情報処理学会論文誌 Vol. 52 No. 4 1657–1666 (Apr. 2011)

推薦論文

架空名義操作不可能な施設配置メカニズムの特徴付け

東藤大樹[†1] 岩崎 敦[†1] 横尾 真[†1]

施設配置問題は，施設の配置場所を適切に決定する問題であり，オペレーションズリサーチや経済学において広く研究が行われてきた．特に戦略的操作不可能（各参加者にとって正直が最良の策）な配置メカニズムの設計が重要な課題として認知されている．一方，インターネットを介してこのような施設配置を実現する場合には，1 人のエージェントが複数のエージェントであるかのように振る舞う架空名義操作と呼ばれる不正行為が可能となる．本研究では，施設配置メカニズムの架空名義操作不可能性を定式化し，この性質を満たす配置メカニズムの特徴付けを与える．また，この特徴付けを応用し，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率を解明する．具体的には社会的コストおよび最大コストの 2 つの評価基準に関して，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率の下界値を解明し，その下界値を達成するメカニズムの存在を示す．さらに，従来施設配置問題や経済学において議論されてきた類似の概念と架空名義操作不可能性との関係を明確にする．具体的には，人口単調性，匿名操作不可能性，架空名義操作不可能性の 3 つの性質が等価となることを明らかにする．また，架空名義操作不可能な配置メカニズムはつねに結託的戦略的操作不可能性を満たすことを示す．

Characterization of False-name-proof Facility Location Mechanisms

Taiki Todo,[†1] Atsushi Iwasaki[†1] and Makoto Yokoo[†1]

Recently, mechanism design without monetary transfers is attracting much attention, since in many application domains on Internet, introducing monetary transfers is impossible or undesirable. Mechanism design studies how to design mechanisms that result in good outcomes even when agents strategically report their preferences. However, in highly anonymous settings such as the Internet, declaring preferences dishonestly is not the only way to manipulate the mechanism. Often, it is possible for an agent to pretend to be multiple agents, and submit multiple reports using different identifiers, e.g., different e-mail addresses. Such *false-name manipulations* are more likely to occur in a mechanism without monetary transfers, since submitting multiple reports would be less risky in such a mechanism. In this paper, we formalized false-name manipulations in facility location problems on the real line and obtained a full characterization of *false-name-proof* facility location mechanisms. By utilizing this characterization, we obtained tight bounds of approximation ratios for two objective functions; the social cost and the maximum cost. We also clarified the connections between false-name-proofness and other related properties. In particular, we showed that both *population monotonicity* and *anonymity-proofness* are equivalent to false-name-proofness.

1. 序 論

1.1 研究の背景

施設の配置場所を適切に決定する問題は施設配置問題（facility location problem）と呼ばれ，伝統的にはオペレーションズリサーチや経済学において広く研究が行われてきた[5)]．配置の適切さ，すなわち社会的にどれだけ望ましいかの評価基準は様々であるが，たとえば配置場所と各エージェントの所在地の距離の総和（社会的コスト）や，配置場所から最も遠いエージェントの距離（最大コスト）等が考えられる．施設配置問題の最もシンプルなモデルである実軸（直線）上の施設配置問題においては様々な配置メカニズム（ルール/アルゴリズム）が提案されており，社会的コストを最小化する中央値（median）メカニズムや最大コストを最小化する中点（center）メカニズム等がよく知られている．

また，各エージェントが利己的に行動するような環境での施設配置問題では，エージェントが自分の所在地を偽って申告する誘因を持たない配置メカニズムの設計が重要である．中央値メカニズムはこの性質を満たすが，中点メカニズムにおいてはエージェントが所在地を偽る誘因を持つことが知られている[8)]．エージェントが自分の所在地を偽る誘因を持たない，という性質は戦略的操作不可能性（strategy-proofness）と呼ばれ，社会的コストや最大コストの最小化とともにメカニズムが満たすべき重要な性質であると認識されている[6)]．

一方で，電子投票システムを用いた選挙のように，インターネットを介してこのような施

†1 九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻
Graduate School of ISEE, Kyushu University

本論文の内容は 2010 年 9 月の FIT2010 第 9 回情報科学技術フォーラムにて報告され，同プログラム委員長により情報処理学会論文誌ジャーナルへの掲載が推薦された論文である．

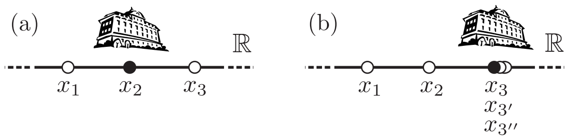

図 1　中央値メカニズムと架空名義操作によるコストの減少の例
Fig. 1　An example where an agent can reduce her cost by a false-name-manipulation.

設配置を実現する場合には，1 人のエージェントが複数のアカウントを用いる等して複数のエージェントであるかのように振る舞う不正行為が可能となる．戦略的操作不可能性を満たす中央値メカニズムにおいても，1 人のエージェントが十分多くのアカウントを用いてすべてのアカウントで自分の所在地を申告することで，自分の所在地に配置場所を変更することが可能となる．たとえば**図 1** で表される 3 エージェントの施設配置をインターネットを介して行う場合を考えると，それぞれのエージェントが正直に自分の所在地 x_1，x_2，x_3 を申告した場合の中央値は x_2 である (a) が，所在地 x_3 を持つエージェントが新たに 2 つのアカウントを用いて $(x_3, x_{3'}, x_{3''}) = (x_3, x_3, x_3)$ という 3 つの所在地を申告した場合 (b)，中央値が x_3 となり，配置場所をこのエージェントの真の所在地に変化させることができる．

ネットワークの普及は社会・経済システムの多様な実現方法を提供するが，その一方で，匿名性を利用したこのような不正行為の急速な拡大を引き起こす可能性が指摘されている[14]．このため，不正に対して頑健なメカニズムを議論することは重要な課題として認知されている．特に電子商取引/オークションの研究分野においては，不正に対して頑健なオークションメカニズムがすでにいくつか提案されてきた[14]．しかしながら，施設配置問題においてはこのような不正行為の影響を扱った従来研究は存在せず，不正に対して頑健な配置メカニズムについての議論はほとんどなされていなかった．

1.2　本研究による成果

本研究ではまず，施設配置問題において，エージェントが複数の名義を用いる誘因を持たない性質（架空名義操作不可能性/false-name-proofness）を定式化し，この性質を満たす配置メカニズムの特徴付けを与える．これは，文献 6) による成果の拡張である．また，この特徴付けを応用し，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率を解明する．具体的には社会的コストおよび最大コストの 2 つの評価基準に関して，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率の下界値を解明し，その下界値を達成するメカニズムの存在を示す．さらに，従来施設配置問題や経済学において議論されてきた人口単調性（population monotonicity），結託的戦略的操作不可能性（group-strategyproofness），および匿名操作不可能性（anonymity-proofness）について，架空名義操作不可能性との関係を明確にする．具体的には，人口単調性，匿名操作不可能性，架空名義操作不可能性の 3 つの性質が等価となることを明らかにする．また，架空名義操作不可能な配置メカニズムはつねに結託的戦略的操作不可能性を満たすことを示す．

本研究では，施設配置問題における架空名義操作の影響を初めて理論的に考察している．本論文で対象とした一次元の施設配置問題における成果は，より現実に近いモデルであるグラフや平面上の施設配置問題の研究の進展に貢献する．

1.3　関 連 研 究

施設配置問題は文献 5)，10) 等で詳細に説明されている．文献 6) は，配置メカニズムが戦略的操作不可能性を満たすための必要十分条件を示している．文献 8) は施設配置問題に対する計算機科学分野からの近年の成果であり，戦略的操作不可能な配置メカニズムの達成する近似率についての考察を行っている．

適切なメカニズムの設計に関する研究はメカニズムデザインと呼ばれ，経済学分野で研究されてきた[9]．なかでもオークション理論[4]やマッチング理論[12]は特に注目を集めている．近年では計算機科学分野でもメカニズムデザインの重要性が認知されてきており，アルゴリズム的ゲーム理論（algorithmic game theory [7]）や計算論的社会選択理論（computational social choice [1]）等の新たな研究領域が形成されつつある．

エージェントが複数の名義を用いる不正行為は架空名義操作（false-name manipulations）と呼ばれ，従来組合せオークションの分野で広く議論されてきた[11),13),14]．適切な社会的決定のためには架空名義操作は排除されるべきであるが，インターネットのような匿名性の高い環境においてアカウントの真の名義情報を特定することは困難である．このため，架空名義操作不可能性を満たすメカニズムを設計する，というゲーム理論を用いたアプローチが重要である．

2.　準　　備

2.1　基本的なモデル

本論文では簡単化のため，実軸 ℝ 上でただ 1 つの施設の配置場所を決定する施設配置問題を扱うことにする．n 人のエージェントが参加する施設配置問題を考え，この n エージェントからなる集合を N で表す．各エージェント $i \in N$ は実軸上に真の所在地 $x_i \in \mathbb{R}$ を持つ．施設が $z \in \mathbb{R}$ に配置された場合の，真の所在地 x_i を持つエージェント i のコスト $\mathrm{cost}(x_i, z)$ は，自分の所在地と配置場所との間の距離によって $\mathrm{cost}(x_i, z) = |x_i - z|$ と定

義される．施設の配置場所は，配置メカニズムと呼ばれるルールによって決定される．配置メカニズムは各エージェントの申告する所在地の組 $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ を入力とし，施設の配置場所を決定する関数として定式化できる．本論文で扱う配置メカニズムは匿名性（anonymity）およびパレート効率性（Pareto-efficiency）を満たすと仮定する．匿名性は，エージェントの名前が結果に影響しないことを意味し，エージェント i，j が申告を入れ替えてそれぞれ x_j，x_i を申告しても，メカニズムの出力は変化しない．この仮定により，一般性を失うことなく $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ とする．パレート効率性は，いずれかのエージェントのコストを増加させることなしに，他のエージェントのコストが減少しないことを意味する．施設配置問題においては，任意の申告の組 x に対して配置場所 z が $z \in [x_1, x_n]$ を満たすことが，配置メカニズムがパレート効率的であるための必要十分条件となる．また，本論文で扱う配置メカニズムは決定的（deterministic）であるとする．すなわち，ある申告の組 x に対して，配置場所はつねに同一となる．さらに，配置メカニズムは任意のエージェント数に対して配置場所を決定する．

定義 1（配置メカニズム）**.** 配置メカニズム f は，任意のエージェント数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，エージェントによる申告の組 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を入力として配置 $z \in \mathbb{R}$ を出力する関数 f^n の集合として次のように定義される：

$$f = \{f^n | n \in \mathbb{N}, f^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$$

各エージェントが利己的（selfish）である，すなわち自分のコストを最小化するように振る舞う場合，エージェント i によって申告される所在地が i の真の所在地 x_i である保証はない．しかし本論文では，次に説明する戦略的操作不可能性（strategy-proofness）を満たす配置メカニズムを対象とするため，エージェント i によって申告される所在地を真の所在地と区別することなく x_i で表すことにする．

定義 2（戦略的操作不可能性）**.** 配置メカニズム f が戦略的操作不可能性を満たすとは，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall i \in N$，$\forall x_{-i}$，$\forall x_i$，$\forall x'_i$ に対して

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x_i, x_{-i})) \leq \mathrm{cost}(x_i, f^n(x'_i, x_{-i})) \tag{1}$$

が成立することである．

ここで，x_{-i} は i 以外のエージェントによる申告の組を表しており，$f^n(x_i, x_{-i})$ と書いた場合には，エージェント i によって x_i が，i 以外のエージェントによってが x_{-i} がそれぞれ申告された場合の施設配置を表す．定義 2 は，戦略的操作不可能な配置メカニズムにおいて，すべてのエージェントにとって自分の真の所在地を申告することが（弱）支配戦略となることを意味している．

1 章であげた中央値メカニズムは，戦略的操作不可能なメカニズムの 1 つである．与えられた引数の組に対してその中央値を返す関数 $\mathrm{med}(\cdot)$ を定義すると，中央値メカニズム f は $f(x) = \mathrm{med}(x)$ と記述できる．ここで関数 $\mathrm{med}(\cdot)$ は，引数の個数 n が偶数の場合には $n/2$ 番目に小さい値を返すものと定義する．また，申告された所在地のうち最も左に位置するものを配置場所に選ぶ最左値（leftmost）メカニズムや，最も右のものを選ぶ最右値（rightmost）メカニズム等も戦略的操作不可能な配置メカニズムとしてよく知られている．

戦略的操作不可能性を満たす配置メカニズムに関しては，文献 6) による次の定理がよく知られている．

定理 1（Moulin, 1980）**.** 配置メカニズム f が戦略的操作不可能性，パレート効率性，匿名性を満たすための必要十分条件は，f が次のように表されることである：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{n-1}^n) \in \mathbb{R}^{n-1},\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$f^n(x) = \mathrm{med}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1^n, \ldots, \alpha_{n-1}^n). \tag{2}$$

定理 1 は，式 (2) のパラメータによって戦略的操作不可能なメカニズムを特徴付けるものである．実際，中央値メカニズムはパラメータが

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1, \ldots, n-1\}, \alpha_l^n = \begin{cases} -\infty & \text{if } l \text{ is odd} \\ \infty & \text{if } l \text{ is even} \end{cases}$$

と定められたものと解釈でき，最左値（最右値）メカニズムはすべてのパラメータが $-\infty(\infty)$ と定められたものと解釈できる．

メカニズムの性能の評価基準は，メカニズムの目的によって様々に定義できる．本論文では社会的コスト（social cost）および最大コスト（maximum cost）の近似率（approximation ratio）を評価基準として導入する．まず，申告の組 x が与えられたときの，配置メカニズム f の x に対する社会的コストおよび最大コストを定義する．

定義 3（配置メカニズムのコスト）**.** 申告の組 x に対する配置メカニズム f の社会的コスト $\mathrm{SC}_f(x)$ および最大コスト $\mathrm{MC}_f(x)$ はそれぞれ以下で与えられる：

$$\mathrm{SC}_f(x) = \sum_i \mathrm{cost}(x_i, f^n(x)),\ \mathrm{MC}_f(x) = \max_i \mathrm{cost}(x_i, f^n(x))$$

社会的コストは参加エージェント全体のコストの総和を表しており，社会的コストを最小化すること（ミニサム型配置[5] とも呼ばれる）は全体の効率を高めることにつながる．一方，最大コストはコスト最大のエージェントのコストを表しており，最大コストを最小化すること（ミニマックス型配置[5] とも呼ばれる）は，ある意味で公平な配置につながる．これ

らのコストに関して，そのコストの下で最適な配置に対する近似率を定義する．

定義 4（近似率）．配置メカニズム f の社会的コストの近似率 $\mathrm{AR}_f^{\mathrm{SC}}$ および最大コストの近似率 $\mathrm{AR}_f^{\mathrm{MC}}$ はそれぞれ以下で与えられる：

$$\mathrm{AR}_f^{\mathrm{SC}} = \max_x \frac{\mathrm{SC}_f(x)}{\min_z \sum_i \mathrm{cost}(x_i, z)},\ \mathrm{AR}_f^{\mathrm{MC}} = \max_x \frac{\mathrm{MC}_f(x)}{\min_z \max_i \mathrm{cost}(x_i, z)}$$

2.2 架空名義操作不可能性

次に，配置メカニズムの架空名義操作不可能性（false-name-proofness）について議論する．まず，エージェント i が使用する名義の集合を ϕ_i とし，i が名義の集合 ϕ_i を用いて申告する所在地の組を x'_{ϕ_i} で表すとする．このとき，配置メカニズムの架空名義操作不可能性は以下のように定義される．

定義 5（架空名義操作不可能性）．配置メカニズム f が架空名義操作不可能性を満たすとは，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall i \in N$，$\forall x_{-i}$，$\forall x_i$，$\forall \phi_i$ $\forall x'_{\phi_i}$ に対して

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x_i, x_{-i})) \leq \mathrm{cost}(x_i, f^{n-1+|\phi_i|}(x'_{\phi_i}, x_{-i})) \qquad (3)$$

が成立することである．

すなわち，架空名義操作不可能な配置メカニズムにおいては，すべてのエージェントにとって，複数の名義で参加できるにもかかわらず，ただ 1 つの名義のみを用いて自分の真の所在地を申告することが（弱）支配戦略となる．1 章で述べたように，中央値メカニズムは架空名義操作不可能性を満たさない．一方，最左値メカニズムや最右値メカニズムは架空名義操作不可能性を満たす．

3. 架空名義操作不可能性の特徴付け

本章では，架空名義操作不可能な配置メカニズムを特徴付ける．具体的には，以下の定理を示すことで，配置メカニズムが架空名義操作不可能となるための必要十分条件を与える．

定理 2. 施設配置メカニズム f が架空名義操作不可能性，パレート効率性，および匿名性を満たすための必要十分条件は，f が次のように表されることである：

$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x = (x_1, \ldots, x_n),$

$$f^n(x) = \mathrm{med}(x_1, \ldots, x_n, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-1}) \qquad (4)$$

この定理を，以下の 2 つの補題に分けて示す．

補題 1. 配置メカニズム f が式 (4) を満たすとき，f は架空名義操作不可能性，パレート効率性，および匿名性を満たす．

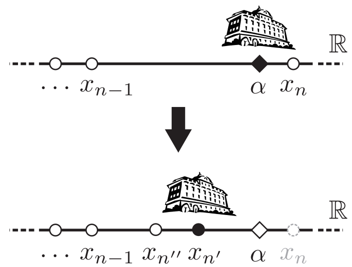

図 2　コストの減少しない架空名義操作
Fig. 2　A non-profitable false-name manipulation.

証明. 明らかに，配置メカニズム f が式 (4) を満たすならば同時に式 (2) を満たす．よって定理 1 より，f はパレート効率性および匿名性を満たす．あとは，f が式 (4) を満たすとき，f が架空名義操作不可能性を満たすことを示せば十分である．以下では，式 (4) を満たす配置メカニズム f の持つパラメータ α に対して，真の所在地の組が (i) $x_1 \leq \alpha \leq x_n$ である場合と，(ii) $\alpha < x_1$ または $x_n < \alpha$ のいずれかである場合のそれぞれにおいて，f が架空名義操作不可能性を満たすことを示す．

エージェントの真の所在地の組 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ が (i) $x_1 \leq \alpha \leq x_n$ である場合，いずれのエージェントも架空名義操作を行わない場合の出力 $f^n(x)$ は $f^n(x) = \alpha$ である．このとき，自分の真の所在地を申告せず，他のエージェントの申告も含めたすべての申告が α から見て同じ方向に存在するような架空名義操作（**図 2**）を行った場合にのみ出力は変化する．しかしながら，式 (4) より，この操作によって f の出力が自分の真の所在地に近づくことはなく，コストは減少しない．よって架空名義操作不可能性を満たす．

次に，(ii) $\alpha < x_1$ または $x_n < \alpha$ のいずれかである場合を考える．今，$\alpha < x_1$ であるとすると，いずれのエージェントも架空名義操作を行わない場合の出力 $f^n(x)$ は $f^n(x) = x_1$ である．このとき，式 (4) より，あるエージェント i が（少なくとも 1 つの）架空名義 i' を追加して $x_{i'} < x_1$ なる点 $x_{i'}$ を申告した場合にのみ，出力は変化する．このときメカニズムの出力は $f^{n+1}(x, x_{i'}) = \max\{\alpha, x_{i'}\}$ となる．今，$\alpha < x_1$ および $x_{i'} < x_1$ が成立しているので，任意のエージェント i に関してコストは増加する．よって架空名義操作不可能性を満たす．同様の議論が $x_n < \alpha$ の場合にも成立する．□

補題 2. 配置メカニズム f が架空名義操作不可能性，パレート効率性，および匿名性を満たすとき，f は式 (4) を満たす．

証明. 架空名義操作不可能性は戦略的操作不可能性を包含する性質であるため，定理 1 より，配置メカニズム f が架空名義操作不可能性，パレート効率性，および匿名性を満たすとき，f はエージェント数 n（≥ 2）に対して $n-1$ 個のパラメータ $\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{n-1}^n$ を持ち，式 (2) で与えられる中央値を出力する．あとは，任意の n（≥ 2）に対して定義されるこれらのパラメータがすべて等しいことを示せばよい．

数学的帰納法を用いて示す．まず基底段階である $n = 2$ のとき，パラメータは 1 つのみなので，明らかに n 以下の任意のエージェント数に関して同一のパラメータ α を持つ．

次に，$n = k$（≥ 2）の場合に k 以下の任意のエージェント数に関して同一のパラメータ α を持つと仮定し，$n = k+1$ の場合の k 個のパラメータもすべて α に等しいことを示す．すなわち，定理 1 で与えられるパラメータに関して

$$\alpha_1^k = \ldots = \alpha_{k-1}^k = \alpha_1^{k-1} = \ldots = \alpha_1^{k-2} = \ldots = \alpha_1^2 = \alpha$$

が成立していると仮定し，$n = k+1$ において

$$\alpha_1^{k+1} = \ldots = \alpha_k^{k+1} = \alpha$$

が成立することを示す．具体的には，(i) $\alpha < \alpha_1^{k+1}$ または $\alpha_k^{k+1} < \alpha$ が成立する場合と，(ii) $\alpha_1^{k+1} \leq \alpha \leq \alpha_k^{k+1}$ が成立する場合とに分けて，上の式が成立することを示す．

まず，(i) $\alpha < \alpha_1^{k+1}$ または $\alpha_k^{k+1} < \alpha$ が成立する場合を考える．$\alpha < \alpha_1^{k+1}$ の場合，k 人のエージェントによる申告の組 x が

$$\alpha < x_1 < \ldots < x_k < \alpha_1^{k+1}$$

を満たす状況において，エージェント k が架空名義 k' を用いて $x_{k'} = x_k$ を申告すると，メカニズムの出力は $f^k(x) = x_1$ から $f^{k+1}(x, x_{k'}) = x_k$ に変化する．この操作によってエージェント k のコストは $x_k - x_1$ から 0 に減少しており，架空名義操作不可能性を満たすという前提に矛盾する．不等号を逆にすることで，$\alpha_k^{k+1} < \alpha$ の場合にも同様の議論が成り立つ．

次に，(ii) $\alpha_1^{k+1} \leq \alpha \leq \alpha_k^{k+1}$ が成立する場合を考える．この場合，ある $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ が存在して，

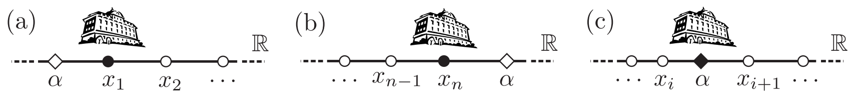

図 3　架空名義操作不可能な配置メカニズム
Fig. 3　A false-name-proof facility location mechanism.

$$\alpha_j^{k+1} \leq \alpha < \alpha_{j+1}^{k+1} \quad \text{または} \quad \alpha_j^{k+1} < \alpha \leq \alpha_{j+1}^{k+1}$$

が成立する．今，$\alpha_j^{k+1} \leq \alpha < \alpha_{j+1}^{k+1}$ であるとすると，

$$\alpha < x_1 < \ldots < x_k < \alpha_{j+1}^{k+1}$$

なる申告の組 $x = (x_1, \ldots, x_k)$ を考えることができる．このとき，$k-j$ 番目に小さい値を持つエージェントを l とおくと，l が架空名義 l' を追加して $x_{l'} = x_l$ を申告することで，メカニズムの出力は $f^k(x) = x_1$ から $f^{k+1}(x, x_l) = x_l$ に変化する．この操作によって l のコストは減少し，架空名義操作不可能性を満たすという前提に矛盾する．同様の議論が $\alpha_j^{k+1} \leq \alpha < \alpha_{j+1}^{k+1}$ の場合にも成立する．□

定理 2 の与える特徴付けは，次のように解釈できる．今，パレート効率性と匿名性を満たす配置メカニズムを考える．このとき，配置メカニズム f があるパラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ を持ち，

- すべてのエージェントによる申告が α から見て同じ方向にある場合，申告された所在地のうち α に最も近い値を配置場所として出力（**図 3** (a) または (b)）
- さもなければ α を配置場所として出力（図 3 (c)）

と表現可能である場合，またその場合に限り，f は架空名義操作不可能性を満たす．明らかに，$\alpha = -\infty$ である最左値メカニズムと $\alpha = \infty$ である最右値メカニズムはこの形式で表現可能であるため，架空名義操作不可能性を満たす．一方，中央値メカニズムはこの形式では表現できないため，架空名義操作不可能性を満たさない．このように，我々の与えた特徴付けによって，メカニズムの架空名義操作不可能性の容易な検証が可能となる．

4. 近似率解析

本章では，架空名義操作不可能な配置メカニズムの社会的コストおよび最大コストを議論する．具体的には，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率の下界値を解明するとともに，実際にその下界値を達成する配置メカニズムが存在することを示す．両

表 1　架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な社会的コストおよび最大コストの近似率を示す．SP および FNP はそれぞれ戦略的操作不可能性と架空名義操作不可能性を表している．架空名義操作不可能性に関して，いずれのコストにおいてもタイトな近似率が得られている

Table 1　A summary of the approximation ratios achieved by deterministic strategy-proof/false-name-proof facility location mechanisms on the real line. UB and LB indicate the upper bound and the lower bound, respectively. SP and FNP indicate strategy-proof and false-name-proof, respectively.

	SP	FNP
社会的コスト	UB: 1	UB: $n-1$（定理 4）
	LB: 1	LB: $n-1$（定理 3）
最大コスト	UB: 2 [8]	UB: 2（定理 6 [8]）
	LB: 2 [8]	LB: 2（定理 5）

コストモデルにおいて，本章で得られた近似率（**表 1**）はパレート効率性を仮定する範囲で最悪の値となっており，架空名義操作不可能性の達成の困難さを示唆している．しかしながら，いずれのコストにおいても，タイトな近似率が得られている．

4.1　社会的コスト

本節では架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な社会的コストの近似率を議論する．まず定理 3 で架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な社会的コストの近似率の下界値を示した後，定理 4 でその下界値を達成する配置メカニズムの存在を示す．

定理 3. 架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な社会的コストの近似率の下界値は $n-1$ である．

証明. 定理 2 より，任意の架空名義操作不可能な配置メカニズム f はパラメータとしてある点 α を持つことが示されている．このとき，f の持つパラメータ α（$\neq \infty$）に対して次のような申告の組 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ を考えることができる：

$$\alpha < x_1 < x_2 = \ldots = x_n$$

パラメータ $\alpha = \infty$ の場合にも，不等号を逆にすれば以下の議論は同様に成立する．

定理 2 より，上で与えた x に対するメカニズム f の出力は $f^n(x)=x_1$ となり，このときの社会的コストは $(n-1)\cdot|x_2-x_1|$ となる．一方，この x に対して社会的コストを最小化する配置 z は $z=x_2$ であり，このときの社会的コストは $|x_2-x_1|$ である．よって社会的コストの近似率 $\mathrm{AR}_f^{\mathrm{SC}}$ は $\mathrm{AR}_f^{\mathrm{SC}} \geq n-1$ となる．任意の架空名義操作不可能な配置メカニズムに対して上記の議論は成立するので，社会的コストの近似率の下界値は $n-1$ となる．□

定理 4. 最左値メカニズムの社会的コストの近似率は $n-1$ である．

証明. 最左値メカニズム f は，パラメータ $\alpha=-\infty$ で定義される架空名義操作不可能な配置メカニズムである．

まず，任意の申告 x に対し，最左値メカニズムの社会的コストが $(n-1)(x_n-x_1)$ 以下であることを示す．x に対する最左値メカニズムの社会的コストは

$$\sum_{i\neq 1}|x_i-x_1|$$

であり，$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ の仮定より

$$x_i - x_1 \leq x_n - x_1$$

が任意の i に対して成立する．よって

$$\sum_{i\neq 1}|x_i-x_1| \leq \sum_{i\neq 1}(x_n-x_1) = (n-1)(x_n-x_1) \tag{5}$$

となる．

次に，任意の申告 x に対する最適解のコストが x_n-x_1 以上となることを示す．今，パレート効率性を仮定しているので，最適な施設の配置場所 z は必ず $x_1 \leq z \leq x_n$ を満たす．よって，配置場所が z の場合の社会的コストは

$$\sum_{i\in N}\mathrm{cost}(x_i,z) \geq \sum_{i=1,n}\mathrm{cost}(x_i,z) = |x_n-z|+|x_1-z| = x_n-x_1 \tag{6}$$

となる．

式 (5) および式 (6) より，最左値メカニズム f の社会的コストの近似率は

$$\frac{(n-1)(x_n-x_1)}{x_n-x_1} = n-1$$

以下となる．さらに，$x_1 < x_2 = \ldots = x_n$ なる x が申告された場合に，式 (5) および式 (6) はいずれも等号で成立する．よって $\mathrm{AR}_f^{\mathrm{SC}} = n-1$ となり，定理 3 で求めた下界値にマッチする．□

4.2　最大コスト

社会的コストを議論した 4.1 節に対し，本節では，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な最大コストの近似率を議論する．まず定理 5 で架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な最大コストの近似率の下界値を示す．

定理 5. 架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な最大コストの近似率の下界値は

2 である．

証明． 文献 8) によって，戦略的操作不可能な配置メカニズムが達成可能な最大コストの近似率の下界値が 2 となることが示されている．架空名義操作不可能性は戦略的操作不可能性よりも厳しい条件であるため，その下界値は小さくなることはない．よって，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な最大コストの近似率の下界値は 2 となる． □

さらに文献 8) の次の定理により，最左値メカニズムの最大コストの近似率も示されている．すでに述べたとおり，最左値メカニズムは架空名義操作不可能な配置メカニズムである．よって，定理 5 で示された下界値がタイトなものであることが分かる．

定理 6（Procaccia and Tennenholtz, 2009）．最左値メカニズムの最大コストの近似率は 2 である．

5. 他の概念との関係

社会選択理論やメカニズムデザインの分野では，戦略的操作不可能性や架空名義操作不可能性以外にも，メカニズムが満たすべき様々な性質が提案されている．それらの性質の関係を明確にすることは，可能な限り多くの性質を満たすメカニズムを設計するうえで重要である．本章では，施設配置問題における人口単調性，結託的戦略的操作不可能性，および匿名操作不可能性という 3 つの性質と架空名義操作不可能性との関係を明確にする．

5.1 人口単調性との関係

人口単調性（population monotonicity）は社会選択（social choice）の整合性（consistency）に関する概念であり，文献 2) 等で提案されている．

定義 6（人口単調性）．配置メカニズム f が人口単調性を満たすとは，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$，$\forall j \in N$ に対して，以下の 2 式のいずれかが成立することである：

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x)) \le \mathrm{cost}(x_i, f^{n-1}(x_{-j}))\ \forall i \neq j, \tag{7}$$

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x)) \ge \mathrm{cost}(x_i, f^{n-1}(x_{-j}))\ \forall i \neq j \tag{8}$$

すなわち，人口単調性を満たす配置メカニズムにおいては，あるエージェント j が参加することによって，元々存在していた他のエージェントのコストは，全員増加するか，あるいは全員減少するかのいずれかとなる．本節では人口単調性と架空名義操作不可能性との関係について，次の定理を示す．

系 1． 匿名かつパレート効率的な施設配置問題において，メカニズムの架空名義操作不可能性と人口単調性とは等価である．

証明． 文献 2) において，配置メカニズムが人口単調性を満たすための必要十分条件が与えられている．その条件は本論文の定理 2 で与えられる条件と一致しており，人口単調性と架空名義操作不可能性が等価であることが分かる． □

配置メカニズムにおける架空名義操作不可能性と人口単調性との等価性は，直感的には以下のように解釈できる．本論文ではパレート効率的な配置メカニズムを考慮しているため，新規エージェント j の参加によって誰かのコストが真に減少するならば，他の誰かのコストは真に増加する．すなわち，人口単調性が定義 6 の式 (7) の意味で成立することはない．よって，パレート効率的な配置メカニズムにおいては，人口単調性は式 (8) による定義のみで必要十分となる．式 (8) は，新規エージェントの追加によって，元々存在していたエージェントのコストが真には減少しないことを意味しており，架空名義操作不可能性と同じ条件を示す．

5.2 結託的戦略的操作不可能性との関係

結託的戦略的操作不可能性（group-strategyproofness）は，エージェントの結託（グループ）による操作に対する頑健性として，経済学やゲーム理論分野で広く議論されている[6)]．

定義 7（結託的戦略的操作不可能性）．配置メカニズム f が結託的戦略的操作不可能性を満たすとは，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall S \subseteq N$，$\forall x_{-S}$，$\forall x_S$，$\forall x'_S$ に対して，次式を満たすエージェント $i \in S$ が少なくとも 1 人存在することである：

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x_S, x_{-S})) \le \mathrm{cost}(x_i, f^n(x'_S, x_{-S})) \tag{9}$$

ここで，x_S は結託 S に属するエージェントの真の所在地の組を表しており，x'_S は結託 S による操作（申告の変更）を意味する．すなわち，結託的戦略的操作不可能な配置メカニズムにおいては，エージェントの集合 N 内のどのような結託 S による操作 x'_S に対しても，S 内に少なくとも 1 人，コストが真に減少することのないエージェントが存在する．施設配置問題においては，メカニズム外部での金銭による補償（side-payment）が不可能であるため，コストが真に減少しないエージェントは結託に参加する誘因を持たない．

施設配置問題における戦略的操作不可能性と結託的戦略的操作不可能性との関係については，文献 6) でその等価性が示されている．

定理 7（Moulin, 1980）．匿名かつパレート効率的な施設配置問題において，メカニズムの戦略的操作不可能性と結託的戦略的操作不可能性とは等価である．

本節では，結託的戦略的操作不可能性と架空名義操作不可能性との関係について，次の定理を示す．

系 2. 匿名かつパレート効率的な施設配置問題において，架空名義操作不可能なメカニズムは結託的戦略的操作不可能性を満たすが，逆は必ずしも成り立たない．

証明. 定理 7 より，匿名かつパレート効率的な施設配置問題において結託的戦略的操作不可能性を議論する場合，戦略的操作不可能性を議論すれば十分である．架空名義操作不可能性は戦略的操作不可能性の一般化であるから，配置メカニズムが架空名義操作不可能性を満たす場合，同時に戦略的操作不可能性を満たす．一方，中央値メカニズムは戦略的操作不可能ではあるが，1 章で述べたように架空名義操作不可能性を満たさない． □

5.3 匿名操作不可能性との関係

匿名操作不可能性（anonymity-proofness）は架空名義操作不可能性を拡張した概念である．匿名操作不可能性を定義する前に，まず参加制約（participation）と呼ばれる概念を説明する．

定義 8（参加制約）**.** 配置メカニズム f が参加制約を満たすとは，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall i \in N$，$\forall x_{-i}$，$\forall x_i$ に対して次式が成立することである：

$$\mathrm{cost}(x_i, f^n(x_i, x_{-i})) \leq \mathrm{cost}(x_i, f^{n-1}(x_{-i})) \tag{10}$$

式 (10) の左辺は，エージェント i がメカニズムに参加して真の所在地を申告した場合のエージェント i の効用を表している．一方右辺は，エージェント i が参加しなかった場合の施設配置の結果からエージェント i が得る効用を表している．すなわち，参加制約は，自分の真の所在地を正直に申告する限り，エージェントはメカニズムへの参加によって損をしない，ということを述べている．

匿名操作不可能性は，架空名義操作不可能性と参加制約を合わせた性質として，投票制度を扱った文献 3) において次のように定式化された．

定義 9（匿名操作不可能性）**.** 施設配置メカニズム f が匿名操作不可能であるとは，f が架空名義操作不可能性と参加制約を同時に満たすことである．

すなわち，匿名操作不可能なメカニズムにおいては，すべてのエージェントにとって，架空名義操作だけでなく，メカニズムに参加しないことも戦略として選べる状況においても，ただ 1 つの名義のみを用いて自分の真の所在地を申告することが（弱）支配戦略となる．本節では，匿名操作不可能性と架空名義操作不可能性との関係について，以下の定理を示す．

定理 8. 匿名かつパレート効率的な施設配置問題において，メカニズムの架空名義操作不可能性と匿名操作不可能性とは等価である．

証明. 匿名操作不可能性の定義より，配置メカニズム f が匿名操作不可能であれば f が架空名義操作不可能性を満たすことは明らかである．定理を証明するためには，f が架空名義操作不可能性を満たすとき，f が同時に参加制約を満たすことを示せば十分である．

今，f が架空名義操作不可能性を満たすと仮定すると，定理 2 より，あるパラメータ α が存在し，エージェント数 n と申告の組 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して f は式 (4) で与えられる配置を出力する．このとき左右の対称性から，パラメータ α に関して $\alpha \leq x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ を仮定しても一般性を失わない．以下で，(i) $\alpha \leq x_1$ の場合，(ii) $x_1 < \alpha \leq x_2$ の場合，および (iii) $x_2 < \alpha$ の場合のそれぞれにおいて，f が参加制約を満たすことを示す．

まず (i) $\alpha \leq x_1$ の場合，メカニズムの出力は $f^n(x) = x_1$ である．このとき，エージェント 1 が参加しないことによってメカニズムの出力は $f^{n-1}(x_{-1}) = x_2$ と変化するが，エージェント 1 のコストは $|x_1 - x_1| \leq |x_1 - x_2|$ と非減少であり，エージェント 1 に関しては参加制約を満たす．他のエージェント i（$\neq 1$）についても，i が参加しないことによって得られる出力 $f^{n-1}(x_{-i})$ は $f^{n-1}(x_{-i}) = x_1$ となり，i が参加している場合の出力と同じである．よって，参加しないことでコストが真に減少するエージェントは存在せず，参加制約を満たす．

次に (ii) $x_1 < \alpha \leq x_2$ である場合，メカニズムの出力は $f^n(x) = \alpha$ である．このとき，エージェント 1 が参加しないことで，メカニズムの出力は $f^{n-1}(x_{-1}) = x_2$ と変化するが，エージェント 1 のコストは $|x_1 - \alpha| \leq |x_1 - x_2|$ と非減少であり，エージェント 1 に関して参加制約を満たす．他のエージェントに関しても，$\alpha < x_1$ の場合と同様に参加制約を満たす．

最後に，(iii) $x_2 < \alpha$ の場合を考える．このときの出力は $f^n(x) = \alpha$ であり，1 人のエージェントの不参加によって出力が変化する例は存在しない．よって参加制約を満たす．

以上より，f が架空名義操作不可能ならば，同時に参加制約を満たす．よって架空名義操作不可能性と匿名操作不可能性は等価となる． □

6. 結　論

本論文では，施設配置問題における架空名義操作不可能性を定式化し，架空名義操作不可能な配置メカニズムの特徴付けを与えた．また，この特徴付けを応用し，架空名義操作不可能な配置メカニズムが達成可能な近似率を解明した．さらに，従来提案されてきた類似の概念である人口単調性，結託的戦略的操作不可能性，および匿名操作不可能性との関係を解明した．

以下に今後の課題を述べる．本論文で与えた特徴付けは，メカニズムに対して非常に厳しい条件を提示するものであり，さらに 4 章で示した近似率は，社会的コストと最大コストのいずれにおいても，パレート効率性を仮定する範囲で最悪の値となっている．これらの結果は，決定性配置メカニズムにおける架空名義操作不可能性の達成の困難さを示している．この問題に対する 1 つの解決方法は，非決定性（確率的）配置メカニズムの設計である．たとえば文献 8) において，非決定性配置メカニズムを導入することで，最大コストの近似率が 3/2 となる戦略的操作不可能な配置メカニズムが設計されており，これは戦略的操作不可能な決定性配置メカニズムが達成可能な近似率 2 を更新している．架空名義操作不可能な配置メカニズムに関しても，同様に非決定性メカニズムを導入することで，達成可能な近似率の改善が期待できる．

謝辞　本研究の遂行にあたり，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究（A）（課題番号 20240015）および特別研究員奨励費の助成を受けました．ここに深く感謝いたします．また，非常に有益なコメントをくださった情報処理学会アルゴリズム研究会（SIGAL）の 2 名の査読者および第 9 回情報科学技術フォーラムの参加者に深く感謝いたします．

参　考　文　献

1) Chevaleyre, Y., Endriss, U., Lang, J. and Maudet, N.: A Short Introduction to Computational Social Choice, *Proc. 33rd Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science* (*SOFSEM*), pp.51–69 (2007).
2) Ching, S. and Thomson, W.: Population-Monotonic Solutions in Public Good Economies with Single- Peaked Preferences, RCER Working Papers 362, University of Rochester - Center for Economic Research (RCER) (1993).
3) Conitzer, V.: Anonymity-Proof Voting Rules, *Proc. 4th International Workshop on Internet and Network Economics* (*WINE*), pp.295–306 (2008).
4) Cramton, P., Shoham, Y. and Steinberg, R. (Eds.): *Combinatorial Auctions*, MIT Press (2005).
5) 栗田　治：施設配置モデル—配置問題と社会の公平さ，オペレーションズ・リサーチ, Vol.42, No.12, pp.782–784 (1997).
6) Moulin, H.: On strategy-proofness and single peakedness, *Public Choice*, Vol.35, No.4, pp.437–455 (1980).
7) Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E. and Vazirani, V.V. (Eds.): *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press (2007).
8) Procaccia, A.D. and Tennenholtz, M.: Approximate Mechanism Design Without Money, *Proc. 10th ACM Conference on Electronic Commerce* (*EC*), pp.177–186 (2009).
9) 坂井豊貴，藤中裕二，若山琢磨：メカニズムデザイン—資源配分制度の設計とインセンティブ，ミネルヴァ書房 (2008).
10) Schummer, J. and Vohra, R.V.: Mechanism Design without Money, *Algorithmic Game Theory*, Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E. and Vazirani, V.V. (Eds.), Cambridge University Press, chapter 10 (2007).
11) 東藤大樹，岩崎　敦，横尾　真，櫻井祐子：架空名義操作不可能な組合せオークションの割当規則の特性，電子情報通信学会論文誌，Vol.J92-D, No.11, pp.1890–1901 (2009).
12) 安田洋祐：学校選択制のデザイン—ゲーム理論アプローチ，NTT 出版 (2010).
13) 横尾　真，櫻井祐子，松原繁夫：架空名義入札に頑健な組合せオークションプロトコル，情報処理学会論文誌，Vol.43, No.6, pp.1814–1824 (2002).
14) Yokoo, M., Sakurai, Y. and Matsubara, S.: The Effect of False-name Bids in Combinatorial Auctions: New Fraud in Internet Auctions, *Games and Economic Behavior*, Vol.46, No.1, pp.174–188 (2004).

(平成 22 年 9 月 30 日受付)
(平成 23 年 1 月 14 日採録)

推　薦　文

本文では，施設配置問題について架空名義操作不可能性を実現する施設配置決定メカニズムの必要十分条件を示している．さらに，架空名義操作不可能なメカニズムが達成可能な近似率を調査し，タイトな上下界を示した．そして，施設配置問題における，架空名義操作不可能性と，人口単調性，結託的戦略的操作不可能性，匿名操作不可能性との関係をそれぞれ示している．「ゲーム理論的に不正ができないメカニズムを作る（不正をしても意味がない状況を作る）」という着眼点は非常に興味深い．施設配置問題は最近のアルゴリズム的ゲーム理論の分野でさかんに研究されている．その問題に対して架空名義操作不可能性に関する自明でない結果を出しており十分に新規性をもっていると判断した．

（FIT2010 第 9 回情報科学技術フォーラムプログラム委員長　村山優子）

東藤　大樹（学生会員）

2008 年 3 月九州大学工学部電気情報工学科単位取得退学．2010 年 3 月同大学大学院システム情報科学府修士課程修了．現在，同大学院システム情報科学府博士後期課程在籍中．2010 年 4 月より日本学術振興会特別研究員 DC1．アルゴリズム的ゲーム理論や計算論的社会選択理論，メカニズムデザインに関する研究に興味を持つ．人工知能学会学生会員．

岩崎　　敦（正会員）

2002 年神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了．同年より 2004 年まで NTT コミュニケーション科学基礎研究所に勤務．2004 年より九州大学大学院システム情報科学研究院助教．ゲーム理論，学習，オークション，実験経済学に関する研究に従事．博士（学術）．人工知能学会会員．

横尾　　真（正会員）

1984 年東京大学工学部電子工学科卒業．1986 年同大学院修士課程修了．同年 NTT に入社．1990〜1991 年ミシガン大学客員研究員．2004 年より九州大学大学院システム情報科学研究院教授．マルチエージェントシステム，制約充足問題に関する研究に従事．エージェントの合意形成メカニズム，制約充足/分散制約充足等に興味を持つ．博士（工学）．1992 年，2002 年人工知能学会論文賞，1995 年情報処理学会坂井記念特別賞，2004 年 ACM SIGART Autonomous Agent Research Award，2005 年ソフトウェア科学会論文賞，2006 年学士院学術奨励賞受賞，2009 年人工知能学会業績賞受賞．人工知能学会，電子情報通信学会，日本ソフトウェア科学会，AAAI 各会員．