箱積みが最善引き分けの証明

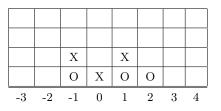
山 口 慶 晃^{†1} 山 口 和 紀[†] 田 中 哲 朗^{†1} 金 子 知 適[†];

1. はじめに

箱積みは $Connect4^1$)の盤面を無限大にしたゲームである。Connect4 では横 7 列、縦 6 行の盤面で、2 人のプレーヤが 1 個ずつ石を下から交互に置いていく。石は直下の升に石が置かれているか、最下行の升にしか置けない。パスは許されない。そして、先に縦または横または斜めのいずれかに 4 目以上並んだ方の勝ちというゲームである。1988 年、James Dow Allen と Victor Allis がそれぞれ独立に、Connect4 は最善を尽くせば、先手必勝であることを証明した。箱積みでは、石を箱と表現する。箱積みでは、縦、横ともに無限大の盤面の中で、箱を交互に置いていき、先に縦または横または斜めに 4 目以上並べた方の勝ちとなる 1)。箱積みで先手にも、後手にも絶対に負けない戦略がある。最善引き分けをその意味で使う。

2. ル - ル

箱積みは地面から順に箱を置いていく。図1のように、地面は二重線で表す。本稿では先手の箱をX、後手の箱をOと表記する。初手Xが置かれた列をO列とし、O列から右の列



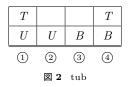


図 1 X の手番です。

この局面を勝利に結びつけることが出来ますか?

3. 箱積みが最善引き分けの証明

X も 〇 も絶対に負けない戦略が存在することを示すことで、箱積みが最善引き分けであることを示す。最初に証明に必要な用語と置き方の定義をする。

定義 1 X または O が自分の箱を縦または横または斜めのいずれかに 4 目以上並べたことを Connect 4 と呼ぶ。

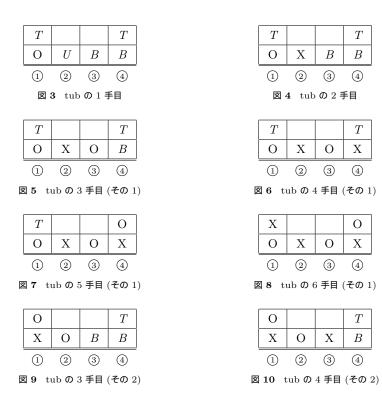
「はじめに」で述べたゲームも Connect4 とする。

定義 2 相手の箱が置かれた次の手で、その箱の上に自分の箱を置くことを $follow\ up\$ と呼ぶ $^{1)}$ 。

定義 3 図 2 の升の T、U、B が記された 6 升を tub と呼ぶ。tub は図 2 のように、常に地面の上に置かれている。tub の中に次の補題 1 の証明で示す手順に沿って置くことを、 ① 列 \sim ④ 列で draw tub すると呼ぶ。

補題 1 図 2 で tub の中に OXOXOX と交互に置いていった時、X が適切に対応すれば、tub の同じアルファベットがついた 2 升に X は O と 1 個ずつ置くことが出来る。逆に

 $[\]dagger 1$ the University of Tokyo



XOXOXO と置いていった場合も O が適切に対応すれば、同じアルファベットがついた 2 升に O は X と 1 個ずつ置くことが出来る。

証明 以下に進行の例を図に示す。tub の左右の対称性により、O がこの tub の中で、最初に置くのが U のどちらかだとしても一般性を失わない (図 3)。 X はもう 1 つの U に置く (図 4)。次に、O が tub の中で置くとすれば、B のどちらかか ③ であるが、B の一方に置くとする (図 5)。 すると、X は B のもう一方に置く (図 6)。次に、O が T のどちらかに置く (図 7)。

最後に、X はもう一方の T に置く (図 8)。図 8 には、同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている。

今度は、tub の 3 手目で O が ① に置いた場合を証明する (図 9)。 これに対して、X は ③ に置く (図 10)。次に、O は ④ に置くしかない (図 11)。 最後に、X は ④ に置く (図

О			T
X	О	X	О
1	2	3	4

図 11 tub の 5 手目 (その 2)

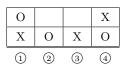
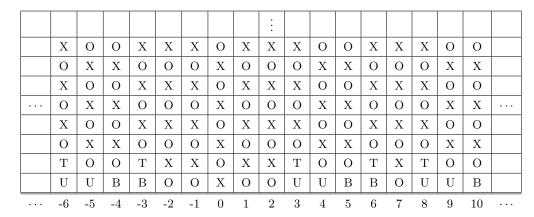


図 12 tub の 6 手目 (その 2)



▼ 13 X-board

12)。図 12 にも、同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている。以上から、tub の同じアルファベットがついた 2 升に、X は O と 1 個ずつ置くことが出来る。tub の中に、XOXOXO と置いていった場合も同様に、O が適切に対応すれば、tub の同じアルファベットがついた 2 升に、O は X と 1 個ずつ置くことが出来る。 \square

定理 1 n を非負整数とする。X は初手を置いた後は 3+5n 列~6+5n 列及び、-3-5n 列~-6-5n 列で draw tub U、それ以外は follow up すれば、決着が着くことなく、箱積 みは無限に続く。このように置いていき、盤面が全て埋め尽くされたものが図 13 である。図 13 を X-board と呼ぶ。

定義 4 定理 1 で示した戦略を X-method と呼ぶ。

定理 1 の証明は後で行う。X-board は 0 列を軸に線対称である。7 列から右は 2 列 \sim 6 列が繰り返し続いており、-7 列から左は -2 列 \sim -6 列が繰り返し続いている。盤面を無限に埋め尽くした局面は手順によらず、tub の中の X と 0 の並び順を除いて、一意に決まる。例えば、図 1 は初手から X0O1X1O-1X-1O2 と進んだ局面であるが、X0O-1X-1O1X1O2

О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	X	X	X	О	О	X	X	X	О
О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	X	X	X	О	О	X	X	X	О
О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	X	X	Т	О	О	Т	X	Т	О
О	X	О	О	U	U	В	В	О	U	U

図 14 Core77

と進んだ局面は、手順は違っても、局面は同じである。これは箱積みでは、箱は 1 度置かれたら、ゲームが終了するまで動くこともなく、別の種類の箱に変わることもなく、存在し続けるためである。X-method に沿って置いた結果、盤面には一部しか埋まっていない状態に X、O の C Connect 4 が存在すれば、X-board にも C Connect 4 が存在することになる。 X が X-method に沿って置く時、O の手に対応する X の手は一意に決まる。したがって、X-board 全体に X と O 共に X Connect Y がなければ、Y が Y S-method に沿って、どのように置き進めていっても、決着がつくことなく、箱積みは無限に続く。ここで、次の定義をする。 定義 Y こ Y の長方形を Y と呼ぶ (図 Y 14)。 証明 (定理 Y 1 の証明)

次に、横の X の Connect4 を考慮せず、tub の中を全て X とした Core77 を示す (図 16)。 図 16 の中に、縦と斜めの X の Connect4 はない。従って、Core77 に X と O の縦と斜めの Connect4 はない。次に、Core77 に X も O も横の Connect4 がないことを証明する。 Core77 の 3 行 \sim 7 行に X 、O ともに横の Connect4 はない。また、Core77 の Core77 の Core

О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	Χ	X	X	О	О	X	X	X	О
О	Χ	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	Χ	Χ	X	О	О	X	X	X	О
О	Χ	Ο	Ο	О	Χ	Χ	О	О	О	X
X	О	X	X	О	О	О	О	X	О	О
О	X	О	О	О	О	О	О	О	О	О

図 15 tub を全て O とした Core77

О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	X	X	X	О	О	X	X	X	О
О	X	О	О	О	X	X	О	О	О	X
X	О	Χ	X	X	О	О	X	X	X	О
О	X	0	0	О	X	X	0	0	0	X
X	О	Χ	X	X	О	О	X	X	X	О
О	X	О	О	X	X	X	X	О	X	X

図 16 tub を全て X としとした Core77

定理 2 n を非負整数とする。O は 5n+1 列 $\sim 5n+4$ 列、-5n-1 列 $\sim -5n-4$ 列で draw tub し、それ以外を follow up すると、決着が着くことなく、箱積みは無限に続く。このように置いていき、盤面が全て埋め尽くされたものが図 17 である。図 17 を O-board と呼ぶ。

定義 6 定理 1 で示した戦略を O-method と呼ぶ。

O が O-method に沿って置く時も、X の手に対応する O の手は一意に決まる。O-board も 0 列を軸に対称で、手順によらず、一意に決まる。

証明 O-board に出現する 4×4 の正方形のパターンは、Core77 に出現する 4×4 の正方形のパターンの X と O を反転させたものに含まれる。

ところで、図 1 は、X-board に従って 2 手目に O が 1 に置いたら、X は 1 に置き、O が 4 手目に -1 に置いたら、X が -1 に置き、6 手目に O が 2 に置いた後の局面である。この局面から X-method に沿って、X は 2 に置かずに、X0O2X0O0X-2O-2X1O1X-1O2X-2 と Connect 4 を狙いにいくと、O はそれを阻止するしかないが、最後は X に Connect 4 を

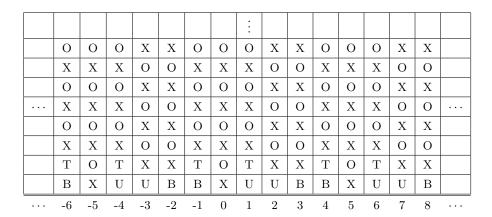


図 17 O-board

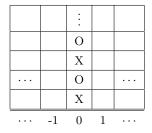


図 18 X が X-method、O が O-method に沿って置いた展開

達成されてしまう。つまり、図 1 は最善 X 勝ちの局面である。以上のように、X-method に沿って置いていく時には、最善 X 勝ちの局面が出現する。同様に、O-method に沿って置いていく時にも、最善 O 勝ちの局面が出現する。X は X-method に沿って置く限り、絶対に負けないし、O も O-method に沿って置く限り、絶対に負けない。したがって、X、O がお互いに相手に勝たせないための最も確実な進行は X は X-method、O は O-method に沿って置く進行である。その進行は、2 手目以降、follow up するだけの進行である(図 18)。以上から、箱積みは最善引き分けであることが証明された。

ここまで、箱積みでは箱を任意の列に置いてもいいというルールだった。このルールを任 意置きとする。任意置きのルールでは、箱をいくらでも遠くに置くことができる。しかし、 紙と鉛筆などで実際にゲームをする時のために、次のような横の広がりを抑えるための隣置き、空置きというローカルルールが存在する³⁾。

隣置きのルールでは、先手、後手とも盤面に既に箱が置かれている列の内で、1 番左の列より 1 つ左の列から、1 番右の列より 1 つ右の列まで置ける。X は図 1 では、-2 列 -3 列 に置くことが出来る。

空置きのルールでは、先手、後手とも盤面に既に箱が置かれている列の内で、1 番左の列より 2 つ左の列から、1 番右の列より 2 つ右の列まで置ける。X は図 1 では、-3 列 ~ 4 列に置くことが出来る。

X-method でも、O-method でも隣置きのルールしか使っていない。したがって、隣置き、空置きのルールで X は X-method、O は O-method に沿って置けば、絶対に負けることはない。以上から、箱積みは隣置き、空置きのルールでも最善引き分けである。

4. 縦に制限がある箱積みが最善引き分けの証明

4.1 縦が1行の盤面

X は 0 列より右は 1 列と 2 列、3 列と 4 列、…と 2 つの升をペアにし、0 列より左は -1 列と -2 列、-3 列と -4 列、…と 2 つの升をペアにし、0 にペアの一方に置かれたら、ペアのもう一方に置く。すると、0 は 4 目どころか、3 目さえも並べることが出来ない。0 は 0 列より左を -1 列と -2 列、-3 列と -4 列、…をペアにする。0 列から右を 0 列と 1 列、2 列と 3 列、…をペアにし、X にペアの一方に置かれたら、ペアのもう一方に置く。すると、X は 4 目どころか、3 目さえも並べることが出来ない。

4.2 縦が 2 行以上の盤面

最初に X は盤面を X-method に沿って、置いていく。上に詰まった場合、それ以上 follow up 出来なくなる。その時は、盤面にある一番右にある箱より 1 つ右の tub を見つける (図 19)。 そして、その tub の一番左の列から 6 列右の列に X を置き、想定する X-board を 図 20 のように、書き直し、それに沿って打ち進める。このように、上に詰まった場合は、

T	0	0	T	X	T	0	О	T	X	T	О	0
U	U	B	В	0	U	U	В	В	0	U	U	В

図 19 左の tub は盤面で一番右の箱より 1 つ右の tub

	0											
U	U	В	В	0	0	X	0	0	U	U	В	В

図 20 X を置き、図 19 の想定手順を書き直した局面



図 21 縦が 3 行の盤面で X が絶対に負けない戦略の例

X	0	0	0	X	X	X	0	0	0	X	0	0	
 0	X	X	T	0	0	T	X	X	0	X	X	T	
X	О	0	U	U	В	В	0	0	X	0	0	U	
 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

図 22 X-board を新しく書き直した盤面

盤面にある箱より一番右の箱より 1 つ右の tub を見つけ、その tub の一番左の列から 6 列右の列に X を置き、その度に想定する手順を書き直す。 以上の手順の例を縦 3 の盤面で示す。 初手 X が 0 に置いた後、2 手目で O が 1 に置けば、X は X-method に沿って、1 に置く。4 手目で O が 1 に置くと、X はこれ以上、1 列で follow up 出来ない (図 21)。盤面の一番右にある箱は 1 列にあり、その 1 つ右の tub は 3 列~6 列の tub である。この tub の一番左の列から 6 列右の列は 9 列であるので、X を 9 に置く。そして、図 22 のように、X-board を書き直す。 O も最初は盤面を O-method に沿って、置いていく。上に詰まって、それ以上 follow up 出来なくなった場合は盤面にある一番右にある箱よりも 1 つ右の tub を見つける (図 23)。 そして、その tub の一番左の列から 6 列右の列に O を置き、想定する O-board を図 24 のように書き直し、それに沿って置き進める。この場合、O は X-method のような手順を想定することになる。ここでも、上に詰まった場合は、盤面にある箱より一

T	X	X	T	0	T	X	X	T	0	T	X	X
U	U	В	В	X	U	U	В	В	X	U	U	В

図 23 盤面の一番右の箱より 1 つ右の tub

T	X	X	T	О	0	X	0	0	T	X	X	T
U	U	В	В	X	X	О	X	X	U	U	В	В

図 24 ○ を置き、図 23 の想定手順を書き直した局面

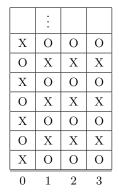
X	X	X	О	X	X	X
О	О	О	X	О	О	О
X	X	X	О	X	X	X
О	О	О	X	О	О	О
X	X	X	О	X	X	X
О	О	О	X	О	О	О
0	1	2	3	4	5	6

図 25 Connect4 で引き分けの盤面

番右の箱より 1 つ右の tub を見つけ、その tub の一番左の列から 6 列右の列に O を置き、その度に想定する手順を書き直す。

5. 横に制限がある箱積みが最善引き分けの証明

横に制限がある箱積みも X が絶対に負けない戦略と O が絶対に負けない戦略を示すことで、最善引き分けであることを示す。手順によらず、盤面が全て埋まった状態は一意に決まるので、盤面が全て埋まった状態を 4×4 の正方形のパターンが全て現れる局面で示す。X も O も隣置きのルールしか使わずに、任意置きのルールを使う相手に絶対負けない戦略をとれるので、ルールは隣置きでも空置きでも任意置きでも最善引き分けである。盤面が全て埋まった状態に現れる 4×4 の正方形のパターンは X-board または X-board の X と X-board を反転させたものに現れる X の正方形のパターンの他に、X-Connect X-Connect X-



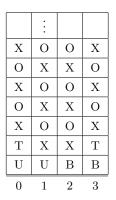


図 26 横が 4 列の盤面で ○ が絶対に負けない戦略

図 27 横が 4 列の盤面で ○ が絶対に負けない戦略

5.1 横が3列以下の盤面

X は初手を任意の列に置き、以降は follow up する。O は follow up のみする。

5.2 横が4列の盤面

X は初手を 0 に置き、以降は follow up する (図 26)。 O は 1 列~4 列で draw tub U、それ以外は follow up する (図 27)。

5.3 横が5列の盤面

X は初手を 2 に置いた後、follow up する (図 28)。 O は 1 列 ~ 4 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 29)。

5.4 横が6列の盤面

X は初手を 2 に置いた後、follow up する (図 30)。 O は 1 列 \sim 4 列 \overline{C} draw tub \overline{U} し、それ以外は follow up する (図 31)。

5.5 横が7列の盤面

X は初手を 0 に置き、3 列 \sim 6 列で draw tub U、それ以外は follow up する (図 32)。 O は 1 列 \sim 4 列で draw tub U、それ以外は follow up する (図 33)。

5.6 横が8列の盤面

X は初手を 1 に置き、4 列 ~ 7 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 34)。 O は 2 列 ~ 5 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 35)。

5.7 横が9列の盤面

X は初手を 2 に置き、5 列~8 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 36)。

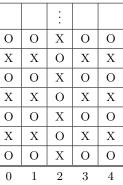


図 28 横が 5 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

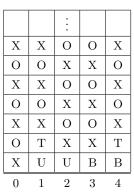


図 29 横が 5 列の盤面で ○ が絶対に負けない戦略

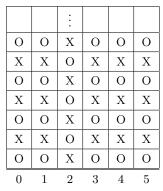
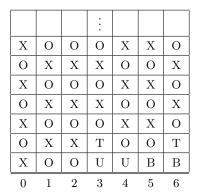


図 30 横が 6 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

		:			
X	X	О	О	X	X
О	О	X	X	О	О
X	X	О	О	X	X
О	О	X	X	О	О
X	X	О	О	X	X
О	Т	X	X	Т	О
X	U	U	В	В	X
0	1	2	3	4	5

図 31 横が 6 列の盤面で 〇 が絶対に負けない戦略



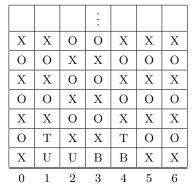


図 32 横が 7 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

図 33 横が 7 列の盤面で ○ が絶対に負けない戦略

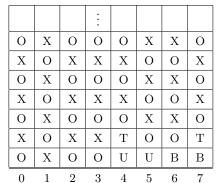


図 34 横が 8 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

			:				
X	X	X	О	О	X	X	X
О	О	О	X	X	О	О	О
X	X	X	О	О	X	X	X
О	О	О	X	X	О	О	О
X	X	X	О	О	X	X	X
О	О	Т	X	X	Т	О	О
X	X	U	U	В	В	X	X
0	1	2	3	4	5	6	7

図 35 横が 8 列の盤面で ○ が絶対に負けない戦略

				:				
О	О	X	О	О	О	X	X	О
X	X	О	X	X	X	О	О	X
О	О	X	О	О	О	X	X	О
X	X	О	X	X	X	О	О	X
О	О	X	О	О	О	X	X	О
X	X	О	X	X	Т	О	О	Т
О	О	X	О	О	U	U	В	В
0	1	2	3	4	5	6	7	8

図 36 横が 9 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

Т			Т	Т			Т
U	U	В	В	U	U	В	В

図 37 double draw tub

横が 9 列以上の場合、O は横が 4 列 \sim 8 列の盤面での置き方に draw tub が 1 つ含まれているので、4 以上の自然数 N に対して、横 N+5 は横 N の時に現れる draw tub の 1 つを図 37 に置き換えたものにし、それ以外を follow up すれば良い。

5.8 横が 10 列の盤面

以下では、X のみが少なくとも引き分けに持ち込めることを示す。X は初手を 2 に置き、5 列 \sim 8 列 \circ draw tub する。それ以外は follow up する (図 38)。

5.9 横が 11 列の盤面

X は初手を 2 に置き、5 列~8 列で draw tub する。それ以外は follow up する (図 39)。

5.10 横が 12 列以上の盤面

横が 12 列以上の場合、X は横が 7 列 ~ 11 列の盤面での置き方に draw tub が 1 つ含まれているので、7 以上の自然数 N に対して、横 N+5 は横 N の時に現れる draw tub の 1 つを図 37 に置き換えたものとし、初手と draw tub 以外を follow up すれば良い。

6. 終わりに

Connect4 は 7 × 6 の盤面では最善先手勝ちであるが、無限大の盤面では最善引き分けで

Χ Ο X X Ο Χ Χ Χ X Ο Ο Ο X Ο Ο Χ Ο Ο Ο X Ο Χ Ο Χ Χ Χ Χ Χ Ο Χ Χ Ο O Ο X X Ο Ο Ο Χ Ο Ο Ο Χ Χ Ο Χ Χ Τ Ο Ο Τ Χ Χ Ο U В В Ο Ο Ο U Ο 2 3 5 6 7 9 4

図 38 横が 10 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

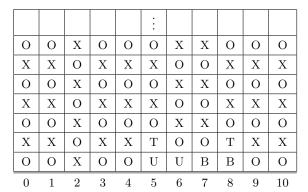


図 39 横が 11 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

あることを示した。また、盤面が縦または横いずれかに制限がある盤面でも最善引き分けで あることを示した。

参 考 文 献

- 1) L.V. Allis: A knowledge-based approach to Connect-Four. The game is solved: White wins, Master 's thesis, Vrije Universiteit, Amsterdam, 1988.
- 2) James Dow Allen, The Complete Book of Connect4, PUZZLE WRIGHT PRESS
- 3) [http://homepage3.nifty.com/yasda/dwnload/hako.html accessed at 2011/2/3]