮	⋮
17	-5.4433373367688D 10	-8.9366736208040D 10	1.0463940785700D 11
16	-9.3020340528447D 10	-8.8188604813219D 10	1.2817961527064D 11
15	-1.3530574979498D 11	-7.5604746105751D 10	1.5499588240110D 11
14	-1.7802068858540D 11	-5.0459553509699D 10	1.8503386745355D 11
13	-2.1772658113202D 11	-1.2805887598751D 10	2.1810285392133D 11
12	-2.5127863113967D 11	3.6119267310411D 10	2.5386128483577D 11
11	-2.7622502825305D 11	9.4087455744281D 10	2.9180938223749D 11
10	-2.9108325417649D 11	1.5818956557197D 11	3.3129050622954D 11
9	-2.9546434827237D 11	2.2519959281803D 11	3.7150240605604D 11
8	-2.9004607067173D 11	2.9192640992311D 11	4.1151883544099D 11
7	-2.7642003290103D 11	3.5550125761523D 11	4.5032119509858D 11
6	-2.5685235449329D 11	4.1356870857230D 11	4.8683899671134D 11
5	-2.3400157990218D 11	4.6437080371235D 11	5.1999709877765D 11
4	-2.1063321548757D 11	5.0673345780213D 11	5.4876693479358D 11
3	-1.8936048599031D 11	5.3997826724377D 11	5.7221842223933D 11
2	-1.7242925682347D 11	5.6379049969875D 11	5.8956897489544D 11
1	-1.6155449833712D 11	5.7807568366601D 11	6.0022608405407D 11
0	-1.5780814290625D 11	5.8283406005352D 11	6.0382029737828D 11

表 5 $I_n(z)$ に対する数値例 ($p=8$). ただし, $z=30+i40$, $m=l=M-2=49$
Table 5 Numerical example for $I_n(z)$ ($p=8$)

これより, $m=l=M-2=49$ は $p=8$ に対する m, l の値として適当ではないことがわかる.

上の例にも示したように, (14)を用いたことによる M の過大評価は, 一般に, かなり小さいと思われる. それで, **表1**および**表2**の M, N の値は, 実際の $I_n(z)$ の計算において妥当なものであると考えられる.

また, 所要の精度で, なるべく速く $I_n(z)$ の値を計算するためのプログラムを作るためには, M, N を簡単な近似式で表わすことが必要である. **表6**, **表7**には, それぞれ, $p=8$ および $p=18$ に対する M, N の近似式が示されている. ただし,

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z) \tag{24}$$

である.

		M	N
$0\leq y<10$	$0<x<10$	$M=(-0.12x+1.6)y+1.3x+9$	$N=(-0.11x+1.5)y+1.1x+2$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.015x+0.06)y+0.6x+16$	$N=(-0.02x+0.6)y+0.5x+8$
	$30\leq x<60$	$M=0.1y+0.47x+20$	$N=0.3x+14$
	$60\leq x\leq 100$	$M=0.3x+30$	$N=0.22x+19$
$10\leq y<30$	$0\leq x<10$	$M=(-0.035x+1.35)y+0.45x+12$	$N=(-0.04x+1.25)y+0.4x+4$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.025x+1.25)y+0.7x+9$	$N=(-0.02x+1)y+0.5x+4$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.0116x+0.85)y+0.59x+13$	$N=(-0.005x+0.5)y+0.35x+9$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.0012x+0.28)y+0.32x+28$	$N=(-0.0025x+0.3)y+0.25x+15$
$30\leq y<60$	$0\leq x<10$	$M=(-0.006x+1.17)y-0.4x+17$	$N=(-0.016x+1.13)y-0.3x+8$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.0183x+1.25)y+0.5x+9$	$N=(-0.0217x+1.15)y+0.55x-1$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.01x+1)y+0.54x+8$	$N=(-0.01x+0.83)y+0.5x-1$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.005x+0.7)y+0.43x+15$	$N=(-0.0034x+0.5)y+0.27x+9$
$60\leq y\leq 100$	$0\leq x<10$	$M=(-0.007x+1.15)y-0.3x+18$	$N=(-0.015x+1.1)y-0.4x+10$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.01x+1.15)y+15$	$N=(-0.0138x+1.06)y+0.07x+4$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.01x+1.15)y+0.54x-1$	$N=(-0.0084x+0.87)y+0.4x-4$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.005x+0.85)y+0.43x+6$	$N=(-0.0019x+0.46)y+0.18x+11$

表 6 $p=8$ に対する M. N の近似式
Table 6 Appoximate expression of M and N for $p=8$

		M	N
$0\leq y<10$	$0<x<10$	$M=(-0.15x+2)y+1.7x+18$	$N=(-0.16x+2)y+1.6x+5$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.01x+0.6)y+0.9x+26$	$N=(-0.02x+0.7)y+0.75x+14$
	$30\leq x<60$	$M=0.1y+0.67x+34$	$N=(-0.0034x+0.2)y+0.43x+23$
	$60\leq x\leq 100$	$M=0.5x+43$	$N=(-0.0025x+0.25)y+0.35x+28$
$10\leq y<30$	$0\leq x<10$	$M=(-0.03x+1.55)y+0.5x+23$	$N=(-0.03x+1.4)y+0.3x+11$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.035x+1.6)y+1.15x+16$	$N=(-0.028x+1.32)y+0.82x+72$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.013x+1)y+0.8x+25$	$N=(-0.0117x+0.9)y+0.58x+13$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.005x+0.6)y+0.55x+37$	$N=(-0.0038x+0.42)y+0.36x+26$
$30\leq y<60$	$0\leq x<10$	$M=(-0.01x+1.34)y-0.1x+29$	$N=(-0.007x+1.16)y-0.4x+18$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.0166x+1.4)y+0.6x+22$	$N=(-0.02x+1.3)y+0.6x+8$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.0122x+1.27)y+0.77x+17$	$N=(-0.0112x+1.03)y+0.56x+9$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.005x+0.84)y+0.55x+30$	$N=(-0.0034x+0.6)y+0.35x+21$
$60\leq y\leq 100$	$0\leq x<10$	$M=(-0.005x+1.2)y-0.4x+37$	$N=(-0.01x+1.15)y-0.2x+19$
	$10\leq x<30$	$M=(-0.0075x+1.23)y+0.05x+33$	$N=(-0.01x+1.17)y+15$
	$30\leq x<60$	$M=(-0.0091x+1.28)y+0.59x+17$	$N=(-0.0117x+1.22)y+0.66x-6$
	$60\leq x\leq 100$	$M=(-0.0062x+1.1)y+0.63x+14$	$N=(-0.005x+0.85)y+0.45x+6$

表 7 $p=18$ に対する M, N の近似式
Table 7 Approximate expression of M and N for $p=18$

4. むすび

以上において, 複素変数のベッセル関数 $I_n(z)$ の値を, 漸化式を用いて, p 桁正しく, しかも, できるだけ速く計算するための方法を述べた. その際, 与えられた z に対して, (22) の M と (21) を満足する n の最大値 N の値を定めることが重要である. 本論文

では，$p=8$ と $p=18$ に対する M および N の値を求め，Re(z), Im(z)=0(0.1)1(1)10(10)100 に対して表としてまとめるとともに，実際のプログラムに便利なように，M および N を Re(z) と Im(z) の簡単な関数として表わした.

なお，本計算は，名古屋大学大型計算機センターで行なった.

おわりに，本研究に対して懇切なご指導を賜わった本学二宮市三教授に深謝いたします.

参考文献

1) I. Gargantini & P. Henrici: A Continued Fraction Algorithm for the Computation of Higher Transcendental Functions in the Complex Plane, Math. Comp., Vol. 21, pp. 18〜29 (1967).
2) M. Goldstein & R. M. Thaler: Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions, MTAC, Vol. 13, pp. 102〜108 (1959).
3) F. W. J. Olver: Error Analysis of Miller's Recurrence Algorithm, Math. Comp., Vol. 18, pp. 65〜74 (1964).
4) 牧之内三郎：漸化式を用いる $J_\nu(x)$ の近似計算，情報処理，Vol. 6, No. 4, pp. 194〜201 (1965).
5) 牧之内三郎：漸化式を用いる $I_\nu(x)$ の近似計算，情報処理，Vol. 6, No. 5, pp. 247〜252 (1965).
6) 二宮市三：漸化式によるベッセル関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II, p. 109, 培風館，東京 (1965).
7) National Bureau of Standards: Handbook of Mathematical Functions, Appl. Math. Ser. 55, p. 378, U. S. Government Printing Office, Washington D. C. (1964).

付 録

(20) の右辺を $C_\nu(z)$ とおけば，

$$C_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A}{|z|}\right)^{-\nu}\cdot e^{\sqrt{2}\sqrt{A+B}} \quad \text{(A-1)}$$

となる. ただし，

$$A=\sqrt{\nu^4+2\nu^2|z|^2\cos 2\theta+|z|^4},$$
$$B=\nu^2+|z|^2\cos 2\theta,$$
$$\theta=\arg z$$

である. (A-1) の対数をとり，それを ν に関して微分すると，

$$\frac{\partial \log C_\nu(z)}{\partial\nu}=-\log\frac{\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A}{|z|} \quad \text{(A-2)}$$

が得られる. そして，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A}{|z|}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{A+B}}{A}(\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A) \quad \text{(A-3)}$$

がなりたつ.

$\cos 2\theta \fallingdotseq -1\left(\theta \fallingdotseq \frac{\pi}{2}\right)$ のときには，(A-3) (>0) は ν の単調増加関数であるから，$(\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A)/|z|$ は ν の単調増加関数である. したがって，(A-2) は ν の単調減少関数である. そのとき $\log C_\nu(z)$は，

$$\frac{\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A}{|z|}>1 \quad \text{(A-4)}$$

を満たす領域では，ν の単調減少関数であるから，$C_\nu(z)$ も ν の単調減少関数である. また，$\nu=0$ のとき，(A-4) の左辺$=|z|$ である. それで，$|z|>1$ のときには，(A-4) は常に成立するから $C_\nu(z)$ はすべての領域で ν の単調減少関数であり，$|z|\leqq 1$ のときには (A-4) を $\nu/|z|$ について解いて得られる

$$\frac{\nu}{|z|}>\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{|z|}-|z|}{\sqrt{\frac{1}{|z|}+|z|+2\cos 2\theta}} \quad \text{(A-5)}$$

を満たす領域では単調に減少する.

$\cos 2\theta=-1\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ のときには，(A-3) は，$\nu/|z|\leqq 1$ では0であり，$\nu/|z|>1$ では ν の単調減少関数であるから，$(\nu^2+\sqrt{2}\sqrt{A+B}\nu+A)/|z|$ は，$\nu/|z|\leqq 1$ では ν に対して増減しない関数 ($=|z|$) であり，$\nu/|z|>1$ では ν の単調増加関数である. そのとき，$\log C_\nu(z)$ は (A-4) を満たす領域では ν の単調減少関数である. また，$\nu=0$ のとき，(A-4) の左辺$=|z|$ である. それで，$|z|>1$ のときには (A-4) は常に成立するから $C_\nu(z)$ はすべての領域で減少関数であり，$|z|<1$ のときには (A-4) を $\nu/|z|$ について解いて得られる (A-5) の領域では単調に減少する. $|z|=1$ のときには $C_\nu(z)$ は $\nu/|z|\leqq 1$ では ν に対して増減しない関数であり，$\nu/|z|>1$ では ν の単調減少関数である.

以上に述べた $C_\nu(z)$ が ν の単調減少関数である領域は，(17) の領域を常に内包していることが簡単な計算よりわかるから，結局，(17) の領域では $C_\nu(z)$ は ν の単調減少関数であることが見出される.

(昭和 47 年 5 月 12 日 受付)
(昭和 47 年 7 月 19 日 再受付)