箱積みが最善引き分けの証明

山口 慶晃[†1]　山口 和紀[†1]
田中 哲朗[†1]　金子 知適[†1]

1. はじめに

箱積みは Connect4[1] の盤面を無限大にしたゲームである。Connect4 では横 7 列、縦 6 行の盤面で、2 人のプレーヤが 1 個ずつ石を下から交互に置いていく。石は直下の升に石が置かれているか、最下行の升にしか置けない。パスは許されない。そして、先に縦または横または斜めのいずれかに 4 目以上並んだ方の勝ちというゲームである。1988 年、James Dow Allen と Victor Allis がそれぞれ独立に、Connect4 は最善を尽くせば、先手必勝であることを証明した。箱積みでは、石を箱と表現する。箱積みでは、縦、横ともに無限大の盤面の中で、箱を交互に置いていき、先に縦または横または斜めに 4 目以上並べた方の勝ちとなる[1]。箱積みで先手にも、後手にも絶対に負けない戦略がある。最善引き分けをその意味で使う。

2. ルール

箱積みは地面から順に箱を置いていく。図 1 のように、地面は二重線で表す。本稿では先手の箱を X、後手の箱を O と表記する。初手 X が置かれた列を 0 列とし、0 列から右の列

†1 the University of Tokyo

		X		X			
		O	X	O	O		
-3	-2	-1	0	1	2	3	4

図 1　X の手番です。
この局面を勝利に結びつけることが出来ますか？

T			T
U	U	B	B
①	②	③	④

図 2　tub

を 1 列、2 列、3 列、…と表し、0 列から左の列を −1 列、−2 列、−3 列、…と表す。二重線は地面を表し、二重線の下の数は何列かを表す数である。行は下から 1 行、2 行、3 行、…と表す。また、整数 z に対し、X を z 列に置くことを「X を z に置く」と表現する。棋譜は 1 手目で X が 0 に置き、2 手目に O が 1 に置き、3 手目に X が 1 に置き、4 手目に O が −1 に置き、5 手目に X が −1 に置き、6 手目に O が 2 に置いた時、$X0O1X1O-1X-1O2$ と表記する。図 1 は $X0O1X1O-1X-1O2$ と進んだ局面である。実はこの局面は勝利に結びつけることが出来る。このような、Connect4 における問題集を集めた本もある[2]。実際に置いた箱を図 1 のように通常の書体で X、O、まだ置いていないが置く想定の箱を斜体で *X*、*O* と表す。

3. 箱積みが最善引き分けの証明

X も O も絶対に負けない戦略が存在することを示すことで、箱積みが最善引き分けであることを示す。最初に証明に必要な用語と置き方の定義をする。

定義 1　X または O が自分の箱を縦または横または斜めのいずれかに 4 目以上並べたことを *Connect4* と呼ぶ。

「はじめに」で述べたゲームも Connect4 とする。

定義 2　相手の箱が置かれた次の手で、その箱の上に自分の箱を置くことを *follow up* と呼ぶ[1]。

定義 3　図 2 の升の T、U、B が記された 6 升を tub と呼ぶ。tub は図 2 のように、常に地面の上に置かれている。tub の中に次の補題 1 の証明で示す手順に沿って置くことを、① 列〜④ 列で *draw tub* すると呼ぶ。

補題 1　図 2 で tub の中に OXOXOX と交互に置いていった時、X が適切に対応すれば、tub の同じアルファベットがついた 2 升に X は O と 1 個ずつ置くことが出来る。逆に

T			T
O	U	B	B
①	②	③	④

図 3　tub の 1 手目

T			T
O	X	B	B
①	②	③	④

図 4　tub の 2 手目

T			T
O	X	O	B
①	②	③	④

図 5　tub の 3 手目 (その 1)

T			T
O	X	O	X
①	②	③	④

図 6　tub の 4 手目 (その 1)

T			O
O	X	O	X
①	②	③	④

図 7　tub の 5 手目 (その 1)

X			O
O	X	O	X
①	②	③	④

図 8　tub の 6 手目 (その 1)

O			T
X	O	B	B
①	②	③	④

図 9　tub の 3 手目 (その 2)

O			T
X	O	X	B
①	②	③	④

図 10　tub の 4 手目 (その 2)

XOXOXO と置いていった場合も O が適切に対応すれば、同じアルファベットがついた 2 升に O は X と 1 個ずつ置くことが出来る。

証明 以下に進行の例を図に示す。tub の左右の対称性により、O がこの tub の中で、最初に置くのが U のどちらかだとしても一般性を失わない (図 3)。 X はもう 1 つの U に置く (図 4)。次に、O が tub の中で置くとすれば、B のどちらかか ③ であるが、B の一方に置くとする (図 5)。 すると、X は B のもう一方に置く (図 6)。次に、O が T のどちらかに置く (図 7)。

最後に、X はもう一方の T に置く (図 8)。図 8 には、同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている。

今度は、tub の 3 手目で O が ① に置いた場合を証明する (図 9)。 これに対して、X は ③ に置く (図 10)。次に、O は ④ に置くしかない (図 11)。 最後に、X は ④ に置く (図

O			T
X	O	X	O
①	②	③	④

図 11　tub の 5 手目 (その 2)

O			X
X	O	X	O
①	②	③	④

図 12　tub の 6 手目 (その 2)

									⋮									
	X	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	
	O	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	
	X	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	
⋯	O	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	⋯
	X	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	
	O	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	
	T	O	O	T	X	X	O	X	X	T	O	O	T	X	T	O	O	
	U	U	B	B	O	O	X	O	O	U	U	B	B	O	U	U	B	
⋯	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯

図 13　X-board

12)。図 12 にも、同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている。以上から、tub の同じアルファベットがついた 2 升に、X は O と 1 個ずつ置くことが出来る。tub の中に、XOXOXO と置いていった場合も同様に、O が適切に対応すれば、tub の同じアルファベットがついた 2 升に、O は X と 1 個ずつ置くことが出来る。□

定理 1　n を非負整数とする。X は初手を置いた後は $3+5n$ 列〜$6+5n$ 列及び、$-3-5n$ 列〜$-6-5n$ 列で draw tub し、それ以外は follow up すれば、決着が着くことなく、箱積みは無限に続く。このように置いていき、盤面が全て埋め尽くされたものが図 13 である。図 13 を X-board と呼ぶ。

定義 4　定理 1 で示した戦略を X-method と呼ぶ。

定理 1 の証明は後で行う。X-board は 0 列を軸に線対称である。7 列から右は 2 列〜6 列が繰り返し続いており、−7 列から左は −2 列〜−6 列が繰り返し続いている。盤面を無限に埋め尽くした局面は手順によらず、tub の中の X と O の並び順を除いて、一意に決まる。例えば、図 1 は初手から $X0O1X1O-1X-1O2$ と進んだ局面であるが、$X0O-1X-1O1X1O2$

O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	T	O	O	T	X	T	O
O	X	O	O	U	U	B	B	O	U	U

図 14　Core77

と進んだ局面は、手順は違っても、局面は同じである。これは箱積みでは、箱は 1 度置かれたら、ゲームが終了するまで動くこともなく、別の種類の箱に変わることもなく、存在し続けるためである。X-method に沿って置いた結果、盤面には一部しか埋まっていない状態に X、O の Connect4 が存在すれば、X-board にも Connect4 が存在することになる。X が X-method に沿って置く時、O の手に対応する X の手は一意に決まる。したがって、X-board 全体に X と O 共に Connect4 がなければ、X が X-method に沿って、どのように置き進めていっても、決着がつくことなく、箱積みは無限に続く。ここで、次の定義をする。

定義 5　-1 列〜9 列、1 行〜7 行までの 11×7 の長方形を *Core77* と呼ぶ (図 14)。

証明 (定理 1 の証明)

X-board では 7 列から右は 2 列〜6 列が繰り返され、5 行から上は 3 行〜4 行が繰り返されるので、盤面に現れる 4×4 の正方形は対称性を除くと、Core77 の中にある 4×4 正方形のパターンしか現れない。Core77 に X も O も縦、横、斜めに Connect4 がないことを証明する。まず、横の O の Connect4 を考慮せず、tub の中は全て O とした Core77 を示す (図 15)。図 15 の中に、縦と斜めの O の Connect4 はない。

次に、横の X の Connect4 を考慮せず、tub の中を全て X とした Core77 を示す (図 16)。図 16 の中に、縦と斜めの X の Connect4 はない。従って、Core77 に X と O の縦と斜めの Connect4 はない。次に、Core77 に X も O も横の Connect4 がないことを証明する。Core77 の 3 行〜7 行に X、O ともに横の Connect4 はない。また、tub の中は同じアルファベットがついた 2 升に、X と O が 1 個ずつ配置されているので、Core77 の 1 行と 2 行にも横の Connect4 はない。以上から、Core77 の中には X、O 共に縦、横、斜めの Connect4 は存在しない。従って、X は X-method に沿って置けば、決着が着くことなく、無限に箱積みが続く。□

O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	O	O	O	O	X	O	O
O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O

図 15　tub を全て O とした Core77

O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O
O	X	O	O	X	X	X	X	O	X	X

図 16　tub を全て X としとした Core77

定理 2　n を非負整数とする。O は $5n+1$ 列〜$5n+4$ 列、$-5n-1$ 列〜$-5n-4$ 列で draw tub し、それ以外を follow up すると、決着が着くことなく、箱積みは無限に続く。このように置いていき、盤面が全て埋め尽くされたものが図 17 である。図 17 を O-board と呼ぶ。

定義 6　定理 1 で示した戦略を O-method と呼ぶ。

O が O-method に沿って置く時も、X の手に対応する O の手は一意に決まる。O-board も 0 列を軸に対称で、手順によらず、一意に決まる。

証明 O-board に出現する 4×4 の正方形のパターンは、Core77 に出現する 4×4 の正方形のパターンの X と O を反転させたものに含まれる。□

ところで、図 1 は、X-board に従って 2 手目に O が 1 に置いたら、X は 1 に置き、O が 4 手目に -1 に置いたら、X が -1 に置き、6 手目に O が 2 に置いた後の局面である。この局面から X-method に沿って、X は 2 に置かずに、X0O2X0O0X−2O−2X1O1X−1O2X−2 と Connect4 を狙いにいくと、O はそれを阻止するしかないが、最後は X に Connect4 を

								⋮								
	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	
	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	
	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	
⋯	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	⋯
	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	
	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	
	T	O	T	X	X	T	O	T	X	X	T	O	T	X	X	
	B	X	U	U	B	B	X	U	U	B	B	X	U	U	B	
⋯	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯

図 17 O-board

		⋮		
		O		
		X		
⋯		O		⋯
		X		
⋯	-1	0	1	⋯

図 18 X が X-method、O が O-method に沿って置いた展開

達成されてしまう。つまり、図 1 は最善 X 勝ちの局面である。以上のように、X-method に沿って置いていく時には、最善 X 勝ちの局面が出現する。同様に、O-method に沿って置いていく時にも、最善 O 勝ちの局面が出現する。X は X-method に沿って置く限り、絶対に負けないし、O も O-method に沿って置く限り、絶対に負けない。したがって、X、O がお互いに相手に勝たせないための最も確実な進行は X は X-method、O は O-method に沿って置く進行である。その進行は、2 手目以降、follow up するだけの進行である（図 18）。

以上から、箱積みは最善引き分けであることが証明された。

ここまで、箱積みでは箱を任意の列に置いてもいいというルールだった。このルールを任意置きとする。任意置きのルールでは、箱をいくらでも遠くに置くことができる。しかし、紙と鉛筆などで実際にゲームをする時のために、次のような横の広がりを抑えるための隣置き、空置きというローカルルールが存在する[3]。

隣置きのルールでは、先手、後手とも盤面に既に箱が置かれている列の内で、1 番左の列より 1 つ左の列から、1 番右の列より 1 つ右の列まで置ける。X は図 1 では、−2 列〜3 列に置くことが出来る。

空置きのルールでは、先手、後手とも盤面に既に箱が置かれている列の内で、1 番左の列より 2 つ左の列から、1 番右の列より 2 つ右の列まで置ける。X は図 1 では、−3 列〜4 列に置くことが出来る。

X-method でも、O-method でも隣置きのルールしか使っていない。したがって、隣置き、空置きのルールで X は X-method、O は O-method に沿って置けば、絶対に負けることはない。以上から、箱積みは隣置き、空置きのルールでも最善引き分けである。

4. 縦に制限がある箱積みが最善引き分けの証明

縦に制限がある箱積みも最善引き分けであることを証明する。ただし、ルールは任意置きとする。ここでも、X が絶対に負けない戦略と O が絶対に負けない戦略を示すことで、最善引き分けであることを示す。X が絶対に負けない戦略をとって、盤面が全て埋まった状態は一意に決まる。O も絶対に負けない戦略をとって、盤面が全て埋まった状態は一意に決まる。その盤面に現れる 4 × 4 の正方形のパターンは X-board または X-board の X と O を反転させたものに現れる 4 × 4 の正方形のパターンである。

4.1 縦が 1 行の盤面

X は 0 列より右は 1 列と 2 列、3 列と 4 列、⋯と 2 つの升をペアにし、0 列より左は −1 列と −2 列、−3 列と −4 列、⋯と 2 つの升をペアにし、O にペアの一方に置かれたら、ペアのもう一方に置く。すると、O は 4 目どころか、3 目さえも並べることが出来ない。O は 0 列より左を −1 列と −2 列、−3 列と −4 列、⋯をペアにする。0 列から右を 0 列と 1 列、2 列と 3 列、⋯をペアにし、X にペアの一方に置かれたら、ペアのもう一方に置く。すると、X は 4 目どころか、3 目さえも並べることが出来ない。

4.2 縦が 2 行以上の盤面

最初に X は盤面を X-method に沿って、置いていく。上に詰まった場合、それ以上 follow up 出来なくなる。その時は、盤面にある一番右にある箱より 1 つ右の tub を見つける (図 19)。 そして、その tub の一番左の列から 6 列右の列に X を置き、想定する X-board を図 20 のように、書き直し、それに沿って打ち進める。このように、上に詰まった場合は、

T	O	O	T	X	T	O	O	T	X	T	O	O
U	U	B	B	O	U	U	B	B	O	U	U	B

図 19 左の tub は盤面で一番右の箱より 1 つ右の tub

T	O	O	T	X	X	O	X	X	T	O	O	T
U	U	B	B	O	O	X	O	O	U	U	B	B

図 20 X を置き、図 19 の想定手順を書き直した局面

	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	
···	O	X	X	T	O	O	T	X	T	O	O	T	X	···
	X	O	O	U	U	B	B	O	U	U	B	B	O	
···	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	···

図 21 縦が 3 行の盤面で X が絶対に負けない戦略の例

	X	O	O	O	X	X	X	O	O	O	X	O	O	
···	O	X	X	T	O	O	T	X	X	O	X	X	T	···
	X	O	O	U	U	B	B	O	O	X	O	O	U	
···	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	···

図 22 X-board を新しく書き直した盤面

盤面にある箱より一番右の箱より 1 つ右の tub を見つけ、その tub の一番左の列から 6 列右の列に X を置き、その度に想定する手順を書き直す。 以上の手順の例を縦 3 の盤面で示す。 初手 X が 0 に置いた後、2 手目で O が 1 に置けば、X は X-method に沿って、1 に置く。4 手目で O が 1 に置くと、X はこれ以上、1 列で follow up 出来ない（図 21)。盤面の一番右にある箱は 1 列にあり、その 1 つ右の tub は 3 列〜6 列の tub である。この tub の一番左の列から 6 列右の列は 9 列であるので、X を 9 に置く。そして、図 22 のように、X-board を書き直す。 O も最初は盤面を O-method に沿って、置いていく。上に詰まって、それ以上 follow up 出来なくなった場合は盤面にある一番右にある箱よりも 1 つ右の tub を見つける (図 23)。 そして、その tub の一番左の列から 6 列右の列に O を置き、想定する O-board を図 24 のように書き直し、それに沿って置き進める。この場合、O は X-method のような手順を想定することになる。ここでも、上に詰まった場合は、盤面にある箱より一番右の箱より 1 つ右の tub を見つけ、その tub の一番左の列から 6 列右の列に O を置き、その度に想定する手順を書き直す。

T	X	X	T	O	T	X	X	T	O	T	X	X
U	U	B	B	X	U	U	B	B	X	U	U	B

図 23 盤面の一番右の箱より 1 つ右の tub

T	X	X	T	O	O	X	O	O	T	X	X	T
U	U	B	B	X	X	O	X	X	U	U	B	B

図 24 O を置き、図 23 の想定手順を書き直した局面

X	X	X	O	X	X	X
O	O	O	X	O	O	O
X	X	X	O	X	X	X
O	O	O	X	O	O	O
X	X	X	O	X	X	X
O	O	O	X	O	O	O
0	1	2	3	4	5	6

図 25 Connect4 で引き分けの盤面

5. 横に制限がある箱積みが最善引き分けの証明

横に制限がある箱積みも X が絶対に負けない戦略と O が絶対に負けない戦略を示すことで、最善引き分けであることを示す。手順によらず、盤面が全て埋まった状態は一意に決まるので、盤面が全て埋まった状態を 4 × 4 の正方形のパターンが全て現れる局面で示す。X も O も隣置きのルールしか使わずに、任意置きのルールを使う相手に絶対負けない戦略をとれるので、ルールは隣置きでも空置きでも任意置きでも最善引き分けである。盤面が全て埋まった状態に現れる 4 × 4 の正方形のパターンは X-board または X-board の X と O を反転させたものに現れる 4 × 4 の正方形のパターンの他に、Connect4 の引き分けの盤面 (図 25)[1] に現れる 4 × 4 の正方形のパターンがある。 ここでは列の表記は一番左の列を 0 列とし、0 列から右の列を 1 列、2 列、3 列、…とする。

	⋮		
X	O	O	O
O	X	X	X
X	O	O	O
O	X	X	X
X	O	O	O
O	X	X	X
X	O	O	O
0	1	2	3

図 26　横が 4 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

	⋮		
X	O	O	X
O	X	X	O
X	O	O	X
O	X	X	O
X	O	O	X
T	X	X	T
U	U	B	B
0	1	2	3

図 27　横が 4 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

5.1　横が 3 列以下の盤面

X は初手を任意の列に置き、以降は follow up する。O は follow up のみする。

5.2　横が 4 列の盤面

X は初手を 0 に置き、以降は follow up する (図 26)。 O は 1 列〜4 列で draw tub し、それ以外は follow up する（図 27)。

5.3　横が 5 列の盤面

X は初手を 2 に置いた後、follow up する (図 28)。 O は 1 列〜4 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 29)。

5.4　横が 6 列の盤面

X は初手を 2 に置いた後、follow up する (図 30)。 O は 1 列〜4 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 31)。

5.5　横が 7 列の盤面

X は初手を 0 に置き、3 列〜6 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 32)。 O は 1 列〜4 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 33)。

5.6　横が 8 列の盤面

X は初手を 1 に置き、4 列〜7 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 34)。 O は 2 列〜5 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 35)。

5.7　横が 9 列の盤面

X は初手を 2 に置き、5 列〜8 列で draw tub し、それ以外は follow up する (図 36)。

		⋮		
O	O	X	O	O
X	X	O	X	X
O	O	X	O	O
X	X	O	X	X
O	O	X	O	O
X	X	O	X	X
O	O	X	O	O
0	1	2	3	4

図 28　横が 5 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

		⋮		
X	X	O	O	X
O	O	X	X	O
X	X	O	O	X
O	O	X	X	O
X	X	O	O	X
O	T	X	X	T
X	U	U	B	B
0	1	2	3	4

図 29　横が 5 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

		⋮			
O	O	X	O	O	O
X	X	O	X	X	X
O	O	X	O	O	O
X	X	O	X	X	X
O	O	X	O	O	O
X	X	O	X	X	X
O	O	X	O	O	O
0	1	2	3	4	5

図 30　横が 6 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

		⋮			
X	X	O	O	X	X
O	O	X	X	O	O
X	X	O	O	X	X
O	O	X	X	O	O
X	X	O	O	X	X
O	T	X	X	T	O
X	U	U	B	B	X
0	1	2	3	4	5

図 31　横が 6 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

			⋮			
X	O	O	O	X	X	O
O	X	X	X	O	O	X
X	O	O	O	X	X	O
O	X	X	X	O	O	X
X	O	O	O	X	X	O
O	X	X	T	O	O	T
X	O	O	U	U	B	B
0	1	2	3	4	5	6

図 32 横が 7 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

			⋮			
X	X	O	O	X	X	X
O	O	X	X	O	O	O
X	X	O	O	X	X	X
O	O	X	X	O	O	O
X	X	O	O	X	X	X
O	T	X	X	T	O	O
X	U	U	B	B	X	X
0	1	2	3	4	5	6

図 33 横が 7 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

			⋮				
O	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	T	O	O	T
O	X	O	O	U	U	B	B
0	1	2	3	4	5	6	7

図 34 横が 8 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

			⋮				
X	X	X	O	O	X	X	X
O	O	O	X	X	O	O	O
X	X	X	O	O	X	X	X
O	O	O	X	X	O	O	O
X	X	X	O	O	X	X	X
O	O	T	X	X	T	O	O
X	X	U	U	B	B	X	X
0	1	2	3	4	5	6	7

図 35 横が 8 列の盤面で O が絶対に負けない戦略

				⋮				
O	O	X	O	O	O	X	X	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O
X	X	O	X	X	T	O	O	T
O	O	X	O	O	U	U	B	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8

図 36 横が 9 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

T			T		T			T
U	U	B	B		U	U	B	B

図 37 double draw tub

横が 9 列以上の場合、O は横が 4 列〜8 列の盤面での置き方に draw tub が 1 つ含まれているので、4 以上の自然数 N に対して、横 N+5 は横 N の時に現れる draw tub の 1 つを図 37 に置き換えたものにし、それ以外を follow up すれば良い。

5.8 横が 10 列の盤面

以下では、X のみが少なくとも引き分けに持ち込めることを示す。X は初手を 2 に置き、5 列〜8 列で draw tub する。それ以外は follow up する (図 38)。

5.9 横が 11 列の盤面

X は初手を 2 に置き、5 列〜8 列で draw tub する。それ以外は follow up する (図 39)。

5.10 横が 12 列以上の盤面

横が 12 列以上の場合、X は横が 7 列〜11 列の盤面での置き方に draw tub が 1 つ含まれているので、7 以上の自然数 N に対して、横 $N+5$ は横 N の時に現れる draw tub の 1 つを図 37 に置き換えたものとし、初手と draw tub 以外を follow up すれば良い。

6. 終わりに

Connect4 は 7 × 6 の盤面では最善先手勝ちであるが、無限大の盤面では最善引き分けで

				⋮					
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O
X	X	O	X	X	T	O	O	T	X
O	O	X	O	O	U	U	B	B	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

図 38 横が 10 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

					⋮					
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O
X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X
O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O
X	X	O	X	X	T	O	O	T	X	X
O	O	X	O	O	U	U	B	B	O	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

図 39 横が 11 列の盤面で X が絶対に負けない戦略

あることを示した。また、盤面が縦または横いずれかに制限がある盤面でも最善引き分けであることを示した。

参考文献

1) L.V. Allis: A knowledge-based approach to Connect-Four. The game is solved: White wins, Master 's thesis, Vrije Universiteit, Amsterdam, 1988.
2) James Dow Allen,The Complete Book of Connect4,PUZZLE WRIGHT PRESS
3) [http://homepage3.nifty.com/yasda/dwnload/hako.html accessed at 2011/2/3]