



## CAD における曲線曲面の創成について\*

穂坂 衛\*\* 黒田 満\*\*\*

### Abstract

Based on a model of manual curve construction process, a curve and surface synthesis method, which includes B-spline and Bézier's method as its special cases, is developed. A segment of new curve is generated from its parental adjacent curve segments as a locus of weighted mean of a segment of appropriate interval. A new surface segment is constructed similarly from its original segments. A synthesized curve is expressed by the weighted sum of vertex vectors of its associated polygon. Synthesized shape can be controlled locally as well as globally. The passing point of curve, tangent and curvature there, can be changed intentionally without affecting its global shape. Besides computational methods, manual graphical procedures for shape synthesis are presented. And simple expressions for Bézier's curve and surface can also be introduced from our basic equation.

### 1. ま え が き

この論文は形状設計に用いる曲線、曲面の合成に関するもので、局所ならびに大域的形状を制御し易い実用的手法、ならびにその基礎となる理論を導いたものである。形状の工学的設計では、細部に至るまで明確に定義されなければならないが、初めは大まかな形と特定の拘束しか与えられていないのが普通である。そこで設計者の意図を満たす形を定めるための手法には、通常関数近似とは異なった要求が生ずる。すなわち、作られた形には意図しない「うねり」や曲率の不連続の発生がなく、またその形状に修正が容易に加えられるものでなければならない。そのため曲線や曲面を、制御できる小部分の接続によって合成することを考えたのは、S. Coon である<sup>1)</sup>。穂坂はこれと独立に曲線、曲面の合成理論を作った<sup>2)</sup>。これは Coons の式を含むだけでなく、その欠点も修正されているので、すでに実用になっている<sup>3)</sup>。しかし接続による合成では、全接続条件を規定してゆくのが単純でない場合が

生ずるので、Bézier は一つの式で全体の形を表わし、かつ形の制御を行い易くする方法を考えた<sup>4)</sup>。彼の曲線は Fig. 1 のように、特性多角形と称する折線  $\{P_i\}$  を用い、曲線の両端は折線の両端の線分に接し、中間の形はこの各折線分ベクトルの重みをつけたベクトル和の軌跡として表わすものである。これは多角形頂点をサンプル点とした Bernstein 近似であり<sup>5)</sup>、B-Spline 曲線と密接な関係にあることもわかった。Bézier 曲線は前にあげた設計のためのよい条件を備えているが、複雑な形を表わそうとすると高次の多項式になること、特性多角形との形の差が大きくなること、局部的修正ができないことなどの欠点がある。

筆者らは、Bézier 曲線の好ましい性質と、局部修正を両立できる方法を求めるため、人が形を作り、修

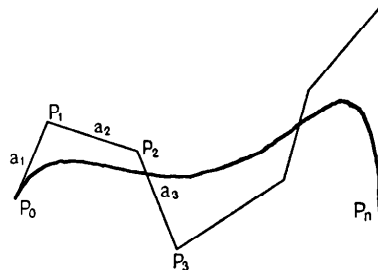


Fig. 1 Bézier's characteristic polygon and curve  $n=7$

\* A Synthesis Theory of Curves and Surfaces for CAD by Mamoru HOSAKA (Inst. of Space and Aeronautical Science, Univ. of Tokyo) and Mitsuru KURODA (Dept. of Precision Engineering, Faculty of Engineering, Univ. of Gifu)

\*\* 東京大学宇宙航空研究所

\*\*\* 岐阜大学工学部精密工学科

正してゆく手法のモデル化を考えた。人は隣接する形状部分を混合してならし、修正した形状を作ってゆく、例えば多角形の隣接する2辺  $a_1$ ,  $a_2$  より両者の中間に曲線分  $b_1$  を作り、次の隣接する2辺  $a_2$ ,  $a_3$  より中間に曲線分  $b_2$  を作り、 $b_1$  と  $b_2$  とを滑らかに接続するようにする。さらにより滑らかにするには、前と同様にこれを繰り返す。

曲面の場合も同様な手法で、隣接するものより新しい曲面分を作っては接続して全体に及ぼしてゆく。このような構成であると局部の修正の影響はある範囲に及ぶだけであり、また形状も前の段階の形と大きく変わることはなく、大域的な形も保存される。これが筆者らの形状創成の原理であり、これを実用的な手法に定式化する。

これから次のような結果が得られた。特性多角形の辺数によらず、与えられた次数の多項式で、多角形の形状に密接に関係する滑らかな曲線が得られること、曲面に拡張できること、さらに与えられた点や、その他の拘束条件を満たす曲線や曲面が比較的少ない計算で求められること。曲率の制御も行えること等である。本論文の 2. には一般理論、3. は実用的手法を述べる。4. で本理論と Bézier 式の関係の導びく。筆者の記法による Bézier 曲線、曲面式は、簡潔であるだけでなく、その各種の性質が簡単に算出できる特徴をもつ。5. では曲率連続の条件を吟味する。

## 2. 基礎方程式とその解と性質

ここでは前章の曲線創成モデルの定式化を行う。曲線分をパラメタによるベクトル表示で  $R_{i,n}(t)$  とかく。ここで第1添字  $i$  は  $i$  番目の接続要素であること、第2添字  $n$  は  $n$  段階目に作られた曲線分であることを示す。 $t$  はパラメタで0より1の間を動く。 $R_{i,n}(t)$  はつぎのようにして定義する。 $R_{i,n-1}(t)$  と  $(R_{i+1,n-1}(t))$  の曲線分上に、 $t$  についての一定間隔を考え、その範囲での曲線分の平均値、すなわち擬似重心を定める。接続している2つの曲線分によって、この間隔の位置を移動させたときの擬似重心点の軌跡を新曲線とする。計算を単純にするために平均をとる曲線分の範囲は  $R_{i,n-1}(t)$  から  $R_{i+1,n-1}(t)$  までとし、正のウエイト  $w(t)$  はどの曲線に対しても同じで、かつ連続であるとする。つぎの方程式が得られる。

$$R_{i,n}(t) = \left\{ \int_t^1 w(\tau) R_{i,n-1}(\tau) d\tau + \int_0^t w(\tau) R_{i+1,n-1}(\tau) d\tau \right\}$$

$$\div \left\{ \int_t^1 w(\tau) d\tau + \int_0^t w(\tau) d\tau \right\} \quad (2.1)$$

ここで  $w(t)$  は次式を満たすものとする。

$$\int_0^1 w(\tau) d\tau = 1 \quad (2.2)$$

最初の曲線  $R_{i,0}(t)$  を孤立点とし、つぎの形にかく、

$$R_{i,0}(t) = P_i f_{0,0}(t), \quad f_{0,0}(t) \equiv 1 \quad (2.3)$$

これより式 (2.1) を用いて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} R_{i,1}(t) &= P_i f_{0,1}(t) + P_{i+1} f_{1,1}(t) \\ \text{ここで} \\ f_{0,1}(t) &= \int_t^1 w(\tau) d\tau, \quad f_{1,1}(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} (2.4)$$

式 (2.3) の  $f_{0,0}(t) = 1$  に対応する関係として

$$f_{0,1}(t) + f_{1,1}(t) = \int_0^1 w(\tau) d\tau = 1$$

が成立する。 $R_{i,1}(t)$  は  $P_i$  と  $P_{i+1}$  を結ぶ直線を示しており、 $w(t) = 1$  ならば、 $t$  はその線分を  $t:1-t$  に分割する点の値を示す。式 (2.4) の第1式と同じ形式で、次式を仮定する。

$$R_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^n P_{i+j} f_{j,n}(t) \quad (2.5)$$

これを式 (2.1) に代入し、 $\{P_i\}$  に関係なく成立する条件を求めれば、 $f_{j,n}(t)$  の関係式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} f_{j,n}(t) &= \int_t^1 w(\tau) f_{j,n-1}(\tau) d\tau + \int_0^t w(\tau) f_{j-1,n-1}(\tau) d\tau \\ f_{0,n}(t) &= \int_t^1 w(\tau) f_{0,n-1}(\tau) d\tau \\ f_{n,n}(t) &= \int_0^t w(\tau) f_{n-1,n-1}(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} (2.6)$$

このとき次式の成立は帰納的に証明できる。

$$\sum_{j=0}^n f_{j,n}(t) = \int_0^1 w(\tau) \sum_{j=0}^{n-1} f_{j,n-1}(\tau) d\tau = 1 \quad (2.7)$$

これより式 (2.5) は座標の移動に関係しない表現である。式 (2.5) は各  $P_{i+j}$  が一つの曲線分に与える影響を表している。一つの頂点  $P_i$  が、合成接続された曲線に与える影響は、 $R_{i-n,n}(t)$  より  $R_{i,n}(t)$  にまで及び単位の  $P_i$  に対し、その各々は  $f_{n,n}(t)$ ,  $f_{n-1,n}(t)$ ,  $\dots$ ,  $f_{0,n}(t)$  の影響を受ける。各  $f_{j,n}(t)$  曲線を上の順序に隣接させ、横軸に等間隔に  $t$  をとって並べると、両端は0で、中央に極大値をもつ形が得られる。これは  $P_i$  の曲線に対する影響を示している。簡単のためこれを  $P$  影響曲線と呼ぶと、これは両端では0で中央では最大値をもつ単峰性の形であることが、 $w > 0$

ときは証明できる。ドットで  $t$  による微分を表すと式 (2.6) より

$$\left. \begin{aligned} f_{n-j,n}(1) &= f_{n-j-1,n}(0), & f_{n,n}(0) &= f_{0,n}(1) = 0 \\ f'_{j,n}(t) &= w(t) \{ f_{j-1,n-1}(t) - f_{j,n-1}(t) \} \end{aligned} \right\} (2.8)$$

ここで  $n-1$  階での  $P$  影響関数が単峰性と仮定すると式 (2.8) の  $\{ \}$  の中は、 $j=n$  では正、 $j=0$  で負でありその中間に符号が反転する個所が1つあることが仮定よりわかる。したがって、 $n$  階の  $P$  影響関数も単峰である。 $n=1$  とすれば、 $f_{1,1}(t)=t$ 、 $f_{0,1}(t)=1-t$  であるから、式 (2.8) より、

$$\begin{aligned} f_{2,2}(t) &= w(t) \cdot t, & f'_{1,2}(t) &= w(t)(1-2t) \\ f'_{0,2}(t) &= -w(t)(1-t) \end{aligned}$$

となり、2階の  $P$  影響関数は単峰性である。上の議論により一般に  $P$  影響関数は単峰性で、 $n+1$  個の曲線分に影響を与えるだけである。式 (2.6) でのウェイト  $w(t)$  は曲線の性質を変更するのに用いることができる。 $w(t)$  が各段階で異なっていると、式 (2.6)、(2.7) は成立する。

例1,  $n=2$  における影響関数を2つ作る。

$$\begin{aligned} w_0(t) &= 1, & w_1(t) &= (\pi/2) \sin \pi t \text{ とすれば} \\ f_{0,2}(t) &= \{ \pi(1-t) \cos \pi t + \sin \pi t \} / 2\pi \\ f_{2,2}(t) &= \{ \sin \pi t - \pi t \cos \pi t \} / 2\pi \\ f_{1,2}(t) &= 1 - f_{0,2}(t) - f_{2,2}(t) \end{aligned}$$

つぎに  $w_0(t)=w_1(t)=1$  とすれば

$$\begin{aligned} f_{0,2}(t) &= (1-t)^2/2, & f_{1,2}(t) &= (1+2t-2t^2)/2 \\ f_{2,2}(t) &= t^2/2 \end{aligned}$$

が得られる。両方の影響関数で作られる曲線分  $R_{0,2}(t)$  は、前者の方が中間点  $P_1$  の影響が小さいのは、その付近のウェイトが小さいからである。

例2. すべての  $w(t)$  が1のときは、影響関数は閉じた形で次の一般形が求まる。

$$\begin{aligned} f_{i,n}(t) &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \cdot {}_{n+1}C_j \cdot (n-i-j+t)^n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \cdot {}_{n+1}C_j \cdot (i-j+1-t)^n \end{aligned} \quad (2.9)$$

これは、式 (2.6) の定義式で  $w(t)=1$  とおき、帰納法で証明できる。この式はすでに別の方法で得られたものと一致する<sup>6)</sup>。この式で  $P$  影響関数を考えると、接続点では  $n-1$  次の微係数まで連続である。このときの微分はパラメタ  $t$  に関するものであるが、通常スプライン関数と言われるものは<sup>7)</sup>、独立変数  $x$  の大きさ順にある値  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$  が与えられたとき、各区間  $[x_i, x_{i+1}]$  において、それぞれ定

義される  $x$  の  $n$  次の多項式が、境界において隣の区間の多項式と、 $n-1$  次まで  $x$  についての微係数が連続であることを持つものである。したがって式 (2.9) で与えられる関数を用いて定義される曲線式 (2.5) は、パラメタ  $t$  について等間隔なベクトル表示のスプライン曲線分である。 $f_{j,n}(t)$  を Basis と考えると  $B$  スプラインの表現である。この曲線式で、パラメタ  $t$  を物理的空間の長さに対応させるならば、等間隔は非常にきつい条件となるが、 $\{P_i\}$  が与えられて、それらより曲線生成を行う場合には、このことを無視しても差し支えない。しかし、曲線上の接続点の列が与えられて、逆に  $\{P_i\}$  を求める問題のときは、隣接する接続点間の距離が大きく異なると、求めた  $\{P_i\}$  から作られる曲線はパラメタについての微係数連続の条件を満たしているにも拘わらず、変曲点が思わぬ所に現れて実用的な曲線になり得ないことが生ずる。これは曲線のパラメトリック表示において、パラメタ単位と物理空間の単位とが、至る所で同一の比例関係にならないために起ることで、これについては穂坂は文献2)で指摘し、その対策をとっている。逆問題の場合はこのことに留意して、通常は接続点間距離の差を少なくすることである。

### 3. 実用的な形状生成手法

#### (i) 特性多角形より作る曲線

ここでは  $w(t)=1$  の場合に限定する。 $n=0$  では特性多角形の離散的な頂点列そのものが求める曲線で、 $n=1$  では多角形そのものが求める曲線である。 $n=2$  のときの  $\{f_{i,2}(t)\}$  は前章の例1にその形を示してある。具体的に述べると曲線分は、 $t=0$  で多角形の一辺  $\overline{P_0P_1}$  の中点からその辺を接線として出発し (Fig. 2 (i) 次頁参照)、 $t=1$  では隣の辺  $\overline{P_1P_2}$  の中点でその辺に接して終る。 $t=0.5$  では、始点と終点とを結ぶ弦の中点と  $P_1$  とを結ぶ直線の中点を、弦に平行に通過する。これで作られる曲線は  $C^{[1]}$  級である。その生成は簡単で利用価値がある。

$n=3$  のときは  $\{f_{i,3}(t)\}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_{0,3}(t) &= (1-3t+3t^2-t^3)/6 \\ f_{1,3}(t) &= (4-6t^2+3t^3)/6 \\ f_{2,3}(t) &= (1+3t+3t^2-3t^3)/6 \\ f_{3,3}(t) &= t^3/6 \end{aligned} \right\} (3.1)$$

曲線分は特性多角形の隣り合う4頂点  $P_0, P_1, P_2, P_3$  あるいは、隣接する辺  $a_1, a_2, a_3$  に関する。Fig. 2-(ii) に示す多角形の各辺の3等分点を  $Q_{1,1}$ ,

$Q_{2,1}$ ,  $Q_{1,2}$ ,  $Q_{2,2}$  等とする。ここで作られる曲線分は  $t=0$  で線分  $\overline{Q_{2,1}Q_{1,2}}$  の中点をその線分に接して出発し,  $t=1$  では線分  $\overline{Q_{2,2}Q_{1,3}}$  の中点で, それに接して終る。出発点での曲率半径は,  $\frac{1}{2}\overline{P_0P_2}$  の 2 乗を  $P_1$  点から, 線分  $\overline{P_0P_2}$  に下した垂線の長さの 2 倍で割った値である。したがって曲率中心は接線に直交する方向に半径の長さをとった点  $O$  である。この原理は 5. で説明する。  $P_1$  点を  $\overline{P_0P_2}$  に平行に移動させても, 出発点の接線方向と曲率半径は変化しない。これらの性質から特性多角形の変形や, 新しい頂点の付加によって,  $C^2$  級を保ちながら曲線の形を変化させることができる。境界の条件も仮定の頂点を付加して合わせることができる。 Fig. 3 に直線部分やカスプをもたせた曲線例を示す。  $n=4$  とすればより自由度が増加し, 振率も連続にして制御できるようになる。実用には余りこの要求は起らないので詳細は省略する。

(ii) 逆変換問題

多角形を与えて曲線を求めるのとは逆に, 接続点を与えて多角形を求め, それより曲線を定めることが要求される場合がある。(i) の場合に制御性がよかったことは, この逆問題では制御性が悪いことになる。例えば  $n=2$  では, 多角形は非常に変動を受け易いことは, 容易にためすことができる。以下  $n=3$  の場合を取り扱う。

始点  $R_{i-1,3}(0)$  を以下  $R_i$  と略記すれば式 (3.1) の  $\{f_{i,3}(t)\}$  で次式が得られる。

$$P_{i-1} + 4P_i + P_{i+1} = 6R_i \quad (3.2)$$

逆問題は式 (3.2) で  $i$  を変えて連立方程式を作り  $\{R_i\}$  を与えて  $\{P_i\}$  を求めることである。  $R_i$  の個数より  $P_i$  の個数が 2 個多いから境界の条件でそれを与えれば, 残りの  $P_i$  は方程式を解いて求められる。方程式の係数行列の対角項が大きいから, 方程式を解くこと自体には問題はない。ここで一つの  $R_i$  がすべての頂点  $\{P_i\}$  に及ぼす影響をみるために, 連立方程式の右辺は一つ以外はすべて 0 であるとする。  $P_i$  の個数が非常に多く, 境界を考えないでよいとき, この方程式の解は次式で与えられる。

$$P_i = \sqrt{3}R_i, \quad P_{i+j} = P_i \alpha^{j|j|} \quad (3.3)$$

ここで,  $\alpha = -2 + \sqrt{3} = -0.2679$ ,  $\alpha^2 = 0.0718$ ,  $\alpha^3 = -0.0192$ ,  $\alpha^4 = 0.00515$ 。これより  $R_i$  の及ぼす影

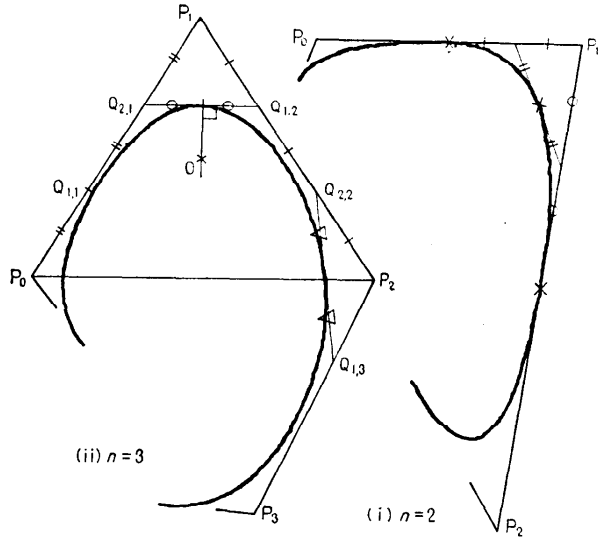


Fig. 2 Quadratic curve-(i) and cubic curve-(ii) defined by given data points  $\{P_i\}$

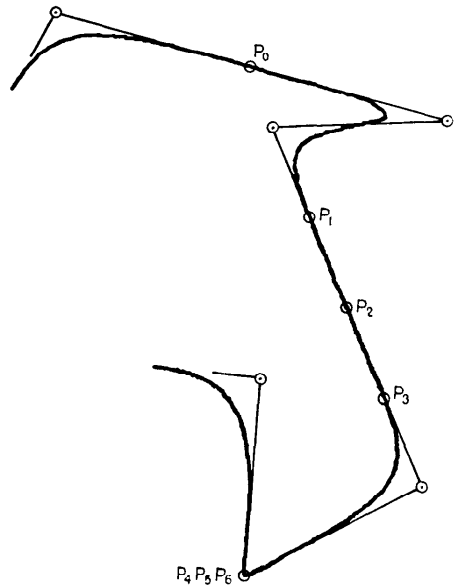


Fig. 3 Vertices which generate cusp and flat in a curve.

響は  $j$  が  $\pm 4$  位までの範囲であることがわかり,  $\{R_i\}$  が与えられているとき, 端に近くない  $R_i$  に対応する  $P_i$  は次式で算定できる。

$$P_j = \sqrt{3} \left\{ R_i + \sum_{j=1}^4 (R_{i+j} + R_{i-j}) \alpha^j \right\} \quad (3.4)$$

上式は座標系によらないから,  $R_i$  を原点にとり,

$R_{i+j}$  と  $R_{i-j}$  との中点を  $Q_j$  として書き直せば

$$P_i = 2\sqrt{3} \sum_{j=1}^4 Q_j \alpha^j \quad (3.5)$$

これは図上に  $\{R_i\}$  が与えられているとき、 $R_i$  に対応する  $P_i$  点を求める手段を与える。境界の条件が与えられている場合にも、その影響範囲は端から4個位までなので、その条件を満たすような仮想の  $R_i$  を境界の外に定めれば式 (3.4) が利用できる。方程式 (3.2) の解析解<sup>6)</sup>や逐次近似解法をコンピュータでは用いることになる。Fig. 4 はそれによる実例である。

(iii) 曲面への拡張

曲線の式において、特性多角形が変形しながら空間を移動すると、生成されている曲線は移動して曲面を作ることになる。あるいは 1. で述べたように、接続する曲面分の擬似重心の移動軌跡を考えて新しい曲面を定義することもできる。特性多角形の頂点  $P_i$  に対応して、曲面では  $P_{i,j}$  を考え、曲線のときの影響関数  $\{f_{i,n}(t)\}$  に対応して  $\{f_{i,m}(u)\}$ ;  $\{f_{i,n}(v)\}$  を用い、2. に述べた曲面の作り方を行うと結局つぎの式が得られる。

$$S_{i,j}(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n P_{i+k, j+l} f_{k,m}(u) f_{l,n}(v) \quad (3.6)$$

$$0 \leq u, v \leq 1$$

ここでの  $\{f_{k,m}(u)\}$  は式 (2.6) で与えたものと同じである、これから  $m \times n$  個の  $\{P_{i,j}\}$  より曲面分が作られ、それが格子状に接続されて曲面を作る。  $P_{i,j}$  の移動によって曲面は局部的に修正されるのは曲線の場合と同じである。この方式は接続曲線に沿っての法線ベクトルの指定を行わなくても、自動的に隣接面と一致がとれて実用上便利である。逆変換問題においても  $m=n=3$  のときは、 $S_{i,j}$  を曲面上の格子点の位置ベクトルとして曲線での式 (3.4) に対応する関係

$$P_{i,j} = 3 \left. \begin{aligned} & \sum_{k=-4}^4 \sum_{l=-4}^4 S_{i+k, j+l} \cdot \alpha^{|k|+|l|} \\ & \alpha = -2 + \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

が境界近傍でなければ成立する。これを用いて逆変換して曲面を作った例を Fig. 5 に示す。

4. Bézier 曲線との関係

Bézier 曲線の性質は彼や Forrest<sup>5)</sup>, Gordon および Riesenfeld<sup>6)</sup>等によって調べられている。筆者らの式も特性多角形を用いるので、Bézier 式との関係を調べたところ、両者の密接な関係がわかり、Bézier 式は非常に簡潔な表現になった。



Fig. 4 Polygons and curves obtained by the inversion procedure.

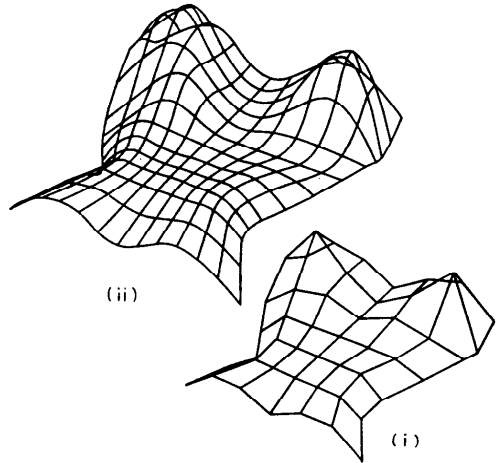


Fig. 5 Input data-(i) and surface-(ii) obtained by the inversion procedure.

式 (2.1) において分母は 1 であることを考慮して微分すると次式が得られる。

$$\dot{R}_{0,n}(t) = w(t) \cdot \{R_{1,n-1}(t) - R_{0,n-1}(t)\} \quad (4.1)$$

式 (4.1) の意味は、2つの曲線の対応する点を結ぶベクトルが、新しく作られる曲線の接線ベクトルに比例するということである。この比例関係を用いるが、(2.2) の条件にこだわらずに比例定数を  $w(t) = n$  とし、2つの曲線は必ずしも接続していなくても差し支えないとする。式 (4.1) に類似につぎの式を作る。

$$\dot{\mathbf{R}}_{0,n}(t) = n \{ \mathbf{R}_{1,n-1}(t) - \mathbf{R}_{0,n-1}(t) \} \quad (4.2)$$

$\mathbf{R}_{i,n}(t)$  の出発点を  $\mathbf{P}_i$  とし,  $\mathbf{P}_{i+1} = E\mathbf{P}_i$  なるシフトオペレータ  $E$  を導入すれば, 式(4.2) の解は次式となる.

$$\mathbf{R}_{0,n}(t) = (1-t+tE)^n \mathbf{P}_0 \quad (4.3)$$

これはつぎのようにもかける.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,n}(t) &= (1-t+tE)\mathbf{R}_{0,n-1}(t) \\ &= (1-t) \cdot \mathbf{R}_{0,n-1}(t) + t\mathbf{R}_{1,n-1}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

式(4.4) はつぎのように解釈できる,  $\mathbf{R}_{0,n-1}(t)$  と  $\mathbf{R}_{1,n-1}(t)$  との同一の  $t$  に対応する点を結ぶ直線を  $t : 1-t$  に分つ点の軌跡として  $\mathbf{R}_{0,n}(t)$  が定められて, またその直線は  $\mathbf{R}_{0,n}(t)$  の接線である. Bézier は 1. で説明したように, 多角形の辺  $\{\mathbf{a}_i\}$  にそれぞれの影響関数をかけたベクトル和として曲線を定義し, 影響関数の形を天下一りに与えた. それは次のように式(4.3)より導びかれる.  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = (E-1)\mathbf{P}_0 = \mathbf{a}_1$  であり, また  $x \equiv t(1-E)$ ,  $\phi(x) \equiv \{1-(1-x)^n\}/x$  (4.5) とおくと式(4.3)は次式となる.

$$\mathbf{R}_{0,n}(t) = \mathbf{P}_0 + t\phi(x) \cdot \mathbf{a}_1 \quad (4.6)$$

$\phi(x)$  は  $n-1$  式の多項式であるから,  $x=t$  のまわりに Taylor 展開した式で書き表わすと次のようになる.  $E^{-1}\mathbf{a}_1$  を定義により  $\mathbf{a}_i$  としてある.

$$\mathbf{R}_{0,n}(t) = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{-(-t)^i}{(i-1)!} \cdot \phi^{(i-1)}(t) \cdot \mathbf{a}_i \quad (4.7)$$

これは Bézier が与えた式の形である.

式(4.3)を  $1-t$  と  $tE$  に関して 2項展開すれば,

$$\mathbf{R}_{0,n}(t) = \sum_{i=0}^n {}_n C_i \cdot t^i (1-t)^{n-i} \cdot \mathbf{P}_i \quad (4.8)$$

これは Forrest が与えた形式である. 式(4.3)はここで示したように Bézier 曲線式そのものを表しており,  $\{\mathbf{P}_i\}$  の点列から線形内挿を繰り返して, 求める曲線上の点が得られることを直接に示している. この他多くの特性が式(4.3)より容易に導かれる.

式(4.3)を  $t$  で展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,n}(t) &= \sum_{i=0}^n {}_n C_i t^i (E-1)^i \mathbf{P}_0 \\ &= \sum_{i=0}^n {}_n C_i t^i (1-E^{-1})^i \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで  $(E-1)$  および  $(1-E^{-1})$  は, 前進および後進差分作用素で, 通常の  $\Delta$  および  $\nabla$  の記号に相当する.

式(4.3)を  $t$  で  $i$  回微分すると

$$\mathbf{R}_{0,n}^{(i)}(t) = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot (1-t+tE)^{n-i} \cdot (E-1)^i \cdot \mathbf{P}_0 \quad (1.10)$$

これより, 左辺の曲線は  $(E-1)^i \cdot \mathbf{P}_j$ ,  $j=0, \dots, n-i$  で定まる点列より作られる Bézier 曲線  $\mathbf{R}_{0,n-i}(t)$  に比例する. これは  $i$  次のホドグラフ曲線である. ある  $i$  の値以上で, ホドグラフ曲線が直線になれば, もとの曲線はより少ない次数で表わし得る.  $t=0, 1$  における  $\mathbf{R}_{0,n}^{(i)}(t)$  の値は  $\{\mathbf{P}_i\}$  で, また  $\mathbf{P}_i$  の値は端点の微係数で表わされる. 式(4.10)より次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{0,n}^{(i)}(0) &= \frac{n!}{(n-i)!} (E-1)^i \cdot \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{R}_{0,n}^{(i)}(1) &= \frac{n!}{(n-1)!} (1-E^{-1})^i \mathbf{P}_n \\ \mathbf{P}_i &= [1+(E-1)]^i \mathbf{P}_0 = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^i (n-j)! \cdot {}_i C_j \\ &\quad \cdot \mathbf{R}_{0,n}^{(j)}(0) \\ \mathbf{P}_{n-i} &= [1-(1-E^{-1})]^i \mathbf{P}_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \\ &\quad \cdot (n-j)! \cdot {}_i C_j \cdot \mathbf{R}_{0,n}^{(j)}(1) \end{aligned} \right\} (4.11)$$

このように式(4.3)による Bézier 曲線表現は便利である.

曲面に対しても容易に拡張でき, 空間点を  $\mathbf{P}_{i,j}$  とかき  $E_1, E_2$  でそれぞれ第 1, 第 2 の添字に対するシフトオペレータとすれば, 四角格子状の点列に対応する曲面は,  $u, v$  の  $[0, 1]$  の範囲で,

$$\mathbf{S}(u, v) = (1-u+uE_1)^m (1-v+vE_2)^n \mathbf{P}_{0,0} \quad (4.12)$$

三角格子状点列に対する曲面は,  $u+v+w=1$  として

$$\mathbf{S}(u, v, w) = (u+vE_1+wE_2)^n \mathbf{P}_{0,0} \quad (4.13)$$

と表わすことができる.  $u, v, w$  の範囲は  $[0, 1]$  である.

### 5. 接続条件と曲率

曲線がパラメタ表現であるとき, パラメタによる微分で接線方向はわかるが, 2階微係数は直接に曲率ベクトルを示しているわけではない. パラメタ表現の 2つの曲線を接続するとき, 形式的に両者の 1階, 2階の微係数が接続点で一致するという条件をつけることは, 曲率まで一致させて接続させることの最も簡単な方法である. しかしこれができないからといって, 曲率まで連続な接続が不可能であるとはいえない. 例えば, パラメタについて 2次式で表わされる曲線同志を曲率まで一致した接続によって形を作ることの例をあとで示す. また, 曲率半径は長さのディメンションをもつ量であるから, 曲線の形状を表わす重要な量であ

るが、通常はその式が複雑であるため用いられることが少なかった。ここではその利用をはかるため、まず曲率の式を求める。

曲線はパラメタ表示で  $\mathbf{R}(t)$  で表わされるものとする。  $ds$  を線素とし、  $t$  の代りに  $ds$  を積分した  $s$  がパラメタであれば単位接線ベクトル、および曲率ベクトルは  $\mathbf{t} = d\mathbf{R}/ds$  および  $\mathbf{n}/\rho = d^2\mathbf{R}/ds^2$  である。ここで  $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{n}$  はそれぞれ接線方向と法線方向の単位ベクトルである。  $\rho$  は曲率半径を表わす。パラメタが  $t$  であれば、  $s$  より  $t$  への変数変換を行って次式を得る。

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{R}}/|\dot{\mathbf{R}}|, \quad \mathbf{n}/\rho = \{\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} - (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}})\dot{\mathbf{R}}\} \dot{\mathbf{R}}^4 \quad (5.1)$$

この第2の式を  $\ddot{\mathbf{R}} = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  の分解関係を用いて変形すれば次式を得る。

$$\frac{\mathbf{n}}{\rho} = \frac{1}{\dot{\mathbf{R}}^2} \{\dot{\mathbf{R}} - (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}\} = \frac{(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{\dot{\mathbf{R}}^2} \quad (5.2)$$

$\dot{\mathbf{R}}$  の法線方向の成分を  $\dot{\mathbf{R}}^2$  で割った値が曲率である。従って Fig. 6 で示すような簡単な幾何学的関係がある。曲線の特性多角形がわかっているならば、曲線分の始、終点での  $\dot{\mathbf{R}}$ 、 $\ddot{\mathbf{R}}$  は 3. (i) の3次の移動平均曲線(以下 MA 曲線とよぶ)では  $(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i-1})/2$ 、 $\mathbf{P}_{i+1} - 2\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i-1}$ 、Bézier 曲線では式 (4.11) より求められ、 $\dot{\mathbf{R}}$  は  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ 、 $\ddot{\mathbf{R}}$  は  $\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$  に比例する。端点以外でも MA 曲線では関与する  $\mathbf{P}_i$  が少ないから  $\rho$  の算定は困難ではない。

一般に曲線分  $\mathbf{R}_1$  と  $\mathbf{R}_2$  を曲率まで連続に接続するための必要十分条件は、 $k$ 、 $c$  を任意の定数として

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2, \quad \dot{\mathbf{R}}_1 = k\dot{\mathbf{R}}_2, \quad \ddot{\mathbf{R}}_1 = k^2\ddot{\mathbf{R}}_2 + c\dot{\mathbf{R}}_2 \quad (5.3)$$

MA 曲線において、 $n=2$  の場合の曲線分は 3. で述べたように、特性多角形の中点で  $c[1]$  級の接続を行っている。これに対し2次の Bézier 曲線を考え、それが接続されて、MA 曲線と同じ特性多角形となったとき、接続点は各辺の中点ではなく、辺  $a_i$  を  $x_i : 1-x_i$  で分ける点が次の方程式を満たせば、接続は曲率まで連続とすることができる。これは Bézier 式の端点の曲率半径は、その曲線に属する特性多角形の形状より定められることを用いたものである。 $n$  個の辺があれば次の関係が成立する。

$$\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^2 \frac{x_{i+1}}{1-x_{i+1}} = B_i, \quad i=2, \dots, n-1 \quad (5.4)$$

ここで  $x_1=0$ 、 $x_n=1$ 、 $B_i = \frac{a_{i-1} \sin \theta_{i-1}}{a_{i+1} \sin \theta_i}$ 、 $\theta_i$  は  $a_i$  と  $a_{i+1}$  のなす角度である。これは  $B_i > 0$  であることが必要で、曲率は同じ符号しか持ち得ない。 $x_i$  の解は第1近似を  $x_i = B_i / (1 + \sqrt{B_i})$  とし逐次近似で容

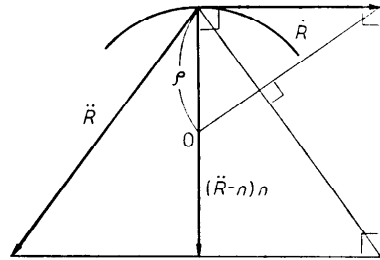


Fig. 6 Graphical relation between  $\dot{\mathbf{R}}$ ,  $\ddot{\mathbf{R}}$  and  $\rho$

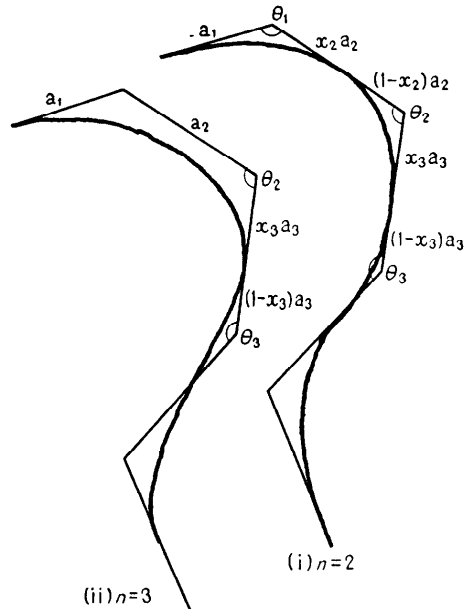


Fig. 7 Quadratic curve-(i) and cubic curve-(ii) of  $C^2$ .

易に定めることができる。このようにして求めた曲線を Fig. 7 に示す。Bézier 3次式の場合、両端の曲率および接線方向を与えると曲線は完全にきめられる。したがって、対応する MA 3次に比べ、形状の拘束力が強い。これらは何れも計算はより複雑になるし、Bézier 式本来の目的でもない。ここでは曲率まで連続という意味を明確にすることおよび曲率半径の算出の仕方を述べることが主旨であり曲面の接続まで含めた一般的議論は後の論文で示す。

## 6. 結 語

工業設計に用いる曲線、曲面式は、すべての場合に適用できるほど制御性の良いものは未だ存在していない。Coons 式や穂坂式には実用的に決定しにくい「ね

じれベクトル」がある。

Bézier式は接続を考えないため、局部制御がやりにくくなる。この両方式の欠点を除くため、移動平均方式を考え、それを定式化し、式の性質ならびに実用的手法を開発し実例でその有用性を示した。さらに Bézier式と本方式が密接な関係にあることがわかり、Bézier式が極めて単純な式になること。それからその性質が容易に導かれることを示した。また曲率ベクトルと特性多角形との関係を明らかにし、それも制御可能であることを導いた。これらのことは、コンピュータによる形状設計の問題解決に幾分の寄与をしたことになるであろう。しかし任意形状曲面の表現、制御、接続については未だ難問が残っており、コンピュータだけですべて処理できるには至っていない。

#### 参 考 文 献

- 1) S. A. Coons: Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms, MIT Project MAC TR-41 (1967).
- 研野和人: 自動設計法, p. 93, コロナ社, (1969)

- 2) 穂坂 衛: 自由形状曲面の理論と設計, 情報処理, Vol. 8, No. 3, pp. 65~72.
  - 曲線, 曲面の合成と平滑化理論, 情報処理 Vol. 10, No. 3, pp. 121~131 (1969).
  - 3) Y. Ishimatsu et al.: Computer-Aided Generation of Sculptured Surfaces, Jl. N. C., Apr. 74, pp. 33~39 (1974).
  - 4) P. Bézier: Numerical Control, Wiley, London (1972).
  - 5) R. A. Forrest: Interactive Interpolation and Approximation by Bézier Polynomials, Computer Jl. Vol. 15, No. 1, pp. 71~79 (1972).
  - 6) 穂坂, 黒田: CAD における曲線, 曲面の創成について, 情報処理学会マン・マシン研究会資料 75-20 (1975).
  - 7) I. J. Schoenberg: On Spline Functions, Inequalities (O. Shisha, editor), Academic Press (1967).
  - 8) W. J. Gordon, R. F. Riesenfeld: Bernstein-Bézier Method for Computer-Aided Design of Free-Form curves and Surfaces, Jl. ACM, Vol. 21, No. 2, pp. 293~310 (1974).
- (昭和50年9月9日受付)  
(昭和51年4月27日再受付)