



Variation Diminishing Spline 関数の knots の決定法について*

塚 越 清**

Abstract

This paper is intended to describe four algorithms determining the knots for the variation diminishing spline function which have the shape-preserving properties. These algorithms are deduced from error estimates to the variation diminishing spline approximation methods. Our error estimates show an improvement in the rate of convergence.

As an example of the application, we use the variation diminishing spline for the purpose of data reduction to electrocardiogram data.

1. はじめに

関数近似問題において最初に考えなければならないことは、被近似関数の空間、近似関数の空間および誤差の尺度の設定である。ここで誤差の尺度の設定とは被近似関数のどんな性質を近似的に保存すべきであるかを定めるものである。

このような尺度の設定に関しては、過去 100 年間の近似論研究の中では、次の 3 種類に大別されるように思われる。第 1 種は、誤差の尺度として誤差関数のノルム（一様ノルム、 L_1 ノルム等）をとり、このノルムの観点からみた近似関数の性質が被近似関数のそれに類似していることを要請するものである。第 2 種は、被近似関数からいくつかの標本点を抽出し、これらの点に対して最も“滑らかな”関数をあてはめようというものである。第 3 種は、被近似関数のグラフに着目し、このグラフの“形”をなるべく保つ近似関数を求めようというものである。

第 1 種、第 2 種のは早くから多くの学者によって研究され、現在かなりの成果を収めているが、第 3 種のは比較的新しく、しかも前二者に比べ、報告

された文献の数もはるかに少ないのが現状である。

第 3 種のもの、すなわち shape-preserving な近似問題の研究は、I. J. Schoenberg⁷⁾ によって始められ、M. Marsden and I. J. Schoenberg⁸⁾, I. J. Schoenberg⁹⁾, M. Marsden⁹⁾, D. Leviatan⁴⁾ によって進められた。ここでは“形を保つ”という言葉が variation diminishing という術語によって明確にされ、variation diminishing operator によって得られた近似関数の重要な性質がいくつか発見されている。しかし、数値計算の観点からこのような近似関数を実際に作ることは、いくつかの問題点がある。例えば近似関数の空間として spline 関数の空間をとったとき、その knots をどのようにしてとるかは重大である。等間隔にとったのでは期待した形の保存がきわめて不十分なことがしばしばある。作成者の期待どおりに形が保存されるためにはこの knots の決め方を工夫しなければならないが、このような問題点については、前記の文献をはじめ今までに報告された variation diminishing spline (以下 V. D. spline と略す) の文献の中には述べられていないように思われる。

この shape-preserving な spline 関数近似の応用分野としては時系列データの傾向線への応用などが考えられる。時系列データの傾向線を求める問題としては例えば経済現象では、循環変動、季節変動を抜いた調整済みのデータに対し、回帰モデルを用いて、直線、成長曲線その他の曲線をあてはめている。しかし、回

* On some algorithms determining the knots for Variation Diminishing Spline function by Kiyoshi TSUKAKOSHI (Department of Management Science and Industrial Engineering, College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University)

** 青山学院大学大学院理工学研究科

帰モデルにおいては曲線をあてはめる前にあらかじめどのような曲線にするかを決定しなければならないがそのような合理的な決め方はまだ報告されていないように思われる。しかし、どの種の曲線を用いるかという問題を含めた傾向線を決定する問題は V. D. spline 関数の knots を決定する問題へ変換できる。何故ならば、傾向線を求めることにおいて問題となるのは、どの種の曲線を用いるかということが問題ではなく、形を保っている曲線を求めるということが問題となるからである。

また、心電図のデータも時系列データであると見なせるし、更に心電図データを縮小して保存する問題を考えると、心電図の形を保つ V. D. spline で knots ができるだけ少ないものを求める問題へ帰着されると思われる。

本論文においては、形を保存する V. D. spline 近似関数を実際に構成する際に、その knots の決め方について述べる (4., 5.). そして、この方法を心電図データを縮小しながら保存する問題に適用した応用例を述べる (6.). そのための準備として、2. で variation diminishing operator, 3. で variation diminishing spline について簡単に述べる。

2. Variation Diminishing Operator

2.1 Variation Diminishing Operator の定義

$I=[0, 1]$ の上で定義された実数値連続関数の全体を $C[0, 1]$ とし、 $f \in C[0, 1]$ および $\{x_i\}_{i=0}^n \subset I$ に対し、 $V(f(x_i))$ は $f(x_i)$ ($i=0, 1, \dots, n$) の符号変化の数とする (0 ときは無視する)。

閉区間 I の $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ なる有限分割 $\pi_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ の全体を Δ とし、任意の $f \in C[0, 1]$ の閉区間 I における符号変化の数を

$$V(f) = \sup_{\pi_n \in \Delta, \pi_n = \{x_i\}_{i=0}^n} V(f(x_i)) \quad (2.1)$$

によって定義する。

定義 2.1⁷⁾

$C[0, 1]$ から自分自身への operator L が次の性質を持つとき variation diminishing operator (以下 V. D. operator と略す) であるという。

- (i) $L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 L(f_1) + a_2 L(f_2)$,
- (ii) $L(1) = 1, L(x) = x, i. e. L(a + bx) = a + bx$,
- (iii) $V(L(f)) \leq V(f)$.

ここで、 a_1, a_2, a, b は任意の実定数とする。

この定義により、 L が V. D. operator であるならば任意の直線 $y = a + bx$ に対して

$$V(L(f(x) - a - bx)) \leq V(f(x) - a - bx) \quad (2.2)$$

となる。

2.2 Variation Diminishing Operator の性質

先に定義された V. D. operator L は I. J. Schoenberg⁷⁾ により単調性や凸性を保存するばかりではなく全変動をも減少させるという性質を持つ。

定理 2.1⁷⁾

V. D. operator の中で 2 次関数を再生するのは恒等写像のみである。

定理 2.2⁷⁾

関数 $\varphi(r) = V(f(x) - r)$ ($-\infty < r < \infty$) は $f \in C[0, 1]$ が有界変動である場合に限りて可積分であり、このとき全変動を $T(f)$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(f(x) - r) dr = T(f). \quad (2.3)$$

L が V. D. operator であるならば

$$T(L(f)) \leq T(f). \quad (2.4)$$

2.3 誤差評価

V. D. operator によって得られた関数の例として、Bernstein 多項式や、本論文の 3. 以下であつかう V. D. spline があるが、この場合の operator は positive linear operator にもなっている。そこで、V. D. operator について positive linear operator の観点から誤差評価の考察を行う。

R. A. Devore³⁾ によれば positive linear operator の誤差評価は次のようになる。

定理 2.3³⁾

$\{L_n\}$ を $C[a, b]$ から $C[c, d]$, ($[c, d] \subseteq [a, b]$) への positive linear operator とし、

$$\alpha_n(x) = L_n((t-x)^2, x) \quad c \leq x \leq d \quad (2.5)$$

とおく。このとき、 $f \in C[a, b]$, $x \in [c, d]$ であるならば、

$$\begin{aligned} & |L_n(f, x) - f(x)| \\ & \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n(e_0, x)| \\ & \quad + (L_n(e_0, x) + (L_n(e_0, x))^{1/2}) \omega(f; \alpha_n(x)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

$f' \in C[a, b]$, $x \in [c, d]$ であるならば

$$\begin{aligned} & |L_n(f, x) - f(x)| \\ & \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n(e_0, x)| \\ & \quad + |f'(x)| |L_n((t-x), x)| \\ & \quad + (1 + (L_n(e_0, x))^{1/2}) \alpha_n(x) \omega(f'; \alpha_n(x)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 $e_0(x) = 1$, $\omega(f; \alpha_n(x))$ は f の連続率とする。

3. Spline function

3.1 Spline 関数の定義

任意に与えられた閉区間 $[0, 1]$ の分割:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = 1 \quad (3.1)$$

(ただし, $x_i < x_{i+m}$) において, 次の性質 (式 (3.2), (3.3)) を持つ実数値関数 $S(x)$ を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ を knots に持つ order m , または $m-1$ 次の spline 関数という.

$$S(x) \in C^{m-2}[0, 1] \quad (3.2)$$

$S(x)$ は各区間: (x_i, x_{i+1}) ($i=1, 2, \dots, n$)

で高々 $m-1$ 次の多項式である. (3.3)

(ただし, 式 (3.2) が成り立つのは (3.1) の不等式が厳密のときである. knots の多重性を有するときは H. B. Curry and I. J. Schoenberg¹⁾ を参照.)

この spline 関数の空間を S_m , $m-1$ 次の多項式の空間を P_{m-1} で現わすと $P_{m-1} \subset S_m$ はあきらかである.

3.2 基底による表現

spline 関数は B-spline, truncated power function, cardinal spline による表現の 3 通りの表現方法があるが, ここでは B-spline による表現のみをあつかう.

整数 $m \geq 2$ に対し,

$$x_+^{m-1} = \begin{cases} x^{m-1} & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$M_m(x; t) = m(t-x)_+^{m-1}. \quad (3.5)$$

両端 x_0, x_n における重複度を m , すなわち $u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} = x_0, u_m = x_1, \dots, u_l = x_{n-1}, u_{l+1} = \dots = u_{l+m} = x_n$ ($l = m+n-2$) とし, 変数 t について $u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+m}$ 上の差分商を $M_{j,m}(x; u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+m})$ とおくと次の様に B-spline が定義される.

$$M_{j,m}(x) = M_{j,m}(x; u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+m}) \quad (j=0, 1, \dots, l). \quad (3.6)$$

このとき $S(x) \in S_m$ は,

$$S(x) = \sum_{j=0}^l C_j M_{j,m}(x) \quad (3.7)$$

と一意的に表現される¹⁾. すなわち $M_{j,m}(x)$ ($j=0, 1, \dots, l$) は S_m の一つの基底である.

3.3 Normalized B-spline

ここで, Normalized B-spline を次の式によって定義する.

$$N_{j,m}(x) = \frac{(u_{j+m} - u_j)}{m} M_{j,m}(x) \quad (j=0, 1, \dots, l). \quad (3.8)$$

truncated power function $m(t-x)_+^{m-1}$ の性質と $M_{j,m}(x)$ の定義により

$$N_{j,m}(x) \begin{cases} = 0 & \text{if } x \notin (u_j, u_{j+1}), \\ > 0 & \text{if } x \in (u_j, u_{j+1}). \end{cases} \quad (3.9)$$

また, p, q を $u_{p+m-1} < u_{q+1}$ であるような整数としたとき, 任意の複素数 z と $x \in [u_{p+m-1}, u_{q+1}]$ に対し次の関係式が成立する⁶⁾.

$$m(z-x)^{m-1} = \sum_{j=p}^q (u_{j+m} - u_j)(z - u_{j+1})(z - u_{j+2}) \dots \times (z - u_{j+m-1}) M_{j,m}(x). \quad (3.10)$$

この関係式の両辺を z について展開し, z の係数を比較すると,

$$\sum_{j=0}^l N_{j,m}(x) = 1, \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=0}^l \xi_{j,m} N_{j,m}(x) = x, \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=0}^l \xi_{j,m}^{(2)} N_{j,m}(x) = x^2 \quad (3.13)$$

となる. ただし, 各 $\xi_{j,m}, \xi_{j,m}^{(2)}$ は次のように定義される.

$$\xi_{j,m} = \frac{1}{m-1} (u_{j+1} + u_{j+2} + \dots + u_{j+m-1}), \quad (3.14)$$

$$\xi_{j,m}^{(2)} = \frac{1}{\binom{m-1}{2}} \sum_{j+1 \leq r < s \leq j+m-1} u_r u_s. \quad (3.15)$$

3.4 Variation Diminishing Spline

$N_{j,m}(x)$ と $\xi_{j,m}$ ($0 \leq j \leq l$) は (3.8), (3.14) で定義されたものとする. このとき,

$$0 = \xi_{0,m} < \xi_{1,m} < \dots < \xi_{l,m} = 1 \quad (3.16)$$

である. ここで,

$$S(x) = S(x; f) = \sum_{j=0}^l f(\xi_{j,m}) N_{j,m}(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.17)$$

で定義される $f \in C[0, 1]$ に対する spline 近似関数を考える. ここで, nodes $\xi_{j,m}$ と $N_{j,m}(x)$ は order m と knots $\{x_i\}_{i=0}^n$ によって決定される. しかも,

$$S(x; f) \in C[0, 1], \quad (3.18)$$

$$S(x; 1) = 1, \quad S(x; x) = x. \quad (3.19)$$

また, M. Marsden and I. J. Schoenberg⁵⁾ より V. D. operator の性質 (iii):

$$V(S(x; f)) \leq V(f(\xi_{j,m})) \leq V(f, m) \quad (3.20)$$

が成立する. 従って, $f \in C[0, 1]$ に spline 関数近似 $S(x; f)$ を対応させる operator は $C[0, 1]$ から自分自身への V. D. operator である.

このような $S(x; f)$ を V. D. spline 関数と呼ぶ.

4. 誤差評価

4.1 従来の誤差評価式

3. で見たように V. D. spline は形を保つ近似になっているが、一方では関数値も近似する。\$S(x)\$ を式 (3.17) で定義された V. D. spline とし、\$f(x)\$ を閉区間 \$[0, 1]\$ 上で定義された実数値連続関数とすると

$$|f(x) - S(x; f)| \leq \rho \text{ for all } x \in [0, 1]$$

となる正数 \$\rho\$ を求めることができる。このような誤差評価式としては、次のようなものがある。

定理 4.1⁵⁾

\$f \in C[0, 1], \omega(f; \delta)\$ は区間幅 \$\delta\$ に関する \$f\$ の連続率、\$S(x; f)\$ は

$$\underbrace{0, \dots, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1, \dots, 1}_{m \text{ 個}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ 個}}$$

を knots にもつ order \$m\$ の V. D. spline とする。

このとき、(i) \$2 < m \leq n+2\$ ならば

$$|f(x) - S(x; f)| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{m}{12}}\right) \omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \text{ for all } x \in [0, 1], \quad (4.1)$$

(ii) \$m > n+2\$ ならば

$$|f(x) - S(x; f)| \leq \left\{1 + \sqrt{\frac{1}{m-2} \left(\frac{m-1}{4} - \frac{1}{6} \left(n - \frac{1}{n}\right)\right)}\right\} \times \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m-1}}\right) \text{ for all } x \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

定理 4.2⁹⁾

\$f(x), \omega(f; \delta)\$ は定理 4.1 と同様とし、\$S(x; f)\$ は
 \$0 = x_{-m+1} = x_{-m+2} = \dots = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n\$
 \$= x_{n+1} = \dots = x_{n+m-1} = 1\$

を knots にもつ V. D. spline とし、

$$\alpha^2 = \max_{-m+1 \leq i \leq n-1} (x_{i+m-1} - x_i)^2 / (m-1) \quad (4.3)$$

とすると

$$|f(x) - S(x; f)| \leq 2\omega(f; \alpha) \text{ for all } x \in [0, 1]. \quad (4.4)$$

ところで、knots を等間隔にとるのは必ずしも得策ではないから、定理 4.1 は我々の目的にとってはあまり効果を発揮しない。さらに、式 (4.4) の \$\omega(f; \alpha)\$ は関数によって比較的大きくなることがしばしばあるので、誤差評価式としてはやはり十分とはいえない。

そこで、もう少し鋭い誤差評価式を作ることが望まれる。

4.2 新しい誤差評価式

すべての関数 \$f \in C[0, 1]\$ は折れ線関数によっていくらでも高精度に近似できるから、はじめから与えられた \$f \in C[0, 1]\$ は折れ線関数：

$$f(t) = \sum_{i=0}^r f(t_i) N_{i,1}(t) \quad t \in [0, 1], \quad (4.5)$$

ただし、\$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = 1\$、

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} (t-t_{i-1}) / (t_i-t_{i-1}) & \text{if } t \leq t_i, \\ (t_{i+1}-t) / (t_{i+1}-t_i) & \text{if } t_i \leq t \end{cases}$$

であると考えられる。もちろんこの場合 knots \$\{t_i\}_{i=0}^r\$ の個数は大きくなっているが、我々の V. D. spline はこの knots をそのまま使う訳ではない、knots の個数の減少法をも含めて、我々の誤差評価式は次のとおりである。

定理 4.3

\$f(x)\$ は式 (4.5) によって与えられ、\$\nu\$ は自然数とし、\$x_0, x_1, \dots, x_n\$ は次のように定められるとする。

$$\delta = \max\{t_{i+1} - t_i : i=0, 1, \dots, r-1\}, \quad (4.6)$$

$$x_0 = t_0, \\ \vdots$$

$$x_j = \max\{t_k : x_{j-1} < t \leq t_k, |f(t) - f(x_{j-1})| \leq \nu \omega(f; \delta)\} \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

(ただし、\$n\$ は式 (4.7) が意味を持つ最大の \$j\$ である。)

さらに \$S(x; f)\$ は定理 4.2 と同様な V. D. spline とする。このとき、

$$|f(x) - S(x; f)| \leq (m-1)\nu \omega(f; \delta) \text{ for all } x \in [0, 1] \quad (4.8)$$

となる。

証明

$$\begin{aligned} & |f(x) - S(x; f)| \\ &= \left| \sum_{j=0}^l f(x) N_{j,m}(x) - \sum_{j=0}^l f(\xi_{j,m}) N_{j,m}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^l |f(x) - f(\xi_{j,m})| N_{j,m}(x). \end{aligned}$$

いま、\$x_j \leq x \leq x_{j+1}\$ とすると \$i = j - m + 1, j - m + 2, \dots, j\$ に対してのみ \$N_{i,m}(x)\$ は恒等的には 0 でなく、

$$x_{i+1} \leq \xi_{i,m} \leq x_{i+m-1} \quad i = j - m + 1, j - m + 2, \dots, j$$

であるから、\$i = j - m + 1\$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi_{j-m+1,m})| &\leq |f(x_{j-m+2}) - f(x_{j-m+3})| \\ &\quad + |f(x_{j-m+3}) - f(x_{j-m+4})| \\ &\quad + |f(x_j) - f(x_{j+1})| \\ &\leq (m-1)\nu \omega(f; \delta). \end{aligned}$$

同様にして、

$$|f(x) - f(\xi_{j,m})| \leq (m-1)\nu \omega(f; \delta)$$

$$i = j - m + 1, \dots, j.$$

従って,

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x; f)| &\leq (m-1)\nu\omega(f; \delta) \sum_{j=0}^i N_{j,m}(x) \\ &= (m-1)\nu\omega(f; \delta). \end{aligned}$$

Q. E. D.

4.3 Knots 決定への指針

δ を式 (4.6) のように決めるとき, $\omega(f; \delta)$ は式 (4.4) の $\omega(f; \alpha)$ に比較してはるかに小さいのが普通であるし, また常に小さい.

そして, m, ν が与えられたとき, $(m-1)\nu\omega(f; \delta)$ は $2\omega(f; \alpha)$ に比べて容易に評価できるから, 評価式 (4.8) は評価式 (4.4) より豊かな情報をもっていることになる. さらに式 (4.7) は多量の knots $\{t_i\}_{i=0}^r$ から少量の knots $\{x_i\}_{i=0}^n$ を抽出する明確な方法を与えており, これとその変形が knots $\{x_i\}_{i=0}^n$ を定める有効な手がかりを与える.

5. Knots の決定法

5.1 Knots を決定するための従来の方法

knots を決定する以前に, 考察中の spline に特別な性質を仮定することなしに, knots を逐次決定していく方法としては Powell⁹⁾, 市田他¹⁰⁾等の方法がある.

そして, これらの方法では区間の初期値を与え, その初期値に対して“傾向”(trend)を計算し, この傾向のある, なしにより区間を徐々に縮小, 拡大してゆくことにより knots を逐次決定してゆく heuristic な方法を用いている. また, 吉本他¹¹⁾では先の傾向と2次微分推定値を用い赤池の統計量を判定基準として, これを最小にするような heuristic な方法を取っている. しかし, このような方法は V. D. spline の knots を決定するという我々の目的には不向きなように思われる.

5.2 V. D. spline のための knots 決定のアルゴリズム

knots の数の増加にともない V. D. spline の形も被近似関数に近づき, 誤差も減少することは確かである. しかし, 定理 4.3 の観点からみれば同じ数の knots を用いるときには, knots を等間隔に配置するよりも, 何らかの情報を用いて隣合う knots の上での関数値の変動が到る所でほぼ均等になるような knots の決定を行うことの方が賢明である.

そこで, 我々は定理 4.3 に基づく knots の数と位置

を決定するアルゴリズムをいくつか作製した.

i) アルゴリズム I

$f(x)$ は式 (4.5) によって与えられるとし, ν は自然数, knots $\{x_i\}_{i=0}^n$ は次のようにして定める.

$$\delta = \max \{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1, 2, \dots, r-1\}$$

としたとき,

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0, \\ &\vdots \\ x_j &= \max \{t_k : x_{j-1} < t_k \leq t_k, \\ &|f(t) - f(x_{j-1})| \leq \nu\omega(f; \delta)\} \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

ただし, n は x_j が意味を持つ最大の j であるとする.

このアルゴリズムは $\max \{|f(t_{i+1}) - f(t_i)| : i = 0, 1, \dots, r-1\}$ が $\max_{t_j \in \{t_i\}_{i=0}^r} f(t_j) - \min_{t_i \in \{t_i\}_{i=0}^r} f(t_i)$ に比べて非常に小さいときは過剰に knots を取ることになるため, $\omega(f; \delta)$ を ν 倍することにより knots の数を調節する.

ii) アルゴリズム II

アルゴリズム I では変動の大きい所では knots の配置がなされるが, 変動が $\nu\omega(f; \delta)$ に満たない所では変動が無視され knots の配置が行われなくなることになる.

従って, その形の保存されにくいことになる. そこで正, 負変動を用いて次のように修正する.

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0, \\ V_{i,k^+} &= f(t_i), f(t_{i+1}), \dots, f(t_k) \text{ の正変動,} \\ V_{i,k^-} &= f(t_i), f(t_{i+1}), \dots, f(t_k) \text{ の負変動,} \\ X_j &= \{t_k : x_{j-1} = t_i < t_k \leq t_r, V_{i,k^+} \leq \nu\omega(f; \delta) \\ &\text{かつ } V_{i,k^-} \leq \nu\omega(f; \delta)\}, \\ Y_j &= \{t_k : x_{j-1} = t_i < t_k \leq t_r, V_{i,k^+} > 0.8\nu\omega(f; \delta) \\ &\text{または } V_{i,k^-} > 0.8\nu\omega(f; \delta)\}, \\ x_j &= \begin{cases} \min(X_j \cap Y_j) & \text{if } X_j \cap Y_j \neq \emptyset, \\ \max(X_j - Y_j) & \text{if } X_j \cap Y_j = \emptyset \end{cases} \\ & \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(n はアルゴリズム I と同様.)

iii) アルゴリズム III

もとの折れ線の各線分の長さを用いる方法である.

$$\lambda(f; \delta)^2 = \delta^2 + \omega(f; \delta)^2 \tag{5.2}$$

とし,

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0, \\ \lambda_{i,k^2} &= \sum_{p=i}^{k-1} \{(t_{p+1} - t_p)^2 + (f(t_{p+1}) - f(t_p))^2\}, \\ X\lambda_{i,k} &= \{t_k : x_{j-1} = t_i < t_k \leq t_r, \lambda_{i,k} \leq \nu\lambda(f; \delta)\}, \\ Y\lambda_{i,k} &= \{t_k : x_{j-1} = t_i < t_k \leq t_r, \lambda_{i,k} > 0.8\nu\lambda(f; \delta)\}, \end{aligned}$$

$$x_j = \begin{cases} \min(X\lambda_{i,k} \cap Y\lambda_{i,k}), & \text{if } X\lambda_{i,k} \cap Y\lambda_{i,k} \neq \phi, \\ \max(X\lambda_{i,k} - Y\lambda_{i,k}), & \text{if } X\lambda_{i,k} \cap Y\lambda_{i,k} = \phi, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

(n はアルゴリズム I 同様.)

iv) アルゴリズム IV

アルゴリズム I, II, III では, knots の個数は計算が終るまで見当がつかない. そこで, knots の数が大まかにではあるが把握できるように修正する.

$$S_k = \left\{ i : \frac{k-1}{N} \omega(f; \delta) \leq |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \frac{k}{N} \omega(f; \delta), 1 \leq i \leq r \right\} \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (5.4)$$

\bar{S}_k を集合 S_k の濃度とし,

$$\sum_{k=1}^p \bar{S}_k \geq \varepsilon r \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad 1 \leq p < N \quad (5.5)$$

となる最小の p を取り $p\omega(f; \delta)/N$ を用い,

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0, \\ &\vdots \\ x_j &= \min \{ t_k : x_{j-1} = t_i < t_k \leq t_r, \\ &|f(t_k) - f(t_i)| > p\omega(f; \delta)/N \} \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.6)$$

(n はアルゴリズム I と同様である) とする.

この結果 $(1-\varepsilon)r$ に近い数の knots が得られる.

アルゴリズム I と IV との違いは $1 \leq p$ に対し, $p/N < 1$ ということである. 従って, アルゴリズム I は $t_{i+1} - t_i$ が被近似関数の最小周期よりも十分小さいと

き, アルゴリズム IV は反対に $t_{i+1} - t_i$ が最小の周期と大差ないような場合に有効である.

6. 応用例

6.1 心電図およびその保存について

心電図データの圧縮保存は, 診断結果の確認, 自動計測, 診断論理の改良, 特殊研究などの目的のために必要が認められている. しかし, 記録紙, データレコーダによる保存は再現性, 処理の容易さ, 融通性等の面で問題があり, 連続的の時系列データは高精度デジタル量として画一的に保存することについては膨大な記憶媒体を必要とし, 検索に時間を要し, 冗長性が高くなる. そこで, 最小限必要な有効データの抽出方法が必要とされる. そこで心電図データの圧縮保存については, 現在のところ平滑後のデータを圧縮するという方法を用いているのがほとんどである. しかし, できうならば平滑化される以前のデータの圧縮保存が望まれるのは当然であろう. このような問題に対しては V. D. spline の形を保存するという性質は最も適しているように思われる.

6.2 Variation Diminishing Spline 関数による圧縮例

5. で述べたアルゴリズムを用いて平滑化される以前の心電図データに対して, データ圧縮を目的とした knots を決定して平滑化を行う. Fig. 1, 2 (次頁参照) においてはアナログデータからの標本値を “x” 印で

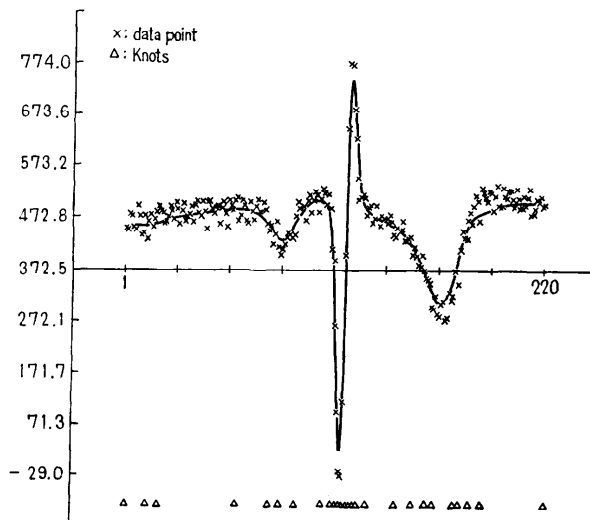


Fig. 1 Variation diminishing spline curve for 220 points data. (order 4)

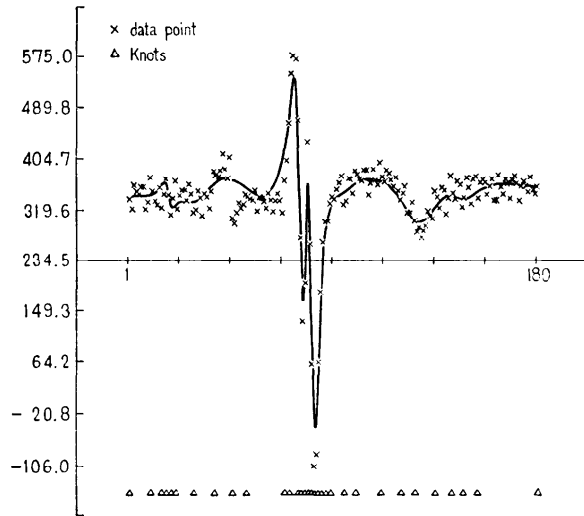


Fig. 2 Variation diminishing spline curve for 180 points data. (order 4)

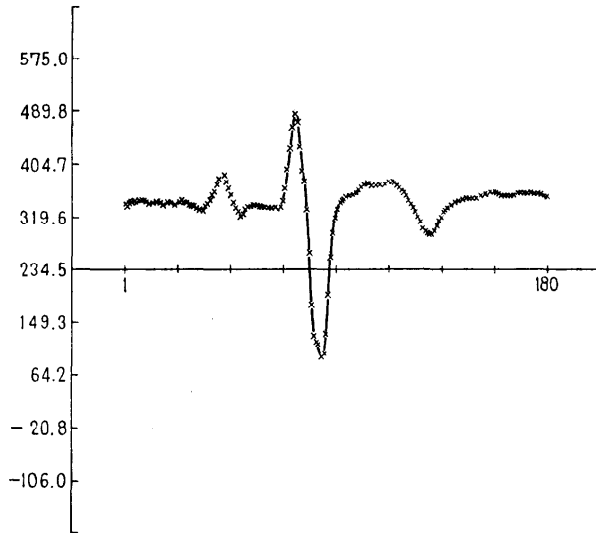


Fig. 3 Moving average curve (the same data as in Fig. 2)

示し、“ Δ ”印は我々のアルゴリズムによって得られた knots の時間軸における位置を示す。また Fig. 1, 2 では V.D. spline 曲線を実線を示す。ここで B-spline の計算は deBoor²⁾ の方法を用いた。(使用機種は IBM 1800, IBM 1627 Plotter である。)

実験 I (Fig. 1)

220 点からなる等間隔データに対してアルゴリズム IV ($\epsilon=0.9, N=20$ とした) により決定された knots を用いた order 4 の V.D. spline 曲線を示す。結果として knots は両端を除いて 27 個となった。また 220

点のデータに対して式(4.5)で与えられる $f(t)$ の連続率 $\omega(f; \theta)$ は 285 であるから誤差限界は 855 であるが、実際には最大誤差は $t=115$ において 70.2215 となった。

実験 II (Fig. 2, 3)

180 点からなる等間隔データに対し、アルゴリズム IV ($\epsilon=0.85, N=20$ とした) により決定された knots を用いた order 4 の V.D. spline 曲線がどの程度忠実に QRS 群の波形を表現できるかを Fig. 2 で示す。このときデータに対して式(4.5)により得られた折れ

線関数 $f(t)$ の連続率 $\omega(f; \delta)$ は 234 であるから誤差限界は 702 であるが最大誤差は $t=80$ で 67.0002 である。また, knots は両端を除いて 33 点である。

また Fig. 3 では, 移動平均法を用いて, 同じデータを平滑化したものである (ただし “×” 印は平滑化されたものを示し, 曲線はその点を結ぶ折れ線を示す)。Fig. 2, 3 の比較により V. D. spline の方が QRS 波形はるかに正確であることがわかる。

7. おわりに

本研究においては応用例として心電図データを用いたが, 心電図波形では QRS 波付近ではほとんど直線的であるので Q. R. S 点では被近似関数の連続条件のみでこれだけ peak が表現できたということはかなりの成果と思われる。

先の実験で, 我々は心電図データの特徴を全く加味していない。そこで, 心電図データの特徴を用いた knots の決定と我々のアルゴリズムとを併用することにより, よりよい圧縮率を持つ近似も可能ではないかと予測される。

我々の spline 関数においては, 両端以外の knots は重複させなかった。しかし, knots を多重させると心電図の PQ, QRS, ST・T の 3 区分点の認識も可能となり自動診断への有力な手がかりとなる情報が得られるのではないかとと思われるが, これについての研究は今後の課題である。

最後に本研究に対し, 御指導いただいた青山学院大学田口玄一教授, 馬渡鎮夫講師, データの収集に御協力いただいた東京電機大学 上野晴樹先生, また常に御注意, 御教示いただいた情報処理研修センター山内二郎先生に深く感謝いたします。

参 考 文 献

1) H. B. Curry & I. J. Schoenberg: On polya

frequency functions IV, The fundamental spline function and their limit, J. d'Anal. Math. Vol. 17, pp. 71~107 (1966).

- 2) C. deBoor: On calculating with B-splines, J. Approximation Theory, Vol. 6, pp. 50~62 (1972).
- 3) R. A. DeVore: The approximation of continuous functions by positive linear operators, Springer (1972).
- 4) D. Leviatan: On representation of the remainder in the variation diminishing spline approximation, J. Approximation Theory, Vol. 7, pp. 63~70 (1973).
- 5) M. Marsden & I. J. Schoenberg: On variation diminishing spline approximation methods, Mathematica (cluj) Vol. 8 (31), pp. 61~82 (1966).
- 6) M. Marsden: An identity for spline functions with application to variation diminishing spline approximation, J. Approximation Theory, Vol. 3, pp. 7~49 (1970).
- 7) I. J. Schoenberg: On variation diminishing approximation methods, "On numerical approximation" MRC Symposium (R. E. Langer, ed.), pp. 249~274. Univ. of Wisconsin Press Madison, (1959).
- 8) I. J. Schoenberg: On spline functions, "Inequalities" Symposium at Wright-Patterson Air Force Base (O. Shisha, ed.), pp. 255~291. Academic Press, New York (1967).
- 9) M. J. D. Powell: Curve fitting by splines in one variable, "Numerical approximation to functions and data", (J. G. Hayes, ed.), pp. 65~83, Anthlone Press, London (1970).
- 10) 市田浩三, 吉本富士市, 清野 武: 区分的 3 次関数を用いたワン・パス法によるデータ平滑化, 情報処理, Vol. 15, No. 6, pp. 414~418 (1974).
- 11) 吉本富士市, 市田浩三, 清野 武: 区分的 3 次関数を用いたデータ平滑化——節点の決定について——, 情報処理, Vol. 17, No. 3, pp. 200~206 (1976).

(昭和 51 年 6 月 10 日受付)