

## グラフの自動描画における 交差を考慮した巨大近傍探索

渡部 弘基<sup>†1</sup> 玉木 久夫<sup>†1</sup>

グラフの自動描画においては、通常は辺交差は無い方が良いとされる。しかし、例えば地下鉄の路線図のように、交差が意味を持ち、描画の最適化において、交差が保存されることが望ましい場合もある。交差の保存の難易は、最適化の方法に依存する。本稿では、グラフ分割に基づいた巨大近傍局所探索の枠組みの中で、交差を保存した最適化を行うための方法を述べる。

### A large scale neighborhood search algorithm considering intersections for graph drawing

HIROKI WATANABE<sup>†1</sup> and HISAO TAMAKI<sup>†1</sup>

In automatic graph drawing, intersection of edges are usually avoided. But, in the cases where intersections have meanings, such as in metro maps, intersections of edges should be maintained. The difficulty of maintaining intersections depends on the method of optimization. In this paper, we describe a method of preserving intersections, in the framework of large scale neighborhood search based on graph decompositions.

#### 1. はじめに

グラフの自動描画とは、人間が見やすいようにグラフを自動で描画することである。人間が見やすいとされるグラフの基準として、頂点や辺の配置の対称性などが一般的にあげられる 1)。辺の交差数が少ないといった基準もその中の 1 つである。しかし、例えば路線図を

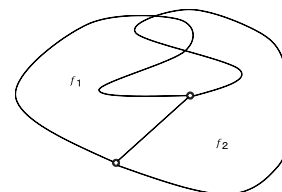


図 1 局所的な条件で交差が保存できない例  
Fig. 1 Example of no preserving intersection with local condition.

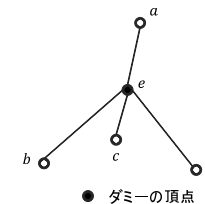


図 2 ダミーの頂点を用いた描画  
Fig. 2 Drawing of using dummy vertex.

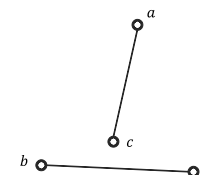


図 3 交差の消失  
Fig. 3 Not preserving intersection.

考えてみると、路線図は地理的な状態も表している方が利用に適している。そのため、本来交差している路線同士の交差が無くなっていたり、本来交差していない路線同士が交差していることは望ましくない。よって、本稿では交差の保存を求める描画の条件とする。交差の保存とは下記の 2 つのことである。

- (1) 元々交差していなかった辺同士は自動描画後も交差していない。
- (2) 元々交差している辺同士は自動描画後も交差している。

グラフの描画を求める方法は、力学モデルに基づいた方法 2)、混合整数計画法による方法 3)、グラフの描画の一部を変化させ評価値が良くなる描画を採用していく方法 4) などがある。本稿ではグラフの描画の一部を変化させ評価値が良くなる描画を採用していく方法を用いる。

辺を直線分として平面に描画するグラフの描画を直線描画と呼ぶ。一般には頂点の重なりや辺の交差を許す。

我々は、最適化の手法として巨大近傍探索の研究 5) を行っている。頂点が整数格子点上にあるような直線描画を考え、ある描画の近傍は各頂点を独立に隣接格子点に移動、あるいは現在位置のままにすることによって得られるすべての直線描画からなる。交差の保存は最適化の手法によっては自明であるが、そうではない場合もある。我々は、近傍内の最適化にグラフの分割を用いた動的計画法を用いるため、交差の保存に関して次の 2 つの困難が生まれる。

- (1) 動的計画法の部分問題で課すことのできる局所的な条件によって、大局的な交差の保存を保証できるかが必ずしも自明ではない。
- (2) 我々の手法では、グラフ分割に平面グラフに特化した方法を用いる。交差を持ったグ

<sup>†1</sup> 明治大学  
Meiji University

ラフを扱うには、何らかの方法で平面グラフに変換する必要があるが、交差点を新たな頂点とする単純な方法では、交差の保存が容易ではなくなる。

1 つ目については次のような例があげられる。あるグラフの描画を求める際に 2 つの部分グラフ  $f_1$  と  $f_2$  に分け、描画をそれぞれ独立に求め、それらを合わせたものを全体のグラフの描画とするような方法を用いたとする。図 1 のように、 $f_1$  と  $f_2$  をそれぞれ独立に考えたときには交差していないが、全体で見たときには交差しているような場合がある。2 つ目については次のような例があげられる。図 2 を交差点をダミーの頂点を挿入することによって求めた描画とする。この後、ダミーの頂点を取り除くと、図 3 のように元々交差していた辺  $ac$  と辺  $bd$  が交差しない状態になる。

本稿では、これらの問題をどのように解決したかについて述べ、実験結果を示す。実験は路線図の自動描画を例に用いて行い、交差数がある程度存在するグラフを入力として与えた場合、交点にダミーの頂点を用いた探索よりも、本稿で述べるスケルトンを用いた探索の方が評価値が良くなることが確認できた。

本稿において、グラフの描画の評価値は、グラフを複数のグラフに分割した時、それぞれの部分グラフで求めた評価値の和によって求めることができるものとする。グラフ  $G$  のある描画を  $D$  とする。 $D$  の交差しているすべての辺の集合を  $\hat{E}$  とした時、 $G \setminus \hat{E}$  の極大 2 辺連結部分グラフを  $G$  のスケルトンと言う。本稿では、あるグラフのスケルトンの各面に含まれる頂点の数は、ある定数以下とする。

## 2. 局所的な制約によるグラフのスケルトンの描画における無交差の維持

グラフの直線描画は、次のいずれかの場合縮退していると言う。

- (1) ある辺の両端の頂点が同一点上にある。
- (2) ある頂点を端点とする 2 つの辺の一方が他方を含む。

縮退していない直線描画は無縮退であると言う。

グラフの直線描画は、ある 2 辺がどちらの端点でもない点で交差しているとき、この交差を内部交差と呼ぶ。内部交差における交点を内部交差点と呼ぶ。グラフの直線描画は、ある 2 辺がどちらかの端点で交差しているとき、この交差を非内部交差と呼ぶ。より一般的に、相異なる 2 辺が両端を含む線分として共通点を持つとき、グラフの直線描画は交差していると言う。グラフの直線描画は交差しないとき無交差であると言う。特に、次数 1 の頂点を持たないグラフの直線描画は無交差ならば無縮退であることに注意する。

$G$  を 2 辺連結グラフとする。 $D_1$  と  $D_2$  を  $G$  に対する 2 つの無交差直線描画とする。 $D_1$

の面と  $D_2$  の面が 1 対 1 に対応し、 $D_1$  の各面  $f$  を囲む  $G$  の辺が  $D_2$  の  $f$  に対応する面を同じ順番で囲むとき、 $D_1$  と  $D_2$  は位相同型であると言う。

我々の探索アルゴリズムでは、与えられたグラフのスケルトン  $S$  の無交差直線描画  $D_0$  から出発して、描画を変形して行く。その過程で現れる各描画  $D$  が無交差直線描画でありかつ  $D_0$  と位相同型であることを保証しなければならない。探索の 1 ステップにおける変形が、グラフ分割に基づいた動的計画法によるので、この性質は、動的計画法の各部分問題に課すことのできる局所的な条件によって保証する必要がある。そのために、次の局所保存の概念を定義し、この条件を満たすことによって、 $D$  が無交差直線描画でありかつ  $D_0$  と位相同型であることを保証できることを証明する。

$G$  を 2 辺連結グラフとする。 $D_1$  を  $G$  の無交差直線描画、 $D_2$  を  $G$  の無縮退直線描画とする。 $D_1$  の各面  $f$  を右側に見るように囲む有向閉曲線が描く  $G$  の有向閉路を  $C_f$  で表す。 $D_1$  の外面を含む各面  $f$  に対して次の条件が成り立つとき、 $D_2$  は  $D_1$  の面を局所保存すると言う。

- (1)  $C_f$  の  $D_2$  における描画は単純有向閉曲線である。
- (2)  $f$  が内面ならば、 $C_f$  の  $D_2$  における描画は、それが境界となるふたつの面のうち内面の方を右側に見る。
- (3)  $f$  が外面ならば、 $C_f$  の  $D_2$  における描画は、それが境界となるふたつの面のうち外面の方を右側に見る。

2 辺連結グラフの無交差直線描画において位相同型と局所保存は等価な概念である。

$D_1$  と  $D_2$  をグラフ  $G$  に対する 2 つの無縮退直線描画とする。 $G$  のどの頂点  $v$  に対しても、 $v$  の隣接点の  $v$  の回りに現れる順序が  $D_1$  と  $D_2$  において同一であるならば、 $D_1$  と  $D_2$  は局所同相であると言う。

補題 1  $D_1$  をグラフ  $G$  の無交差直線描画、 $D_2$  を  $G$  の無縮退直線描画とする。もし、 $D_2$  が  $D_1$  の面を局所保存するならば、 $D_1$  と  $D_2$  は局所同相である。

証明  $G$  の各頂点  $v$  の次数を  $d_v$  とおき、 $v$  に接続する辺を  $D_1$  における  $v$  の回りの時計回りの順番で  $e_1^v, \dots, e_{d_v}^v$  で表す。便宜上、 $e_{d_v}^v$  は  $e_0^v$  と表す。各  $i$ 、 $1 \leq i \leq d_v$  に対して、辺  $e_{i-1}^v$  から辺  $e_i^v$  への  $D_1$  における時計回りの回転角を  $\theta_i^v$  で、 $D_2$  における時計回りの回転角を  $\tau_i^v$  で表す。辺の順序のつけ方から、明らかに各  $v \in V(G)$  に対して

$$\sum_{1 \leq i \leq d_v} \theta_i^v = 2\pi \quad (1)$$

が成り立つ。もし各  $v \in V(G)$  に対して同様に

$$\sum_{1 \leq i \leq d_v} \tau_i^v = 2\pi \quad (2)$$

が成り立つならば、証明は完了する。なぜならば、辺  $e_{d_v}^v = e_0^v, e_1^v, \dots, e_{d_v}^v$  の  $D_2$  による並び方を見ると、これらの辺は時計回りに角度  $\tau_1^v, \dots, \tau_{d_v}^v$  の間隔で並んでおり、これらの角度の合計が  $2\pi$  であれば、辺  $e_1^v, \dots, e_{d_v}^v$  は描画  $D_2$  において時計回りの順に並んでいることになるからである。

$$\sum_{1 \leq i \leq d_v} \tau_i^v \text{ の最小値は } 2\pi \text{ であるから, 等式 (2) を示すためには等式 (1) に鑑みて}$$

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{1 \leq i \leq d_v} \tau_i^v = \sum_{v \in V(G)} \sum_{1 \leq i \leq d_v} \theta_i^v \quad (3)$$

を示せば十分である。この等式は、 $D_1$  の面ごとに角度の和を求めることにより示すことができる。

$D_1$  の各面  $f$  に対し、 $f$  の内角の集まりを  $A_f$  とおき、 $f$  に対応する  $D_2$  の面の内角の集まりを  $B_f$  とおくと、等式 (3) の左辺に現れる角のそれぞれは  $\bigcup_{f: D_1 \text{ の面}} A_f$  にちょうど一度ずつ現れ、等式 (3) の右辺に現れる角のそれぞれは  $\bigcup_{f: D_1 \text{ の面}} B_f$  にちょうど一度ずつ現れる。 $D_1$  の各面  $f$  に対し、 $A_f$  に属す角の角度の合計と  $B_f$  に属す角の角度の合計は等しいので、等式 (3) が成り立つことが結論される。□

$D$  をグラフ  $G$  に対する内部交差のみを持つ無縮退直線描画とする。 $D$  に含まれる単純閉曲線で、 $D$  の内部交差点をただ1つ含むものをカールと呼ぶ。カールに含まれるただ1つの内部交差点が  $p$  の時、 $p$  におけるカールと言う。内部領域が極小なカールを極小カールと呼ぶ。

**補題 2**  $G$  を 2 辺連結グラフとする。 $D$  を  $G$  に対する非内部交差を持たない無縮退直線描画とする。 $D$  が内部交差を持つとき、 $D$  はカールを持つ。

**証明**  $D$  におけるある内部交差した 2 辺  $e_1$  と  $e_2$  を考える。 $e_1$  の両端点を  $v_1, v_2$  とし、 $e_2$  の両端点を  $v_3, v_4$  とする。 $G$  は 2 辺連結なので  $e_1$  を使用しない  $v_1$  から  $v_3$  へのパス  $q$  が必ず存在する。 $e_1$  と  $e_2$  と  $q$  によって作られるパスを  $p$  とおく。 $p$  が  $e_1$  と  $e_2$  による交差以外に交差を持たなければその  $p$  はカールを作っている。もし  $p$  が  $e_1$  と  $e_2$  の交差以外の交差を持っていたとき、その交差している 2 辺を  $e'_1, e'_2$  とする。 $e'_1$  の端点から  $e'_2$  の端点への  $p$  の最短の部分パスを  $q'$  と置く。 $e'_1$  と  $e'_2$  と  $q'$  によって作られるパスを  $p'$  とする。 $p'$  が  $e'_1$  と  $e'_2$  による交差以外に交差を持たなければ  $p'$  はカールを作っている。もし  $p'$  が  $e'_1$  と  $e'_2$  による交差以外に交差を持っていたとき、同様の議論でさらに短いパスが見つかる。繰り返しの議論の中で見つかる 2 辺のみで交差するパスはカールを作る。□

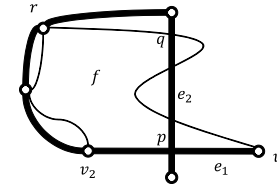


図 4 補題 3 の証明 (太いパスは  $w$ )  
Fig.4 Proof of lemma 3.(Thick path is  $w$ .)

**補題 3**  $G$  を 2 辺連結グラフとする。 $D_0$  を  $G$  の無交差直線描画、 $D$  を  $D_0$  と局所同相であり、かつ  $D_0$  を局所保存する  $G$  の無縮退直線描画とすると、 $D$  は無交差であり、かつ  $D_0$  と位相同型である。

**証明** この補題を証明するために、補題の仮定のもとで  $D$  に交差が存在すると仮定して矛盾を導く。頂点の十分微小な移動により、 $D$  と局所同相であり、かつ内部交差のみを持つ直線描画に変換することができる。したがって、以下では  $D$  は交差するが、内部交差のみを持つと仮定する。 $D$  において交差した 2 辺を  $e_1, e_2$  とする。 $e_1$  と  $e_2$  の交点を  $p$  とする。補題 2 より、カールが存在する。ここで考えるカールは極小カール  $c$  とする。 $c$  を作るパスを  $w$  とする。 $e_1$  の両端点を  $v_1, v_2$  とする。このとき  $w$  の端点となる方を  $v_1$ 、そうでない方の端点を  $v_2$  と名づける。 $D$  は  $D_0$  を局所保存するため、 $e_1$  の両側に  $e_1$  を含んだ 2 つの異なる面が存在する。 $w$  の端点である  $v_1$  からもう片方の  $w$  の端点へ進むとき、 $c$  を左に見る場合と右に見る場合がある。 $c$  を左に見る場合は、 $D_0$  において  $v_1$  から  $v_2$  へ進むときに左に存在した方の面を  $f$  とする。 $c$  を右に見る場合は、 $D_0$  において  $v_1$  から  $v_2$  へ進むときに右に存在した方の面を  $f$  とする。 $E(f) \setminus e_1$  によって作られる  $v_2$  から始まるパスを  $x$  とする。 $D$  と  $D_0$  は局所同相なので、 $f$  の内部に  $w$  は交差無しに入らない。そのため、 $w$  と  $x$  は必ず内部交差する。この内部交差によってできる内部交差点の内、 $x$  上で最も  $v_2$  に近い内部交差点を  $q$  とする (図 4)。 $w$  から  $e_1$  を取り除いた  $v_2$  から始まるパスを  $w'$  とする。 $w'$  と  $x$  が最後に共有する頂点を  $r$  とする。この時、 $r$  から  $q$  までの  $w'$  の部分パス  $w''$  と、 $r$  から  $q$  までの  $x$  の部分パス  $x'$  が存在する。 $w''$  と  $x'$  は、 $r$  と  $q$  の名づけ方から頂点  $r$  と交点  $q$  としか共有部分を持たない。そのため、 $w''$  と  $x'$  は  $q$  におけるカールを作る。この  $q$  におけるカールを  $c'$  とする。 $c'$  は  $c$  の領域を  $x'$  により切り取る形で作られるカールであるため、 $c$  の領域よりも  $c'$  の領域の方が小さい。これは  $c$  が極小カールであることに反する。以上から、補題の仮定のもとで  $D$  に交差が存在すると仮定すると、矛盾が生じる。□

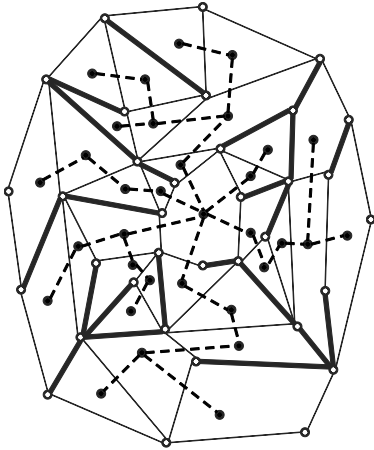


図5 全域森と分割木

Fig. 5 Spanning forest and decomposition tree.

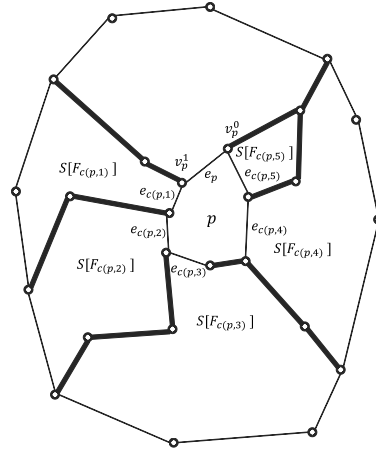


図6 表記

Fig. 6 Notation.

定理4  $G$  を2辺連結グラフとする.  $D_0$  を  $G$  の無交差直線描画,  $G$  の無縮退直線描画とする.  $D$  が  $D_0$  の面を局所保存するならば,  $D$  は  $D_0$  と位相同型な無交差直線描画である.  
証明 補題1と補題3より明らか. □

### 3. 交差を考慮した動的計画法

#### 3.1 グラフ分割に基づいた巨大近傍探索

ここでは部分問題を定義し, それを用いた漸化式により最適な描画を求めることができることを示す.

分割木を定義する. そのためにまず分割木の作成方法について述べる. グラフ  $G$  とその描画  $D$  が与えられた時, そのスケルトンを  $S$  とする.  $G$  の頂点集合を  $V(G)$  と表す.  $G$  の辺集合を  $E(G)$  と表す.  $S$  の外面を  $f_{out}$  とする.  $F(S)$  を  $f_{out}$  を除く  $S$  の面の集合とする.  $V(f_{out})$  の頂点すべてを根とする幅優先探索森を  $U$  とする.  $S$  の双対グラフの部分グラフ  $T$  を次のように作る.  $T$  の頂点集合は  $F(S)$  であり,  $p, q \in F(S)$  が隣接するのは,  $p$  と  $q$  の共有する辺が  $U$  に含まれないときである.  $f_{out}$  に隣接する  $T$  の任意の葉を  $T$  の根とする. このようにして作られた木を分割木と言う (図5)

$F(S)$  に含まれるある要素を  $p$  とする.  $p$  に属する  $G$  の頂点集合を  $V(p)$  と表す.  $p$  に属す

る  $G$  の辺集合を  $E(p)$  と表す.  $p$  の子供の数を  $k_p$  と表す.  $p$  とその親が共有する辺を  $e_p$  と表す.  $p$  が根の場合は外面に属している辺を  $e_p$  とする.  $e_p$  の両端点を  $v_p^0, v_p^1$  とする. この2頂点の命名は,  $v_p^0$  から  $v_p^1$  に向かって近づくとき  $p$  を左に見るように選ぶ.  $p$  の  $T$  における子を  $c(p, i) (1 \leq i \leq k_p)$  と表す. このとき,  $e_{c(p,1)}, e_{c(p,2)}, \dots, e_{c(p,k_p)}$  が  $p$  の周りを反時計回りにたどると現れるように子の名を選ぶ.  $p$  と,  $T$  における  $p$  のすべての子孫の頂点を集めた集合を  $F_p$  と表す.  $p, F_{c(p,1)}, F_{c(p,2)}, \dots, F_{c(p,i)}$  の和集合を  $F_{p,i}$  と表す.  $F(S)$  の部分集合  $X$  によって誘導される  $S$  の部分グラフを  $S[X]$  と表す (図6).  $v_p^0$  から  $E(U)$  に含まれる辺のみを用いた  $V(f_{out})$  までのパスを  $r_p$  で表し,  $v_p^1$  から  $E(U)$  に含まれる辺のみを用いた  $V(f_{out})$  までのパスを  $l_p$  で表す.  $r_{c(p,i)}$  から  $p$  に接する辺を除いた部分パスを  $r'_{c(p,i)}$  と表す.  $v_p^0$  から  $p$  の周りを時計回りで  $r'_{p,i}$  の始点に至るパスと  $r'_{c(p,i)}$  をつないだパスを  $r_{p,i}$  と表す. 頂点の移動ベクトルを表した集合を  $D = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\}$  とする.  $V(S)$  に含まれるある頂点  $v$  の現在位置を  $\mathbb{Z}_v$  と表す.  $facevalue(p, q)$  を次のような関数とする.  $S[\{p\}]$  において,  $V(p)$  の各頂点を  $q \in D^V(p)$  に従って動かし, 各  $v \in V(p)$  について位置を  $\mathbb{Z}_v + q(v)$  と置く. この時の  $S[\{p\}]$  の描画の評価値を表す. この時  $S[\{p\}]$  が  $q$  の指示通りに描画できない時, 無限大の値を表す.

部分問題1を  $V(l_p)$  と  $V(r_p)$  のそれぞれの集合に含まれる各頂点の移動位置が指定されたときの, 交差を保存した  $S[F_p]$  の最適な描画を求めることと定義する.  $V(l_p)$  に含まれる各頂点の移動位置を  $q_l \in D^{V(l_p)}$  で指定し  $V(r_p)$  に含まれる各頂点の移動位置を  $q_r \in D^{V(r_p)}$  で指定したときの,  $S[F_p]$  の描画の最適値を表す関数を  $opt1(p, q_l, q_r)$  とすると, 次のような漸化式になる.  $opt1$  は値が小さいほど良い評価値とする.

$p$  に子供が存在する場合

$$opt1(p, q_l, q_r) = opt2(p, k_p, q_l, q_r) \quad (4)$$

$p$  に子供が存在しない場合

$$opt1(p, q_l, q_r) = facevalue(p, q) \quad (q \in D^{V(p)},$$

$$q_l|V(p) \cap V(l_p) = q_l|V(p) \cap V(l_p),$$

$$q_r|V(p) \cap V(r_p) = q_r|V(p) \cap V(r_p),$$

$$q_l|V(l_p) \cap V(r_p) = q_r|V(l_p) \cap V(r_p)) \quad (5)$$

部分問題2を  $V(l_p)$  と  $V(r_{p,i})$  のそれぞれの集合に含まれる各頂点の移動位置が指定さ

れたときの、交差を保存した  $S[F_{p,i}]$  の最適な描画を求めると定義する。このように定義すると、 $i = k_p$  の時に部分問題 1 と等価の問題として扱うことができる。 $V(l_p)$  に含まれる各頂点の移動位置を  $q_l \in D^{V(l_p)}$  で指定し  $V(r_{p,i})$  に含まれる各頂点の移動位置を  $q_r \in D^{V(r_{p,i})}$  で指定したときの、 $S[F_{p,i}]$  の描画の最適値を表す関数を  $opt2(p, i, q_l, q_r)$  とすると、次のような漸化式になる。 $opt2$  は値が小さいほど良い評価値とする。

$i > 1$  の場合

$$\begin{aligned} opt2(p, i, q_l, q_r) = \min \{ & opt1(c(p, i), q_2, q_3) + opt2(p, i-1, q_l, q_1) \\ & q_1 \in D^{V(r_{p,i-1})}, q_2 \in D^{V(l_{c(p,i)})}, q_3 \in D^{V(r_{c(p,i)})}, \\ & q_1|V(r_{p,i-1}) \cap V(l_{c(p,i)}) = q_2|V(r_{p,i-1}) \cap V(l_{c(p,i)}), \\ & q_1|V(r_{p,i-1}) \cap V(r_{c(p,i)}) = q_3|V(r_{p,i-1}) \cap V(r_{c(p,i)}), \\ & q_1|V(r_{p,i-1}) \cap V(r_{p,i}) = q_r|V(r_{p,i-1}) \cap V(r_{p,i}), \\ & q_2|V(l_{c(p,i)}) \cap V(r_{c(p,i)}) = q_3|V(l_{c(p,i)}) \cap V(r_{c(p,i)}), \\ & q_3|V(r_{c(p,i)}) \cap V(r_{p,i}) = q_r|V(r_{c(p,i)}) \cap V(r_{p,i}) \} \end{aligned} \quad (6)$$

$i = 1$  の場合

$$\begin{aligned} opt2(p, i, q_l, q_r) = \min \{ & facevalue(p, q_1) + opt1(c(p, i), q_2, q_3) \\ & q_1 \in D^{V(p)}, q_2 \in D^{V(l_{c(p,i)})}, q_3 \in D^{V(r_{c(p,i)})}, \\ & q_1|V(p) \cap V(l_p) = q_l|V(p) \cap V(l_p), \\ & q_1|V(p) \cap V(l_{c(p,i)}) = q_2|V(p) \cap V(l_{c(p,i)}), \\ & q_1|V(p) \cap V(r_{c(p,i)}) = q_3|V(p) \cap V(r_{c(p,i)}), \\ & q_1|V(p) \cap V(r_p) = q_r|V(p) \cap V(r_p), \\ & q_2|V(l_{c(p,i)}) \cap V(l_p) = q_l|V(l_{c(p,i)}) \cap V(l_p), \\ & q_2|V(l_{c(p,i)}) \cap V(r_{c(p,i)}) = q_3|V(l_{c(p,i)}) \cap V(r_{c(p,i)}), \\ & q_3|V(r_{c(p,i)}) \cap V(r_{p,i}) = q_r|V(r_{c(p,i)}) \cap V(r_{p,i}) \} \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.2 前処理

グラフ  $G$  とその直線描画  $D_0$  が与えられたときに、そのスケルトンを使って分割木に基づいた巨大近傍探索を行う。しかし、スケルトンを求めた時に、単純多角形の面が無くなることや、 $D_0$  において外面と接している頂点を取り除かれてしまうことを避けたい。なぜならば、分割木には最低 1 つの単純多角形の面が必要なことや、分割木において外面は考慮されないため  $G$  の評価値を計算できなくなるためである。そのために、 $D_0$  を長方形で囲むよ

うに、ダミーの頂点とそれらをつなぐダミーの辺を追加する。この長方形は、十分大きな領域となるようにする。理由は後で説明する。その後、加えた各ダミーの頂点から交差が新たに起こらないように  $G$  の任意の頂点に対してダミーの辺を加える。また、この描画からスケルトンを求めた際に、各面に含まれる頂点の数が出るだけ少なくなるように、交差が起きない最大の数のダミーの辺をさらに追加する。この描画からスケルトンを求める。この描画のスケルトンに一致する部分の描画を初期描画と呼ぶ。この初期描画からグラフ分割に基づいた巨大近傍探索によって新たな描画を求めていく。なお、ダミーの頂点やダミーの辺は、評価値の計算の際に除外すれば良いため、評価値の計算に影響は与えない。

### 3.3 動的計画法において交差を保存する方法と評価値の算出

3.1 で述べた漸化式を見ると、 $facevalue$  関数は漸化式が一番深いところで呼ばれる基底になっている。交差を保存した描画を得るためにこれを利用する。 $facevalue(p, q)$  は、 $V(p)$  の各頂点を  $q$  の移動位置に移動させた時の  $S[\{p\}]$  の描画の評価値を表し、 $S[\{p\}]$  が  $q$  の指示通りに描画できない時、無限大の値を表すと定義した。そのため、交差を保存できるような移動指示が与えられた時に、無限大ではない値を表すようにすれば良い。それは、次のような条件を満たす時である。

- (1) その位置に頂点を移動させたときに、その面を作る閉曲線が単純閉曲線となる
- (2) 外面に属する頂点の移動指示が現在位置
- (3) 頂点の移動前の描画と移動後の描画でその面の裏返りが無い

なぜならば、これらの条件を満たせば、頂点の移動後の描画が移動前の描画を局所保存するための条件を満たすことになるためである。これらの条件を満たすことによって、定理 4 で証明したように、位相同型な無交差直線描画が得られる。 $facevalue$  関数では、外面については呼び出されないため、外面についての条件を満たすことができないように思えるが、外面に属する頂点を常に動かさないことによって条件を満たすことができる。前処理で  $D_0$  を十分大きな領域を持つ長方形で囲むようにダミーの頂点とダミーの辺を追加したが、その理由は、長方形の領域が小さい場合、外面に属する頂点を移動させないという条件により描画の制約が強まることを避けるためである。

しかし、これらのことは、スケルトンに関してのみの話となる。与えられたグラフの頂点や辺で、スケルトンには含まれないようなものが存在するため、入力として与えられたグラフについての描画を求めたい場合は、これらの頂点や辺を考慮する必要がある。次にそのような頂点や辺について述べる。

スケルトンに含まれない与えられたグラフの頂点や辺は、初期描画におけるいずれかの面

の内部に存在するはずである．そのため， $facevalue$  関数でスケルトンの各面についての値を求める際に，そのような頂点や辺を考慮すれば良い．具体的には，面に属する頂点の位置が指定されたときに，その面の内部に含まれていた頂点や辺が，辺の交差を保存し，かつ面の内部に収まるような描画の中で，最も良い評価値を  $facevalue$  関数の値とすれば良い．面の内部に収まるような描画のみを許可するため，他の面に影響を与えることは無く，面の中で交差の保存の条件は満たすため，交差の保存が可能となる．以上の方法により，スケルトンではなく入力されたグラフの描画を求めることが可能となる．

### 3.4 動的計画法

節 3.1 で述べた漸化式から動的計画法を用いて評価値を求める．動的計画法を用いることにより，同じパラメータによる関数の計算回数を 1 回に削減することが出来る．例えば  $facevalue(p, q)$  の値を  $facevalue[p][q]$  に保存するような表を用意する．この場合  $p$  は面の ID を表す整数， $q$  は頂点の移動位置を示す整数とする．この表に 1 度計算した値を保存しておけば，あるパラメータによる  $facevalue$  関数の計算は 1 度だけですむ． $opt1$  関数や  $opt2$  関数についても同様な表を用いれば良い．漸化式を見ると，分割木の子供の部分の解が求まっている前提になっている．そのため，表を埋める作業も分割木の葉の部分からボトムアップで行う．

また，最適値を求めるだけでなく，その時の頂点の配置も得られるようにしなければならない．配置を得られるようにするには，ある部分問題でどの部分問題を最適な部分問題として選んだかを得られるようにすれば良い． $opt2$  関数について考える． $opt2$  関数は  $i > 1$  の場合と， $i = 1$  の場合で漸化式が異なる．しかし，式 (6) と式 (7) を見れば， $opt2(p, i, q_l, q_r)$  と呼び出された時の評価値がもっとも良くなるような  $q_1, q_2, q_3$  が得られるようにすれば良いことがわかる．そのため， $opt2(p, i, q_l, q_r)$  の呼び出しに対して，評価値がもっとも良くなるような  $q_1, q_2, q_3$  の値を， $opt2q1[p][i][q_l][q_r]$ ， $opt2q2[p][i][q_l][q_r]$ ， $opt2q3[p][i][q_l][q_r]$  に保存する表を用意すれば良い．

$opt1$  関数についても同様に考える．式 (4) を見ると， $opt1(p, q_l, q_r)$  の呼び出しは  $opt2(p, k_p, q_l, q_r)$  を呼び出すことになるため， $opt2(p, k_p, q_l, q_r)$  の呼び出しと考えると良い．次に，式 (5) を見ると， $opt1(p, q_l, q_r)$  の評価値がもっとも良くなるような  $q$  が得られるようにすれば良い．そのため， $opt1(p, q_l, q_r)$  の呼び出しに対して，評価値がもっとも良くなるような  $q$  の値を， $opt1q[p][q_l][q_r]$  に保存すれば良い．

また， $facevalue$  関数についても，スケルトンに含まれない入力されたグラフの頂点の位置を保存しておく必要がある．そのため， $facevalue(p, q)$  の呼び出しに対して，評価値

が最も良くなるようなそれらの頂点の移動指示を表す値を， $facevalue[p][q]$  に保存すれば良い．

以上のような表を作ることにより，ある部分問題で，どの部分問題を最適な部分問題として選んだかを求めることができる．これにより，ある最適値の頂点の配置を求めることができる．

### 3.5 頂点の移動位置の表現方法

ここでは頂点の移動位置を整数で表す方法を述べる．つまり，あるパスに属する頂点すべての移動位置を 1 つの整数で指定する． $facevalue$  関数ではある面  $p$  に属する頂点に対して移動位置を指定したが，これは  $v_p^0$  から時計回りに  $v_p^1$  まで  $p$  の辺をたどるパスをそのパスと考えれば良い．頂点を移動させる位置の候補は，頂点の現在位置から  $D = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}$  に含まれるベクトルをそれぞれ加えることによって得られる位置である．それぞれの移動ベクトルに 0, 1, 2, 3, 4 と番号を割り当てる．この番号を移動ベクトル番号と呼ぶことにする．ここで， $v_0, v_1, \dots, v_k$  というパスの頂点に移動位置を移動ベクトル番号でそれぞれ  $z_0, z_1, \dots, z_k$  と割り当てるとき，移動位置を表す整数  $q$  を次の式で定める．

$$q = \sum_{i=0}^k (z_i \times |D|^i) \quad (8)$$

$|D|$  進数を 10 進数で表現する方法と同様の方法である．あるパスの  $i$  番目の頂点の移動位置  $z$  をパスに属する頂点の移動位置を表す整数  $q$  から得たい場合は，次の式で得られる．

$$z = \frac{q}{|D|^{(i-1)}} \bmod |D| \quad (9)$$

なお， $l_p, r_p, r_{p,i}$  を外面に属する頂点から始まるパスと考えることによって，移動指示の整数が与えられた時に，一意に頂点の位置を求めることが出来る． $facevalue(p, q)$  の最適値を求めた際のスケルトンに含まれない入力されたグラフの頂点の移動位置については，あらかじめその頂点集合の順列を定めておけば，パスに属する頂点と同じ方法で移動位置の整数が与えられたときに，各頂点の移動位置を一意に求めることが出来る．

## 4. 実験

### 4.1 実験の内容

交点にダミーの頂点を用いた探索と，本稿で述べたスケルトンを用いた探索の実験結果を

比較する．交点にダミーの頂点を用いた探索は，入力されたグラフの描画に交点があった場合に，交点にダミーの頂点を挿入したグラフの描画を入力した描画と置き換えたこと以外は，スケルトンを用いた探索と同様の方法で探索を行う方法である．実験は路線図の自動描画を例として行う．路線図は駅を頂点，駅と駅の路線によるつながりを辺とした多重辺や自己辺を持たないグラフとする．辺は要素として辺の持つ両駅間に存在する路線を集合として持つ．評価値の導出には，4) で述べられている評価関数を用いる．

#### 4.2 評価値の導出

本実験では描画の基準として辺の長さを一定に保つための基準と，辺を 0 度，45 度，90 度，135 度，180 度，225 度，270 度，315 度の角度に近づけるための基準を用いる．グラフ  $G$  におけるそれぞれの基準に関する評価関数を  $f_{len}(G)$ ， $f_{oct}(G)$  とする． $G$  の評価値は，それぞれの評価関数に重みを掛けた値とする． $f_{len}(G)$  に対する重みを  $w_{len}$ ， $f_{oct}(G)$  に対する重みを  $w_{oct}$  とする． $G$  の評価値を  $value(G)$  とすると，式は下記ようになる．

$$value(G) = w_{len}f_{len}(G) + w_{oct}f_{oct}(G) \quad (10)$$

$f_{len}(G)$  は下記のような関数となる． $L$  は目標とする辺の長さを表す． $d_e$  は  $e$  に含まれる次数 2 の頂点を表す．路線図の自動描画では，計算量の削減のために，次数 2 の頂点を取り除くという操作を行うことがある 4)，6)．描画を求める前に，次数 2 の頂点を取り除き，描画を求めた後に等間隔に取り除いた次数 2 の頂点を戻し，それを描画とする．

$$f_{len}(G) = \sum_{e \in E(G)} \left| \frac{|e|}{L} - (d_e + 1) \right| \quad (11)$$

$f_{oct}(G)$  は下記のような関数となる．

$$f_{oct}(G) = \sum_{(u,v) \in E(G)} \left| \sin 4 \left( \tan^{-1} \frac{|y(u) - y(v)|}{|x(u) - x(v)|} \right) \right| \quad (12)$$

実験では  $w_{len}$  と  $w_{oct}$  の値はそれぞれ 100 とした．探索で頂点の移動位置として考慮するのは，現在の頂点の座標に  $D = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\}$  のいずれかのベクトルを加算した座標としていたが，そのように行くと計算の収束に時間がかかってしまう．そのため，入力として与えられたグラフの描画の辺の平均値に  $1/10$  を掛けて小数部分を切り捨てた値を  $d$  としたとき，現在の頂点の座標に  $D = \{(0,0), (0,d), (d,0), (0,-d), (-d,0)\}$  のいずれかのベクトルを加算した座標を頂点の移動位置とした．

表 1 交点にダミーの頂点を用いた探索の実験結果

Table 1 The result of experiment on no considering intersections search.

データ名	頂点数	交差数	実行時間 (秒)	評価値	維持されなかった交差数	増加した交差数
都営地下鉄	23	2	8	386	0	0
シドニー	31	1	40	679	0	0
京都	61	10	61	1994	1	1
東京メトロ	76	13	6224	1928	4	5

表 2 スケルトンを用いた探索の実験結果

Table 2 The result of experiment on considering intersections search.

データ名	頂点数	交差数	実行時間 (秒)	評価値	維持されなかった交差数	増加した交差数
都営地下鉄	21	2	16	231	0	0
シドニー	30	1	52	495	0	0
京都	51	10	1426	1222	0	0
東京メトロ	63	13	78948	707	0	0

#### 4.3 実験結果と考察

実験結果は表 1，表 2 のようになった．頂点数は，次数 2 の頂点を取り除いたときの頂点数である．同じデータにもかかわらず表 1 と表 2 で頂点数が異なるのは，交点にダミーの頂点を用いた探索では，交点をダミーの頂点に置き換えて計算を行っており，交差数だけスケルトンを用いた探索よりも増えるためである．交差数は入力の段階で交差している箇所の数である．実行時間の単位は秒である．評価値は値が小さいほど良い評価となる．維持されなかった交差数は，入力時に交差していた辺の組の内，描画を求めた後に交差した組ではなくなった辺の組の数である．増加した交差数は，入力時に交差していなかった辺の組の内，描画を求めた後に交差した組となった辺の組の数である．

交差の保存が行えているかどうかを確認する．維持されなかった交差数と，増加した交差数が共に 0 であれば，交差は保存されたと言える．表 1 と表 2 における維持されなかった交差数と，増加した交差数を見比べると，表 1 には交差が保存されないデータがあるが，表 2 についてはすべてのデータについて交差が保存されている．このことから，スケルトンを用いた探索では，交差を保存するための条件が機能していると考えられる．

評価値について考察する．表 1 と表 2 における評価値を見比べると，表 2 の評価値の方が，すべての同じデータを見比べると良い評価値となっている．これは，スケルトンを用いた探索の方が，描画の探索がうまくいっていることを表している．この理由として考えられ

るのは、交点にダミーの頂点を用いた探索では、交点にダミーの頂点を挿入することにより、元々あった辺の評価値を正しく計算できなくなるためだと考えられる。それに対して、スケルトンを用いた探索では、すべての辺に対して正しく評価値を計算でき、探索がうまくいっていると考えられる。

実行時間について考察する。表1と表2の実行時間を見比べると、表2の実行時間の方が、すべての同じデータを見比べると長くなっている。これは、交点にダミーの頂点を用いた探索では、1つの面で考慮しなければならない頂点の数がスケルトンを用いた探索よりも少なくなるためだと考えられる。

## 5. まとめと課題

### 5.1 まとめ

交差の保存を保証したグラフの分割と動的計画法による巨大近傍探索について述べた。実験結果からも、スケルトンを用いた探索では交差の保存を保証できていると考えられる。また、評価値についても、交点にダミーの頂点を用いた探索に比べて、スケルトンを用いた探索の方が良い値が得られた。

### 5.2 課題

本稿で用いた評価関数は、1つの辺から評価値を算出できた。しかし、2辺を用いて評価値を求めるような場合もある4)。そのような場合、本稿で用いたグラフを分割する方法では、その2辺が異なる部分グラフに属した場合に、その2辺の評価値を計算することができず、正しい評価値で探索を行うことができなくなる。そのため、そのような評価関数に対応するためには、アルゴリズムのさらなる改良、あるいはまったく別の方法が必要になる。

## 参考文献

- 1) Purchase, H.: Which aesthetic has the greatest effect on human understanding?, *Graph Drawing* (DiBattista, G., ed.), Lecture Notes in Computer Science, Vol.1353, Springer Berlin / Heidelberg, pp.248–261 (1997).
- 2) Fruchterman, T. M.J. and Reingold, E.M.: Graph drawing by force-directed placement, *Softw. Pract. Exper.*, Vol.21, pp.1129–1164 (1991).
- 3) Nöllenburg, M. and Wolff, A.: A Mixed-Integer Program for Drawing High-Quality Metro Maps, *Graph Drawing* (Healy, P. and Nikolov, N., eds.), Lecture Notes in Computer Science, Vol.3843, Springer Berlin / Heidelberg, pp.321–333 (2006).
- 4) Stott, J. and Rodgers, P.: Metro map layout using multicriteria optimization, *Information Visualisation, 2004. IV 2004. Proceedings. Eighth International Con-*

*ference on*, pp.355 – 362 (2004).

- 5) Ahuja, R.K., Ergun, N., Orlin, J.B. and Punnen, A.P.: A survey of very large-scale neighborhood search techniques, *Discrete Applied Mathematics*, Vol.123, No.1-3, pp. 75–102 (2002).
- 6) Hong, S.-H., Merrick, D. and do Nascimento, H.A.: The Metro Map Layout Problem, *Graph Drawing*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.3383, Springer Berlin / Heidelberg, pp.482–491 (2005).