論 文

直列型待ち行列による計算機システムの効率解析*

宮崎 正俊** 富田 真吾*** 野口 正一**** 大泉 充郎*****

Abstract

A tandem queueing model for performance analysis of multiprocessor systems which work under a multiprogramming environment is discussed. Assuming that all I/O requests are processed by the movable head disk storage devices, the channels of this system can be considered as two-stage tandem channels, that is, the first channels are the storage units and the second channels are the control units. Then, the systems are modeled by the use of the techniques of tandem queueing theory.

The model is represented as $M/M/S_1 \rightarrow M/S_2$ under the assumption that the service times at the central processing units (CPU's), the first channels and the second channels are exponentially distributed independent random variables, where S_1 and S_2 are number of the first and the second channels respectively. Furthermore, the model has features of a finite population $M/M/1/C$ and a finite waiting room $M/M/1(N)$, where C is number of CPU's and N is degree of multiprogramming.

A CPU productivity of multiprocessors ystems is defined with the equilibrium state pro bability. The numerical results of the CPU productivity in the case of $N \leqq S_1$ are shown.

1. はじめに

多重プログラミング・システムのシステム効率に関して，著者らは文献[1]において有限行列を用いて解析した．このモデルではプロセスから発生する入出力要求（I/O 要求）はすべて同じ種類のチャネル（入出力装置）で処理されるものと仮定している．現実の比較的規模の大きい計算機システムでは，I/O 要求の大部分が特定の2次記憶（たとえばドラム装置やディスク・ファイルなど）で処理される場合が多いので，チャネルを1種類と仮定してもシステムの基本的な構成に関する効率はある程度解析することができる．

現実のシステムにおいて，ここでいうチャネルとして最も一般的に想定できるのはディスク・ファイルであろう．この装置は後述するように，I/O 動作が時間的に分離した2つの動作に分けられ，装置の構成によってはI/O 要求の処理能力がみかけ上いくらか大きくなる場合がある．

上述した問題まで含めたシステムの効率を解析するには，ディスク・ファイルというチャネルを2段に分解し，直列型の待ち行列によってシステムを表現する必要がある[2]．本論文では多重プログラミングのもとで動作する多重プロセッサ・システムにおいて，I/O 動作がすべてディスク・ファイルで行われる場合を，2段直列型の有限行列でモデル化してシステムの効率を解析する[6]．**2.** では2段直列型のモデルを説明し，**3.** ではある条件のもとでこの待ち行列を解析する．**4.** では一般の場合の平衡方程式について考察する．

2. 直列型モデル

2.1 ディスク・ファイルの動作[2),3)]

ディスク・ファイルは一般に **Fig. 1**（次頁参照）に

---

* A Performance Analysis of Computer Systems by Tandem Queueing Model. by Masatoshi MIYAZAKI (Tohoku University Computer Center), Shingo TOMITA (Faculty of Engineering, Yamaguchi University), Shoichi NOGUCHI (Tohoku University Research Institute of Electrical Communication) and Juro OIZUMI (University of Electro-Communications).

** 東北大学大型計算機センター

*** 山口大学工学部電子工学科

**** 東北大学電気通信研究所

***** 電気通信大学

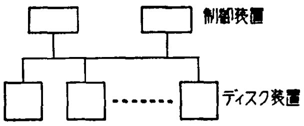

Fig. 1 A typical configuration of a disk storage.

示すように複数個のディスク装置と制御装置で構成されている．制御装置は通常1または2個であり，大規模なシステムでは図のような構成の装置が複数個で1つのシステムを構成している場合もある．

ディスク・ファイルにおける1つのI/O要求の処理は，シーク動作，回転待ち，移送動作の3つに分けられる．回転待ちと移送動作は時間的に連続したものであるから，これらを合わせて転送動作と呼ぶことにすると，前述のようにI/O動作はシーク動作と転送動作の2つになる．

シーク動作はディスク装置のみ占有し，転送動作は制御装置と情報の転送対象となるディスク装置の両方を占有する．あるディスク装置に対するI/O要求が到着すると，その装置が空いていればシーク動作が最初に行われる．このシーク動作が完了するとつぎに転送動作が行われるが，これは時間的に連続したものではない．I/O 要求が複数個あるときは可能な限りのシーク動作が並列に行われる．転送動作についても同様である．ただし，すべての制御装置が転送動作中のときは，新たに到着したI/O要求のシーク動作は，たとえディスク装置が空いていても制御装置のどれかが空くまでは開始されない．これは，制御装置がシーク動作の開始を制御する機能をもつからである．

2.2 直列型待ち行列モデル

以上のようにディスク・ファイルにおけるI/O要求の処理は，シーク動作と転送動作の2つの過程を経るわけであるから，いくつかの仮定を設ければこれは2段直列型の待ち行列として表現することができる．つまり，シーク動作の行われるディスク装置を第1窓口，転送動作の行われる制御装置を第2窓口とみなすことができる．以下，第1窓口を第1チャネル，第2窓口を第2チャネルと呼ぶことにする．Fig. 1のディスク・ファイルは以下の仮定のもとで **Fig. 2** のような待ち行列として表わせる．

（1） 他のディスク装置が空いている場合は，同一ディスク装置に対するI/O要求は複数個同時に発生しないものとする．この仮定はディスク装置のアロケーションの問題とも関連するものであり，情報を極力分散させるようにすれば，この仮定をある程度実現させることはそれ程困難ではないと予想される．

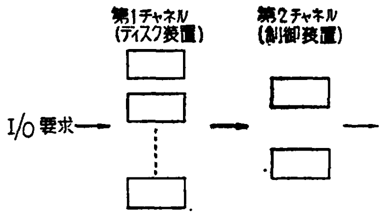

Fig. 2 A tandem queueing model of a disk storage.

（2） シーク動作が完了したディスク装置の転送処理を行う制御装置は任意に選ばれるものとする．つまり，その時点で空いている制御装置のいずれかが転送処理を担当する．

（3） **2.1** の終りで述べた制御装置がシーク動作の開始を一時的にブロックする現象は，その影響が小さいものとして無視する．

つぎに，Fig. 2の待ち行列を基本にして，多重プログラミング・システムのもとで動作する多重プロセッサ・システムの待ち行列モデルをつくる．多重プログラミングの多重度を N $(1\leqq N<\infty)$ とし，システムには常に N 個のプロセスが存在するものとする．プロセッサ (CPU) の個数を C $(1\leqq C\leqq N)$ とし，その処理能力はすべて同一とする．1つの CPU が動作中のとき，すなわち CPU を使える状態にあるプロセス (I/O 要求の完了待ちでないプロセス) を実行中のとき，この CPU から発生するI/O要求の間隔はパラメータ λ の指数分布に従うものとする．この λ をI/O発生率と呼ぶことにする．

一方，C 個の CPU のうち同時に動作している CPU の数を w $(1\leqq w\leqq C)$ とする．このときもしこれらの CPU が全く独立に動作するなら，その I/O 発生率は $w\lambda$ となる[4]．しかし一般には CPU 間に相互干渉やリソースの競合問題があるので，I/O 発生率は $w\lambda$ とはならない．このときのI/O要求の発生間隔はパラメータ $\varphi(w)$ の指数分布に従うものと仮定する．$\varphi(w)$ は $\varphi(1)=\lambda,\ \lambda\leqq\varphi(w)\leqq w\lambda$ の関係がある．

第1チャネルおよび第2チャネルの個数をそれぞれ S_1, S_2 とする．一般に $S_1\geqq S_2$ でなければならない．また，第2チャネルがすべて同時に動作できる可能性をもたなければならないので，$N\geqq S_2$ の条件が必要である．チャネルにおけるI/O要求の処理時間分布に関しては種々のものが考えられるが，ここでは以後の解

析を容易にするために，第1および第2チャネルともに指数分布に従うものと仮定し，そのパラメータをそれぞれ μ_1, μ_2 とする．

I/O 要求は第1チャネルと第2チャネルの両方で待ち行列をつくる．以下，第1チャネル側を第1系，第2チャネル側を第2系と呼ぶことにする．第1系で処理された I/O 要求はただちに第2系に入るものとする．第1系に存在する I/O 要求の個数を，処理中のものも含めて m とする．同様に第2系における個数を n とする．I/O 要求の個数は N を超えることはないので，$0 \leqq m+n \leqq N$ の関係が成立する．これは有限行列を意味する[1]．

m と n それぞれの範囲については以下のようになる．m は $n=0$ であっても第1系で待ち行列をつくれるので $0 \leqq m \leqq N$ となる．第1チャネルはそこで処理された I/O 要求が第2チャネルでの処理が完了するまでは，つぎの I/O 要求の処理を行うことができない．つまりその第1チャネルはブロック状態になる．従って，第1系ではサービスできる第1チャネルの個数は S_1-n となり，$S_1-n \geqq 0$ であるから結局 $n \leqq S_1$ となる．一方，$N \leqq S_1$ の場合は m と同様な条件が必要であるから，最終的に n は $0 \leqq n \leqq \min\{N, S_1\}$ となる．

以上の仮定と条件によってつくられる直列型の待ち行列モデルは **Fig. 3** のように表現できる．

3. モデルの解析（$N \leqq S_1$ の場合）

3.1 平衡状態確率

この節では Fig. 3 の待ち行列システムが平衡状態にあるときの平衡状態確率を求める．ただし，全部の条件を満たす平衡方程式の一般解を求めるのは困難なので，ここでは $N \leqq S_1$ の場合について考察する．

システムの平衡状態において，I/O 要求が第1系に m 個，第2系に n 個存在する平衡状態確率を $p_{m,n}$ で表わす．平衡状態は $0 \leqq m \leqq N, 0 \leqq n \leqq N, 0 \leqq m+n \leqq N$ を満足する m と n のすべての組み合わせとなり，

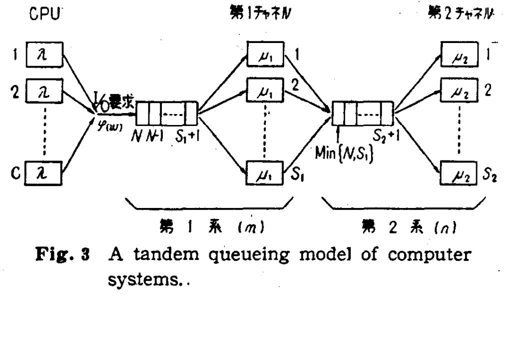

Fig. 3 A tandem queueing model of computer systems..

その個数は $(N+1)(N+2)/2$ である．平衡方程式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&-\varphi(C)p_{0,0}+\mu_2 p_{0,1}=0\\
&-(\varphi(a_1)+a_2\mu_1)p_{0,n}+a_3\mu_2 p_{0,n+1}+\mu_1 p_{1,n-1}=0,\\
&\qquad\qquad (m=0,\ 1\leqq n\leqq N-1)\\
&-s_2\mu_2 p_{0,N}+\mu_1 p_{1,N-1}=0, \qquad (m=0,\ n=N)\\
&-(\varphi(a_1)+m\mu_1)p_{m,0}+\mu_2 p_{m,1}+\varphi(a_4)p_{m-1,0}=0,\\
&\qquad\qquad (1\leqq m\leqq N-1,\ n=0)\\
&-N\mu_1 p_{N,0}+\varphi(1)p_{N-1,0}=0, \qquad (m=N,\ n=0)\\
&-(\varphi(a_1)+m\mu_1+a_2\mu_2)p_{m,n}+a_3\mu_2 p_{m,n+1}\\
&\quad +(m+1)\mu_1 p_{m+1,n-1}+\varphi(a_4)p_{m-1,n}=0,\\
&\qquad\qquad (m\doteqdot 0,\ n\doteqdot 0,\ m+n\leqq N-1)\\
&-(m\mu_1+a_2\mu_2)p_{m,n}+(m+1)\mu_1 p_{m+1,n-1}\\
&\quad +\varphi(1)p_{m-1,n}=0, \quad (m\doteqdot 0,\ n\doteqdot 0,\ m+n=N).
\end{aligned} \tag{1}
$$

ただし，$a_1 \sim a_4$ は

$$
\begin{aligned}
a_1&=\begin{cases} C, & (1\leqq m+n\leqq N-C)\\ N-(m+n), & (N-C<m+n\leqq N-1)\end{cases}\\
a_2&=\begin{cases} n, & (1\leqq n<s_2)\\ S_2, & (S_2\leqq n\leqq N-1)\end{cases}\\
a_3&=\begin{cases} n+1, & (1\leqq n<S_2)\\ S_2, & (S_2\leqq n\leqq N-1)\end{cases}\\
a_4&=\begin{cases} C, & (1\leqq m+n\leqq N-C)\\ N-(m+n)+1, & (N-C<m+n\leqq N-1)\end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

の値をとる．また，正則条件として次式が成立する．

$$\sum_{0\leqq m+n\leqq N} p_{m,n}=1. \tag{3}$$

（1）式から $p_{m,n}$ の一般形を求めるために，$p_{m,n}$ を

$$p_{m,n}=A_m B_n Z_{m+n}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^m\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^n p_{0,0} \tag{4}$$

のように表現する．ただし，$A_0=1$, $B_0=1$, $Z_0=1$ とし，$C=1$ においては $Z_{m+n}=1$ であるものとする．

最初に $C=1$ として A_m と B_n の一般形を求める．$n=0$, $1\leqq m\leqq N$ の場合について考えると，（1）式と（4）式から次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&-\varphi(1)+B_1=0\\
&-(\varphi(1)+\mu_1)A_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)+A_1B_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)+\varphi(1)=0\\
&-(\varphi(1)+2\mu_1)A_2\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^2+A_2B_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^2+\varphi(1)A_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)\\
&\quad =0\\
&\qquad\vdots\\
&-(\varphi(1)+(N-1)\mu_1)A_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}
\end{aligned}
$$

$$+A_{N-1}B_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}+\varphi(1)A_{N-2}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}=0$$

$$-N\mu_1A_N\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N}+\varphi(1)A_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}=0. \qquad (5)$$

(5)式の最初の式から $B_1=\varphi(1)$ が求まる．これを用いると2番目以降の式から $A_m=\varphi(1)A_{m-1}/m$ の関係が求まる．したがって，A_m の一般形は

$$A_m=\frac{\varphi^m(1)}{m!},\ (0\leqq m\leqq N) \qquad (6)$$

となることが分かる．

つぎに，$m=0$, $1\leqq n\leqq N$ の場合を考えると次式が得られる．

$$-(\varphi(1)+\mu_2)B_1\left(\frac{1}{\mu_2}\right)+2\mu_2B_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2+A_1=0$$

$$-(\varphi(1)+2\mu_2)B_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2+3\mu_2B_3\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^3$$
$$+A_1B_1\left(\frac{1}{\mu_2}\right)=0$$

$$-(\varphi(1)+3\mu_2)B_3\left(\frac{1}{\mu^2}\right)^3+4\mu_2B_4\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^4$$
$$+A_1B_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2=0$$

$$\vdots$$

$$-(\varphi(1)+(S_2-2)\mu_2)B_{S_2-2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-2}$$
$$+(S_2-1)\mu_2B_{S_2-1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-1}+A_1B_{S_2-3}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-3}$$
$$=0$$

$$-(\varphi(1)+(S_2-1)\mu_2)B_{S_2-1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-1}$$
$$+S_2\mu_2B_{S_2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2}+A_1B_{S_2-2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-2}=0$$

$$-(\varphi(1)+S_2\mu_2)B_{S_2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2}+S_2\mu_2B_{S_2+1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2+1}$$
$$+A_1B_{S_2-1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2-1}=0$$

$$-(\varphi(1)+S_2\mu_2)B_{S_2+1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2+1}$$
$$+S_2\mu_2B_{S_2+2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2+2}+A_1B_{S_2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{S_2}=0$$

$$\vdots$$

$$-(\varphi(1)+S_2\mu_2)B_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{N-1}+S_2\mu_2B_N\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{N}$$
$$+A_1B_{N-2}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{N-2}=0$$

$$-S_2\mu_2B_N\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{N}+A_1B_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{N-1}=0. \qquad (7)$$

この式に $B_1=\varphi(1)$ および(6)式から求まる $A_1=\varphi(1)$ を代入して順に B_n を求めていくと，

$$B_n=\begin{cases}\dfrac{\varphi^n(1)}{n!},\ (0\leqq n\leqq S_2)\\[2ex] \dfrac{\varphi^n(1)}{S_2!\,S_2^{\,n-S_2}},\ (S_2<n\leqq N)\end{cases} \qquad (8)$$

のようになることが分かる．

(6)式の A_m と(8)式の B_n は，$C=1$ ならば(1)式における $m\neq0$, $n\neq0$, $m+n\leqq N-1$ および $m+n=N$ の場合にも成立することが容易に分かる．

つぎに，これら2つの式が $C\geqq2$ においても成立するものとして，Z_{m+n} の一般形を求める．$n=0$, $1\leqq m\leqq N$ の場合について考えると，(1)式と(6)式から次式が得られる．

$$-\varphi(C)+\varphi(1)Z_1=0$$

$$-(\varphi(C)+\mu_1)\varphi(1)Z_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)+\varphi^2(1)Z_2\left(\frac{1}{\mu_1}\right)+\varphi(C)=0$$

$$-(\varphi(C)+2\mu_1)\frac{\varphi^2(1)}{2}Z_2\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^2+\frac{\varphi^3(1)}{2}Z_3\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^2$$
$$+\varphi(C)\varphi(1)Z_1\left(\frac{1}{\mu_1}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$-(\varphi(C)+(N-C)\mu_1)\frac{\varphi^{N-C}(1)}{(N-C)!}Z_{N-C}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C}$$
$$+\frac{\varphi^{N-C+1}(1)}{(N-C)!}Z_{N-C+1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C}$$
$$+\varphi(C)\frac{\varphi^{N-C-1}(1)}{(N-C-1)!}Z_{N-C-1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C-1}=0$$

$$-(\varphi(C-1)+(N-C+1)\mu_1)\frac{\varphi^{N-C+1}(1)}{(N-C+1)!}$$
$$\times Z_{N-C+1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C+1}+\frac{\varphi^{N-C+1}(1)}{(N-C+1)!}Z_{N-C+2}$$
$$\times\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C+1}+\varphi(C)\frac{\varphi^{N-C}(1)}{(N-C)!}Z_{N-C}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C}=0$$

$$-(\varphi(C-2)+(N-C+2)\mu_1)\frac{\varphi^{N-C+2}(1)}{(N-C+2)!}Z_{N-C+2}$$
$$\times\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C+2}+\frac{\varphi^{N-C+2}(1)}{(N-C+2)!}Z_{N-C+3}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C+2}$$
$$+\varphi(C-1)\frac{\varphi^{N-C+1}(1)}{(N-C+1)!}Z_{N-C+1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-C+1}=0$$

$$\vdots$$

$$-(\varphi(1)+(N-1)\mu_1)\frac{\varphi^{N-1}(1)}{(N-1)!}Z_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}$$
$$+\frac{\varphi^{N}(1)}{(N-1)!}Z_N\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}+\varphi(2)\frac{1}{(N-2)!}Z_{N-2}$$

$$\times\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-2}=0$$

$$-N\mu_1\frac{\varphi^N(1)}{N!}Z_N\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^N+\varphi(1)\frac{\varphi^{N-1}(1)}{(N-1)!}$$

$$\times Z_{N-1}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{N-1}=0. \qquad (9)$$

この式の最初から順に Z_{m+n} の関係を求めていくとつぎのようになる．

$$Z_1=\frac{\varphi(C)}{\varphi(1)}$$

$$Z_2=\frac{\varphi(C)}{\varphi(1)}Z_1$$

$$\vdots$$

$$Z_{N-C}=\frac{\varphi(C)}{\varphi(1)}Z_{N-C-1}$$

$$Z_{N-C+1}=\frac{\varphi(C-1)}{\varphi(1)}Z_{N-C}$$

$$Z_{N-C+2}=\frac{\varphi(C-2)}{\varphi(1)}Z_{N-C+1}$$

$$\vdots$$

$$Z_{N-1}=\frac{\varphi(2)}{\varphi(1)}Z_{N-2}$$

$$Z_N=Z_{N-1}. \qquad (10)$$

$m=0$, $1\leqq n\leqq N$ の場合，$m\neq 0$, $n\neq 0$, $m+n\leqq N-1$ および $m+n=N$ の場合についても，(6)式および(8)式を用いて(10)式と同様な関係が得られる．したがって，Z_{m+n} の一般形は

$$Z_{m+n}=\begin{cases}\left(\dfrac{\varphi(C)}{\varphi(1)}\right)^{m+n}, & (0\leqq m+n\leqq N-C)\\ \dfrac{\varphi^{N-C}(C)\prod\limits_{k=N-m-n+1}^{C}\varphi(k)}{\varphi(1)^{m+n}}, & (N-C<m+n\leqq N)\end{cases} \qquad (11)$$

のようになることが分かる．また，(6)式および(8)式も一般的に成立することがいえる．

ここで，(6)式及び(8)式の分子は(11)式の分母で消去されるので，結局(4)式における A_m, B_n, Z_{m+n} は

$$A_m=\frac{1}{m!},\ (0\leqq m\leqq N),$$

$$B_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}, & (0\leqq n\leqq S_2)\\ \dfrac{1}{S_2!\,S_2^{n-S_2}}, & (S_2<n\leqq N),\end{cases}$$

$$Z_{m+n}=\begin{cases}\varphi^{m+n}(C), & (0\leqq m+n\leqq N-C)\\ \varphi^{N-C}(C)\prod\limits_{k=N-m-n+1}^{C}\varphi(k), & (N-C<m+n\leqq N)\end{cases} \qquad (12)$$

のようになる．

つぎに，$p_{0,0}$ を求める必要がある．これは(3)式の正則条件を用いると

$$p_{0,0}=\left\{\sum_{0\leqq m+n\leqq N}A_mB_nZ_{m+n}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^m\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^n\right\}^{-1} \qquad (13)$$

のように求まる．結局，$p_{m,n}$ は(4)，(12)，(13)式によって求めることができる．

3.2 システムの効率

2段直列型の待ち行列で表現できるシステムにおいても，その効率の定義は文献 1) と同様な考え方を用いる．系の平衡状態において動作している CPU の期待値を CPU 効率と定義し，これを α_T $(0<\alpha_T\leqq C)$ で表わす．系の状態つまり $m+n$ が $N-C$ 以下のときは C 個の CPU が動作でき，その確率は $\sum\limits_{0\leqq m+n\leqq N-C}p_{m,n}$ である．状態が $N-C+k(1\leqq k\leqq C)$ のときは $C-k$ 個の CPU が動作でき，その確率は $\sum\limits_{m+n=N-C+k}p_{m,n}$ である．したがって，CPU 効率 α_T は(3)式を用いると

$$\alpha_T=C-\sum_{N-C+1\leqq m+n\leqq N}(m+n+C-N)p_{m,n} \qquad (14)$$

のように表現できる．

3.3 $\varphi(w)=w\lambda$ の場合の $p_{m,n}$

$\varphi(w)$ が $w\lambda$ であるものと仮定したときの $p_{m,n}$ の一般形は(4)，(12)，(13)式よりつぎのようになる．

$$p_{m,n}=A_mB_nZ_{m+n}\rho^m{}_1\rho^n{}_2p_{0,0},$$

$$A_m=\frac{1}{m!},\ (0\leqq m\leqq N),$$

$$B_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}, & (0\leqq n\leqq S_2)\\ \dfrac{1}{S_2!\,S_2^{n-S_2}}, & (S_2<n\leqq N),\end{cases}$$

$$Z_{m+n}=\begin{cases}C^{m+n}, & (0\leqq m+n\leqq N-C)\\ \dfrac{C!\,C^{N-C}}{(N-m-n)!}, & (N-C<m+n\leqq N),\end{cases}$$

$$p_{0,0}=\{\sum_{0\leqq m+n\leqq N}A_mB_nZ_{m+n}\rho^m{}_1\rho^n{}_2\}^{-1},$$

$$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1},\ \rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}, \qquad (15)$$

3.4 モデルの評価

この節では，2段直列型の待ち行列でモデル化したシステムと実際のシステムとの適合性を検討し，本モ

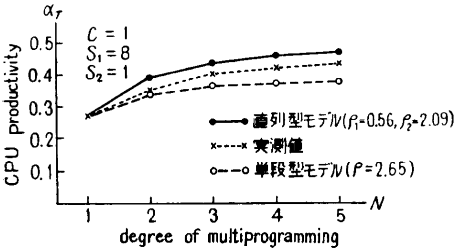

Fig. 4 A comparison between measured and caluculated data of CPU productivity.

デルの評価を行う. **Fig. 4** は東北大学大型計算機センターのシステム* の実測値とモデルの計算値を比較したものである. 実測には特定のプロセス群を用い, 計測システム[5] によって CPU 効率を求めた. この測定は $C=1$, $S_1=8$, $S_2=1$ として行い, 多重度が 1 の場合から (15) 式の計算に必要な $\rho_1=0.56$, $\rho_2=2.09$ を求めた.

図における実線は直列型モデルの計算値であり, 多重度が 2 以上のところではいずれも実測値よりいくらか大きくなっている. 考えられる主な理由は, モデルが適切でない, I/O の発生と処理の時間分布を指数分布で近似したことによる誤差, ディスク・フィイルのアロケーションが適切でない, の 3 つがあげられる. ところで, 図の破線は単段型モデル[1] の計算値であるが ($\rho=\rho_1+\rho_2=2.65$), いずれも実測値よりいくらか小さくなっている. したがって, 3 つの理由のうちアロケーションに問題があると考えるのが最も妥当であろう.

以上の考察により, この 2 段直列型の待ち行列モデルは, ディスク・ファイル中心型のシステムの解析に関して, CPU 効率の上限が得られるものとして現実のシステム設計に適用可能であると結論できる.

3.5 計算例

この節では (15) 式の数値例をいくつか示す. **Fig. 5～7** は CPU が 1 個の場合について, $\rho_1+\rho_2$, 多重度および第 2 チャネルの数が CPU 効率に与える影響を, ρ_1/ρ_2 を変化させて示したものである. Fig. 5 において, $\rho_1+\rho_2$ が 1 程度に小さければ, CPU 効率は ρ_1/ρ_2 の値の影響をあまり受けない. $\rho_1+\rho_2$ が大きい場合は, ρ_1/ρ_2 が小さいと (ρ_1 が ρ_2 よりかなり小さいと) CPU 効率は悪い. 逆に ρ_1/ρ_2 が大きければ, $\rho_1+\rho_2$ が比較的大きくても CPU 効率は 1 に近い値が得られる. この傾向は多重度が特に小さくない限り

* NEAC シリーズ 2200 モデル 700. オペレーティング・システムは MOD 7.

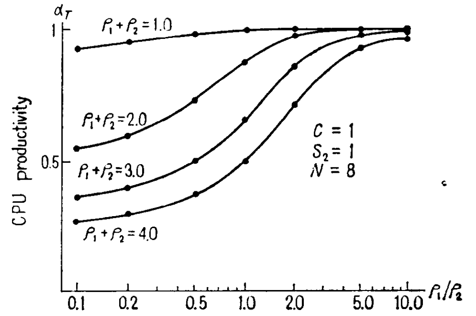

Fig. 5 Effect of $\rho_1+\rho_2$ upon CPU productivity.

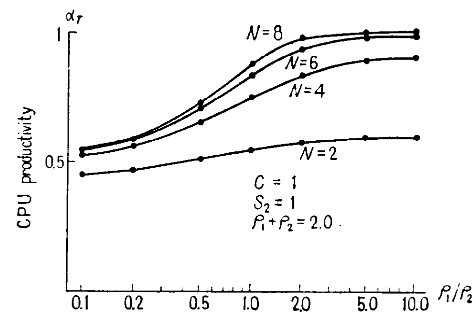

Fig. 6 Effect of degree of multiprogramming upon CPU productivity.

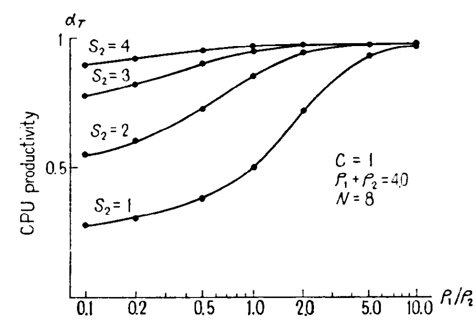

Fig. 7 Effect of number of 2nd channels upon CPU productivity.

他の図においても同様である.

Fig. 6 は多重度の影響を示したものであるが, この場合は多重度を 6 より大きくしてもあまり効果はない. また, 多重度が小さければ ρ_1/ρ_2 の影響は少ない. Fig. 7 は第 2 チャネル数の影響を示したものであり, ρ_1/ρ_2 が小さいときは第 2 チャネルを増加させると効果のあることが分かる.

Fig. 8 (次頁参照) は CPU 数と CPU 効率の関係を示したものである. この例では, ρ_1/ρ_2 が小さいと CPU は 2 個程度が限度であり, ρ_1/ρ_2 が大きい場合は CPU を増加させる効果はある. しかし, CPU の増加

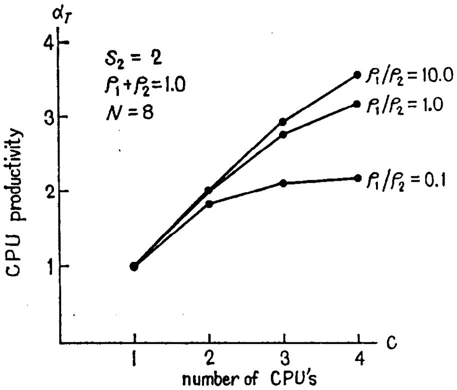

Fig. 8 A relation between number of CPU's and CPU productivity.

にともなって CPU の相互干渉や競合の影響が現われるので大きな効果は期待できない．

4. $N>S_1$ の場合の平衡方程式

ここでは，Fig. 3 の待ち行列システムにおいて，$N>S_1$ の場合の平衡方程式を考察する．$N>S_1$ では第2系の I/O 要求 n が S_1 個になったとき，第1系はブロックの状態になる．しかしこのときにも I/O 要求は第1系に到着する．また，第1系の I/O 要求 m のうち同時に処理される個数は S_1-n を超えることはない．これらの条件を考慮した平衡方程式はつぎのようになる．

$$
\begin{aligned}
&-\varphi(C)p_{0,0}+\mu_2 p_{0,1}=0\\
&-(\varphi(a_1)+a_2\mu_2)p_{0,n}+a_3\mu_2 p_{0,n+1}+\mu_1 p_{1,n-1}=0,\\
&\qquad\qquad (m=0,\ 1\leqq n\leqq S_1-1)\\
&-(\varphi(a_1)+S_2\mu_2)p_{0,S_1}+\mu_1 p_{1,S_1-1}=0,\\
&\qquad\qquad (m=0,\ n=S_1)\\
&-(\varphi(a_1)+a_5\mu_1)p_{m,0}+\mu_2 p_{m,1}+\varphi(a_4)p_{m-1,0}=0,\\
&\qquad\qquad (n=0,\ 1\leqq m\leqq N-1)\\
&-S_1\mu_1 p_{N,0}+\varphi(1)p_{N-1,0}=0,\qquad (n=0,\ m=N)\\
&-(\varphi(a_1)+a_6\mu_1+a_2\mu_2)p_{m,n}+a_3\mu_2 p_{m,n+1}\\
&\quad +a_7\mu_1 p_{m+1,n-1}+\varphi(a_4)p_{m-1,n}=0,\\
&\qquad\qquad (m\neq 0,\ n\neq 0,\ m+n\leqq N-1,\ n\leqq S_1-1)\\
&-(a_6\mu_1+a_2\mu_2)p_{m,n}+a_7\mu_1 p_{m+1,n-1}\\
&\quad +\varphi(1)p_{m-1,n}=0,\\
&\qquad\qquad (m\neq 0,\ n\neq 0,\ m+n=N,\ n\leqq S_1-1)\\
&-(\varphi(a_1)+S_2\mu_2)p_{m,S_1}+\mu_1 p_{m+1,S_1-1}\\
&\quad +\varphi(a_4)p_{m-1,S_1}=0,\\
&\qquad\qquad (m\neq 0,\ n=S_1,\ m+n\leqq N-1)\\
&-S_2\mu_2 p_{m,S_1}+\mu_1 p_{m+1,S_1-1}+\varphi(1)p_{m-1,S_1}=0\\
&\qquad\qquad (m+n=N,\ n=S_1).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

この式における $a_1\sim a_7$ はつぎの値をとる．

$$
\begin{aligned}
a_1&=\begin{cases}C, & (1\leqq m+n\leqq N-C)\\ N-(m+n), & (N-C<m+n\leqq N-1)\end{cases}\\
a_2&=\begin{cases}n, & (1\leqq n<S_2)\\ S_2, & (S_2\leqq n\leqq S_1)\end{cases}\\
a_3&=\begin{cases}n+1, & (1\leqq n<S_2)\\ S_2, & (S_2\leqq n\leqq S_1)\end{cases}\\
a_4&=\begin{cases}C, & (1\leqq m+n\leqq N-C)\\ N-(m+n)+1, & (N-C<m+n\leqq N-1)\end{cases}\\
a_5&=\begin{cases}m, & (1\leqq m\leqq S_1)\\ S_1, & (S_1<m\leqq N-1)\end{cases}\\
a_6&=\begin{cases}m, & (m<S_1-n)\\ S_1-n, & (S_1-n\leqq m)\end{cases}\\
a_7&=\begin{cases}m+1, & (m<S_1-n)\\ S_1-n+1, & (S_1-n\leqq m).\end{cases}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

上記の平衡方程式を解いて $p_{m,n}$ の一般形を得るのは困難である．したがって，$p_{m,n}$ を求めるには，(3) 式の正則条件を用いて(16)式から連立一次方程式をつくって解けばよい．

5. む す び

多重プログラミングのもとで動作する多重プロセッサ・システムにおいて，処理するプロセスの入出力処理がすべてディスク・ファイルで行われると仮定したとき，このシステムは2段直列型の待ち行列でモデル化することができ，その解析結果は特定の場合ではあるが実際のシステムの実測値とほぼ一致することを確認した．また，この実測値が直列型と単段型の解析結果の中間の値をとることは，これら2つのモデルによりシステム効率の上限と下限が求まることを示すものである．

最近の大規模な計算機システムの構成では，一般に第1チャネル（ディスク装置）の数は多重度より多くなっている．したがって，通常は(4)，(12)，(13)式あるいは(15)式を用いて解析すればよい．仮りに多重度が第1チャネル数より大きい場合でも，システム効率の上限を推定するのには，これらの式を用いるのも1つの方法である．また，Fig. 1 の構成のようなディスク・ファイルを複数個もつシステムにおいても，それらが1つの構成になっているものとしてシステム効率を推定することは可能である．

モニタのオーバーヘッドについては，文献 1) と同様な考察を行えばよい．コスト・パフォーマンスについては，CPU と多重度を増加させるための主記憶の他に，その要因として第1チャネルおよび第2チャネ

ル(制御装置)の個数も考慮する必要がある．このときは，(16)式の平衡方程式を解いて，第1チャネル数のシステム効率に与える影響を調べなければならない．

最後に，ディスク・ファイルの実際の入出力動作は単純な直列型待ち行列モデルでは表現できない部分もあり，今後はこれをより正確に表現できるようモデルの改善を検討したいと考えている．

謝辞 本研究において，実際のシステムの計測と種々の議論をしていただいた東北大学大型計算機センターの松沢茂，小畑征二郎の両氏に深謝する．

参 考 文 献

1) 宮崎，富田，野口，大泉：多重プログラミング・システムの効率について，情報処理，Vol. 16, No. 12, pp. 1040～1047 (1975).
2) J. Abate, H. Dubner, S. B. Weinberg : Queueing Analysis of the IBM 2314 Disk Storage Facility, J. of ACM, Vol. 15, pp. 577～589 (1968).
3) P. Denning : Effects of Scheduling on File Memory Operations, SJCC, Vol. 30. pp. 9～21 (1967).
4) 鈴木武次：待ち行列，裳華房（昭 47）.
5) 松沢，小畑，宮崎，青山，菊池：ソフトウェアによるシステム評価のための計測について，情報処理学会第 14 回大会 (1973).
6) 宮崎，富田，野口，大泉：多重プロセッサのシステム効率に関する一考察，情報処理学会第 15 回大会 (1974).

(昭和 50 年 5 月 22 日受付)
(昭和 51 年 7 月 14 日再受付)