



チェビシェフ最簡 q 関数を用いた曲線近似*

森 末 道 忠** 後 藤 以 紀***

Abstract

This paper describes an algorithm of a curve fitting by use of Tchebychef q -functions and discusses the accuracy of the fitting in comparison with one of other methods.

In electronic engineering, V-I characteristics of diodes are often requested to represent in mathematical forms in order to analyse the performance of the circuit incorporating the diode. For this purpose a least squares fitting or so, is commonly used, but the accuracy of it is not necessarily good. Therefore, the method by use of Tchebychef q -functions is presented. The features of this method are the good accuracy of the fitting and the capability of making the fitted value at the origin coincide with the actual one so that the physical property of the diode is satisfied. A few examples of the curve fitting are illustrated in the paper.

1. はじめに

電子工学の分野においては、トラジスタの出現以来、トンネルダイオード、インパットダイオード、アモルファス半導体などと各種の非線形 V-I 特性をもった半導体が出現し、これらを用いた回路の解析が行われている。この場合半導体素子の非線形特性を数式表示する必要があるが、その方法には素子の物理的条件を満足する特性式を用いる場合と、特性の測定結果を関数近似して数式表示する場合がある。著者らは以前半導体の特性を測定データから関数近似する必要に迫られ、チェビシェフ最簡 q 関数¹⁾を用いて手動計算により近似して良好な結果を得た²⁾。その後この近似法を他所でも用いる傾向があり³⁾、またこれを電子計算機により自動的に行えば各種の非線形特性も容易に数式表示できその適用範囲も拡大されるので、ここでは計算機により近似する手法を示し、若干の例題に適用してその近似度が他の方法に比して良いことを示

した⁴⁾。

勿論この方法は関数近似の一手法であり、その原理も直交関数のチェビシェフ最簡 q 関数を用いた最小二乗法近似である。しかしチェビシェフ最簡 q 関数は特殊な形をもつ関数であるために、特定の曲線を近似する場合、他の方法に比して近似度が良く好結果を得る特長がある。また特性曲線を近似する場合には原点で電圧および電流が 0 となるなど特定の点を真値に等しくすることが物理的に要求されることがあり、この補正もチェビシェフ最簡 q 関数を用いて容易に達成できる。本論文ではこれらの特長を示すと同時に、チェビシェフ最簡 q 関数の性質についても若干言及した。

2. 曲線近似の原理

2.1 近似法

チェビシェフ最簡 q 関数は(1)式で示される数列である¹⁾。

$$\dot{q}_\nu(n, \xi) = \frac{1}{M_\nu(n)} \sum_{m=0}^{\nu} \binom{\nu+m}{m} \binom{\nu-n}{\nu-m} \left(\frac{\xi}{m}\right) \quad (1)$$

ここに

$$\overline{M_\nu(n)} = G. C. M \left(\binom{n-1}{\nu}, \binom{\nu+1}{1} \binom{n-2}{\nu-1}, \dots, \binom{2\nu-1}{\nu-1} \binom{n-\nu}{1}, \binom{2\nu}{\nu} \right) \quad (2)$$

* A Curve Fitting by Use of Tchebychef Q-Function by Mititada MORISUE (Saitama University, Faculty of Science and Engineering, Department of Electronic Engineering) and Motinori GOTO (Meiji University, Faculty of Engineering, Department of Electrical Engineering)

** 埼玉大学理工学部電子工学科

*** 明治大学工学部電気工学科

n : 実測値の総数

ξ : 実測値の番号

ν : 次数

$\dot{q}_\nu(n, \xi)$: 総数 n 個で ξ 番目における ν 次のチェビシェフ最簡 q 関数

この関数は直交関数で対称な形を有し、次式の性質をもっている。

$$\sum_{\xi=0}^{n-1} \dot{q}_k(n, \xi) \cdot \dot{q}_s(n, \xi) = 0 \quad (k \neq s) \quad (3)$$

$$\dot{q}_\nu(n, \xi) = (-1)^\nu \cdot \dot{q}_\nu(n, n-1-\xi) \quad (4)$$

いま、この関数を図表に表わせば Fig. 1 の形となる。図では $n=51$ の場合の $\nu=1, 2, 3, 4, 9, 10$ におけるチェビシェフ最簡 q 関数を示した。この関数は対称

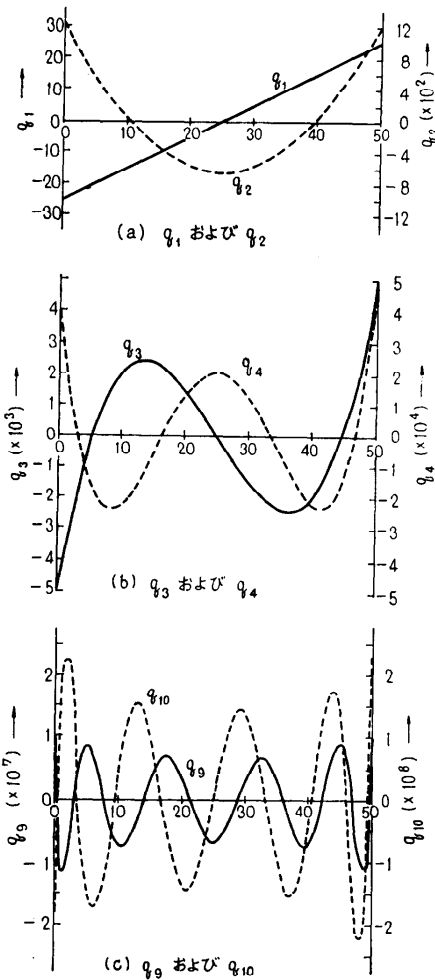


Fig. 1 Tchebychet q -functions where $n=51$.

性を有する周期関数に準じた波形であるが、これを展開すれば ν 次の多項式に変換できる。

さて、測定点が等間隔 1 をもって n 個与えられている測定値 $y_\xi (\xi=1, \dots, n)$ をチェビシェフ最簡 q 関数を用いて曲線近似する場合、最小二乗法的に近似すれば、 $y(x)$ は (5) 式で近似することができこれはまた (6) 式のような多項式にも展開できる。

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^m a_\nu \cdot \dot{q}_\nu(n, x) \quad (5)$$

$$= \sum_{\nu=0}^m c_\nu \cdot x^\nu \quad (6)$$

ここに

$$a_\nu = \frac{\sum_{\xi=0}^{n-1} y_\xi \cdot \dot{q}_\nu(n, \xi)}{\sum_{\xi=0}^{n-1} \dot{q}_\nu(n, \xi)^2} \quad (7)$$

$$\sum_{\xi=0}^{n-1} \dot{q}_\nu(n, \xi)^2 = \frac{\sum_{\xi=0}^{n-1} (\dot{q}_\nu(n, \xi))^2}{\left[M_\nu(n) \cdot \frac{\nu!}{2^\nu} \right]^2} \quad (8)$$

m : 近似する式の次数

c_ν : ν 次の多項式の係数

したがって測定値の総個数 n と近似式の次数 ν を与えて予め $\dot{q}_\nu(n, \xi)$ の値を計算し表に作成しておけば、近似式の係数 a_ν はこの表の値と測定値との積和を求め $\sum_{\xi=0}^{n-1} \dot{q}_\nu(n, \xi)^2$ で除すことにより容易に求めることができる。

2.2 原点における物理的条件を満足させる補正近似

原点における物理的条件を満足させるためにその点の近似式による値を実測値と等しくする必要がしばしば生ずる。この場合には次の補正を行う。すなわち最簡 q 関数を用いて近似した第 1 回目の近似式による値と真値との差 y' を l 個 (等間隔で 1) とり、この数列を

$$y_0', y_1', \dots, y_l'$$

とする。いま $x=0$ における物理的条件を満足させるために、 y_0' の代りに x_0 を用いた数列

$$x_0, y_1', \dots, y_l'$$

を最簡 q 関数を用いて近似して、 $x=0$ における近似式の値が y_0' に等しくなれば、この結果を用いて第 1 回目の近似式を補正することにより初期の目的は達せられる。したがって、数列 x_0, y_1', \dots, y_l' を最簡 q 関数により再度近似してその係数 a_ν' が得られたとすれば a_ν' は

$$a_\nu' = \frac{x_0 \cdot \dot{q}_\nu(l, 0) + \sum_{\xi=1}^l y_{\xi'} \cdot \dot{q}_\nu(l, \xi)}{\sum_{\nu=0}^m \dot{q}_\nu(l)} \quad (9)$$

となるから、この a_ν' を用いたチェビシェフ関数の原点における値は $y_{0'}$ に等しくならねばならない。故に

$$y_{0'} = \sum_{\nu=0}^m a_\nu' \cdot \dot{q}_\nu(l, 0) \\ = x_0 \sum_{\nu=0}^m \frac{\{\dot{q}_\nu(l, 0)\}^2}{\sum_{\nu=0}^m \dot{q}_\nu(l)} \\ + \sum_{\nu=0}^m \frac{\sum_{\xi=1}^l y_{\xi'} \cdot \dot{q}_\nu(l, \xi) \cdot \dot{q}_\nu(l, 0)}{\sum_{\nu=0}^m \dot{q}_\nu(l)} \quad (10)$$

$$\therefore x_0 = \frac{y_{0'} - \sum_{\nu=0}^m \frac{\sum_{\xi=1}^l y_{\xi'} \cdot \dot{q}_\nu(l, \xi) \cdot \dot{q}_\nu(l, 0)}{\sum_{\nu=0}^m \dot{q}_\nu(l)}}{\sum_{\nu=0}^m \frac{\{\dot{q}_\nu(l, 0)\}^2}{\sum_{\nu=0}^m \dot{q}_\nu(l)}} \quad (11)$$

となり、原点補正を行うためには(11)式の x_0 を用いた数列 $x_0, y_{1'}, \dots, y_{l'}$ をあらためてチェビシェフ最簡 q 関数で関数近似すればよい。

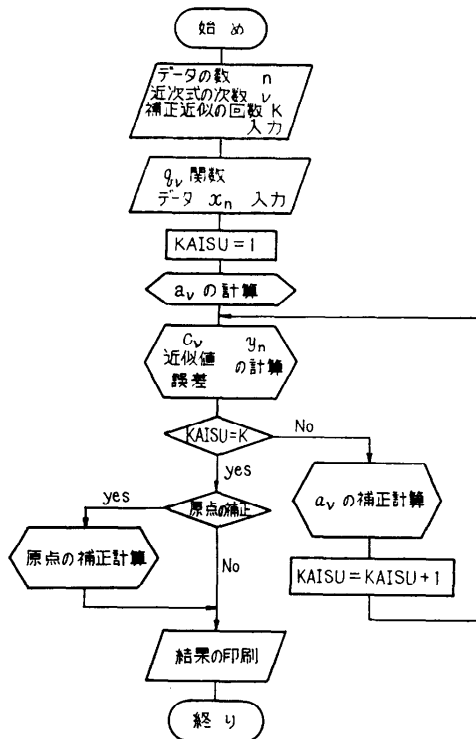


Fig. 2 Flow chart of the curve fitting by use of Tchebychev q -functions.

3. 計算機プログラム

このプログラムは比較的簡単であるけれども、測定データや近似関数の次数が高くなると記憶容量が増加し、小形計算機では計算できなくなる恐れがある。そのため q 関数の作表は別に行ったりその他の手段を講ずる必要がある。筆者らは、計算機容量が小なるため q 関数の作表を別に行なってその結果をデータとして読み込ませて計算するプログラムを作った。Fig. 2はそのフローチャートを示す。 a_ν の計算、 c_ν や誤差の計算、印刷、原点補正の計算はそれぞれサブルーチンにより行った。このプログラムでは誤差をデータとして再度曲線近似し、前の近似式を修正する方法を何回も繰返し行い得るようになっていたが、その繰返しを3回以上行っても精度はさほど上がらない。2回目の補正近似においても測定点すべてにわたる数列の補正を行うよりも、最も誤差の大きい小範囲の数列に対してのみ第2次補正近似を行うのが効果的と思われる。

4. 計算機実験

チェビシェフ最簡 q 関数による近似法の良否を評価する方法は、これをある例題に適用して他の方法との比較を行うのが早道である。ここでは、トンネルダイオードの特性曲線と単一パルス波形の関数近似を行い、最小二乗法近似とフーリエ級数近似との誤差の比較を行った。

例1 トンネル・ダイオードの V-I 特性近似

市販のトンネルダイオードの V-I 特性を実験により測定し、この曲線を 10 mV の等間隔で 51 点をサンプリングして抽出する。これを測定データとして曲線近似のために計算機に入力すればチェビシェフ最簡 q 関数の近似式の係数を a_ν ((5)式参照)として次の値が得られる。

- $a_0 = 0.25307843 \times 10^{-1}$
- $a_1 = -0.47269683 \times 10^{-1}$
- $a_2 = 0.17089826 \times 10^{-2}$
- $a_3 = 0.47611874 \times 10^{-3}$
- $a_4 = -0.20551287 \times 10^{-4}$
- $a_5 = 0.25728500 \times 10^{-4}$
- $a_6 = -0.93161959 \times 10^{-6}$
- $a_7 = 0.73981187 \times 10^{-6}$
- $a_8 = 0.71708571 \times 10^{-8}$
- $a_9 = -0.29584292 \times 10^{-9}$
- $a_{10} = 0.25018708 \times 10^{-10}$

この結果を(6)式の多項式に展開すればその係数 c_ν は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.93959180 \times 10^{-1} \\ c_1 &= 0.24750139 \times 10^1 \\ c_2 &= -0.29098984 \times 10^0 \\ c_3 &= 0.35763913 \times 10^{-3} \\ c_4 &= 0.20286487 \times 10^{-3} \\ c_5 &= -0.17514245 \times 10^{-3} \\ c_6 &= 0.76626595 \times 10^{-3} \\ c_7 &= -0.20145288 \times 10^{-4} \\ c_8 &= 0.32310482 \times 10^{-3} \\ c_9 &= -0.29310290 \times 10^{-3} \\ c_{10} &= 0.11579978 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.2647924595 \times 10^{-1} \\ c_1 &= 0.2697854991 \times 10^1 \\ c_2 &= -0.4110044675 \times 10^0 \\ c_3 &= 0.2635637544 \times 10^{-1} \\ c_4 &= -0.9065900106 \times 10^{-3} \\ c_5 &= 0.1873976429 \times 10^{-4} \\ c_6 &= -0.2407017438 \times 10^{-3} \\ c_7 &= 0.3213379930 \times 10^{-10} \\ c_8 &= 0.1014303372 \times 10^{-3} \\ c_9 &= -0.2218967468 \times 10^{-11} \\ c_{10} &= 0.1559103361 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

Fig. 3 はその結果を示す図で、実線は実測による特性曲線、●印はチェビシェフ最簡 q 関数による近似式の計算値を示す。この結果から非常によい近似が得られたことがわかる。なおこの特性曲線を 5 次の q 関数で近似すれば $V=0.3$ V 近傍に変曲点を有するような近似度の悪い結果となる。8 次の q 関数で近似した場合には、ほぼ実測値に近い近似式が得られ実用に供しうと思われる。このように特性曲線を近似する場合何次の q 関数で近似すれば良いかは試行錯誤によらざるを得ない。次数をあげて係数を求める場合、それまでに得られた a_n の値には変化がないので、追加した次数の a_n のみを計算すれば足りる。したがってある次数で近似して精度が悪ければさらに次数をあげてその増加した次数の係数を求めればよい。

いまこの q 関数による近似の精度を他の方法と比較するために同一測定値を (1) 最小二乗法近似と (2) フーリエ級数近似の二つの手法を用いて近似した。Fig. 3 の × 印は最小二乗法による 10 次の多項式近似の計算結果を示す。この場合の多項式の係数は

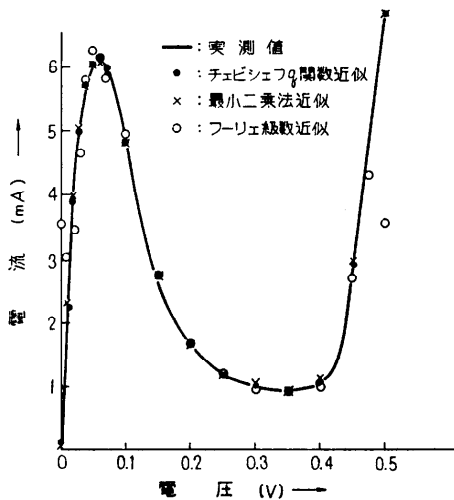


Fig. 3 curve fitting of a characteristic of tunnel diode.

となり、チェビシェフ最簡 q 関数による係数とは少し異なるが近似度は比較的良好い。10 次のフーリエ級数近似による結果を Fig. 3 の ○ 印で示す。フーリエ級数近似法は周期関数を近似する場合に適しているため曲線の始めと終りの近傍で近似度が著しく悪くなっている。近似度の精度を更に詳細に比較するために各方法による近似の % 誤差を計算して Fig. 4 に示す。図において実線はチェビシェフ最簡 q 関数による計算結果を示し、× 印および ○ 印はそれぞれ最小二乗法近似とフーリエ級数近似の結果を示す。Fig. 4 からチェビシェフ最簡 q 関数による近似法が最も精度がよいことが分かる。この特性曲線近似において原点では $I=0$ が満足されていない。これを補正するために $V=0$ より 150 mV までの 16 点の誤差を再度チェビシェフ最簡 q 関数を用いて近似し修正を加えると、Fig. 3 の原点が実測値と同じになり他の点は第一回近似の結果と殆んど変らぬ値となって良好な結果を得ることができた。以上のようにこの近似法は精度もよく、原点で物

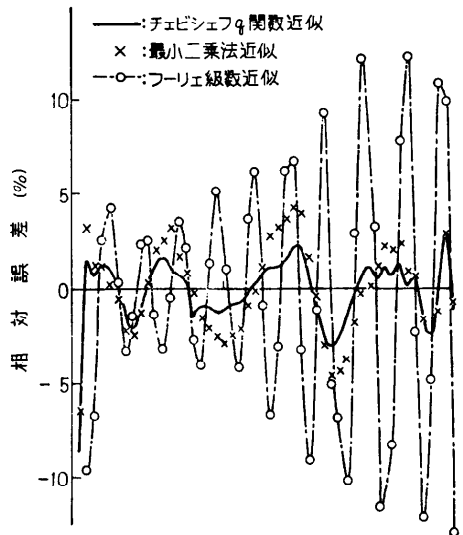


Fig. 4 Comparison of the accuracy of the fitting among ones by other methods.

理的条件を満足させることもできる特長がある。

例 2 単一パルス波形の近似

Fig. 5 に示すような最初と最後の 5 点の範囲が 0 で他は 1 の値をとる単一パルス波形の数式表示を行う。データの総数は 51 点とし、これをチェビシェフ最簡 q 関数、最小二乗法およびフーリエ級数の三つの近似法で数式表示し、その結果を Fig. 5 の実線、点線および \circ 印でそれぞれ示す。三者とも類似の近似が得られているがその精度を明確にするために各近似による誤差を計算し Fig. 6 に示した。Fig. 6 での実線はチェビシェフ最簡 q 関数による誤差、 \times 印は最小二乗法による多項式近似式の誤差、 \circ 印はフーリエ級数近似によるものである。この図から近似精度は、最簡 q 関数近似、フーリエ級数近似、最小二乗法近似の順に良いことが一目して分かる。以上のようにチェビシェフ最簡 q 関数近似は周期関数に対してもその近似精

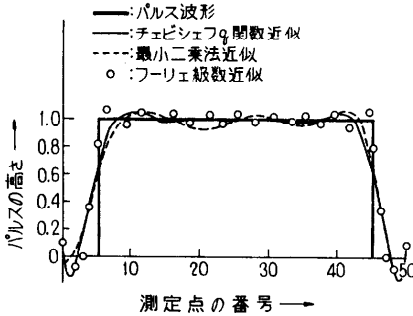


Fig. 5 Curve fitting of a pulse waveform.

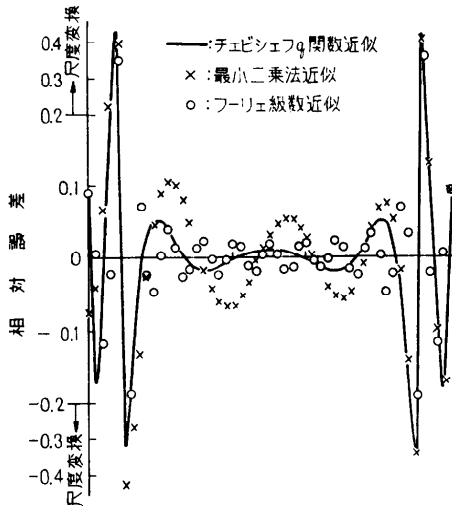


Fig. 6 Comparison of the accuracy of the fitting among ones by other methods.

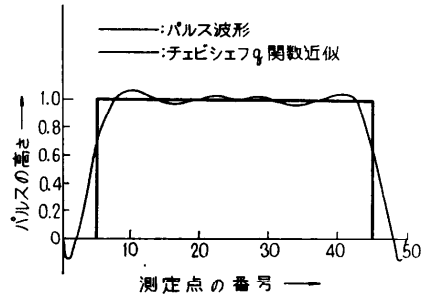


Fig. 7 Curve fitting of a pulse waveform with the revised one so that the fitted value at the origin is zero.

度は高く、特にデータの始めと終りの範囲で急峻な波形を示す関数の近似には適しているように見受けられる。

Fig. 7 はチェビシェフ最簡 q 関数による原点補正を加えた近似結果を示す図である。Fig. 5 の実線で示した第 1 回の最簡 q 関数近似の結果を補正するために、その 51 点にわたる誤差を用いてしかも原点での近似した値が真値と等しくなるように第 2 回の最簡 q 関数による近似補正を行ったものである。第 1 回目近似における q 関数の係数 a_0 は

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.80392157 \\ a_2 &= -0.54767916 \times 10^{-3} \\ a_4 &= -0.87925281 \times 10^{-6} \\ a_6 &= 0.22794815 \times 10^{-9} \\ a_8 &= 0.13105647 \times 10^{-7} \\ a_{10} &= 0.60016150 \times 10^{-10} \\ a_1 &= a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0 \end{aligned}$$

であり、原点補正を加えた第 2 回近似の q 関数の係数 a_0' は

$$\begin{aligned} a_0' &= 0.80346209 \\ a_1' &= 0.32234104 \times 10^{-3} \\ a_2' &= -0.55225260 \times 10^{-3} \\ a_3' &= 0.22584715 \times 10^{-3} \\ a_4' &= -0.90235987 \times 10^{-3} \\ a_5' &= 0.14546038 \times 10^{-6} \\ a_6' &= 0.20088548 \times 10^{-6} \\ a_7' &= 0.23689755 \times 10^{-7} \\ a_8' &= 0.12650605 \times 10^{-7} \\ a_9' &= 0.25429722 \times 10^{-9} \\ a_{10}' &= 0.55408684 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

となる。Fig. 7 で分かるように原点における補正は完全に行われ、またその他の点の精度も若干ではあるが良くなっている。

以上の結果は単一パルスの波形近似のみならずその他の波形の近似に対しても同様な結果を得ており、チェビシェフ最簡 q 関数を用いる近似法が優れていることが分かった。

5. むすび

半導体などの V-I 特性曲線を数式表示する曲線近似の一方法としてチェビシェフ最簡 q 関数を用いる方法について述べ、その適用例を示した。この方法の特長は、ある種非線形特性の曲線近似に対しては従来の方法よりも精度がよく、また原点などの特定な点における計算値を実際の値と等しくさせて物理的条件を満足させる補正が容易にできる点である。他方、この方法はデータの数と近似関数の次数に応じてチェビシェフ最簡 q 関数の表を作成しなければならず、その場合、12 桁以上の数値をもつ q 関数の値はしばしば表われるので小形計算機では取扱えない場合も生ずる欠点がある。表の作成は予めデータの数の多いしかも次数の高いものを作成しておけば他の場合にも適用させることができ便利である。

以上のようにチェビシェフ最簡 q 関数は精度もよく、またこれを展開して容易に多項式とすることができるので、一般に用いられている最小二乗法近似と同

様に使用して有効であると思われる。

最後に、このチェビシェフ最簡 q 関数の御紹介を頂いて曲線近似の示唆を与えて下さった山内二郎先生に心から感謝する次第である。また、この計算は埼玉大学計算機室の TOSBAC-3400 を用いて行ったことを附記する。

参 考 文 献

- 1) 山内二郎：チェビシェフ q 関数について、電試報告, No. 454, pp. 1~29 (1941).
- 2) 後藤, 駒宮, 田島, 森末：負性抵抗接続の分布定数回路における非線形振動の解析理論, 電子通信学誌, Vol. 28, No. 4, pp. 599~607 (1964).
- 3) 多田, 越後, 佐藤：両極性能動線路の数値解析, 電子通信学誌, Vol. 55-A, No. 6, pp. 281~288 (1972).
- 4) 森末, 角, 島田, 岡本：チェビシェフ多項式による曲線近似の精度について; 電気四学連大会口演論文集, No. 50 (1970).

(昭和 50 年 2 月 3 日受付)