Vol.2011-AL-133 No.6
2011/1/12

多状態スキーレンタル問題に対する最適競合比の解析

北野琢麻[†1] 藤原洋志[†1] 藤戸敏弘[†1]

古典的スキーレンタル問題[11)] を一般化した多状態スキーレンタル問題[12)] について研究する．プレーヤーにはレンタルか購入の選択肢に加え，初期費用と単位時間毎の両方の料金を支払う選択肢が与えられる．我々は，与えられたインスタンスに対し達成可能な最適戦略の競合比を最適競合比として定義する．そして任意のインスタンスに対し，最適競合比の上限と下限を解析する．下限はプレーヤーにとって最も有利なインスタンスが選ばれたとき，どれだけ良い競合比が達成可能かを示す．一方，上限はいわゆる競合比についての一致する上下界を意味する．我々は，この最適競合比の下限は，プレーヤーの選択肢の数を $k+1$ 個とすると $(k+1)^k/((k+1)^k-k^k)$ であることを示した．このことは，いかなるインスタンスに対し最適戦略をとっても，競合比は $e/(e-1)$ より小さくできないことを意味している．また，状態数を 3 つに限定したものに対し，上限は 2.47，選択肢を 4 つに限定したものに対し，上限は 2.75 であることも示す．

Analysis of the Best Possible Competitive Ratio for Multislope Ski Rental

Takuma Kitano,[†1] Hiroshi Fujiwara[†1] and Toshihiro Fujito[†1]

The multislope ski-rental problem[12)] is an extension of the classical ski-rental problem[11)], where the player has the options of *leasing* skis by paying both the per-time and the initial fees, in addition to *renting* and *buying* options. We define the *best possible competitive ratio* as the competitive ratio of the best strategy for a given instance, and analyze its infimum and supremum over arbitrary instances. The infimum indicates how much the competitive ratio is improved when the best instance and the best strategy are taken. On the other hand, the supremum is equivalent to a matching upper and lower bound of the competitive ratio. We prove that for the $(k+1)$-slope problem, the infimum is $(k+1)^k/((k+1)^k-k^k)$, which implies that no matter how many options the player has, the competitive ratio can be no better than $e/(e-1)\approx 1.58$. We also show that the supremum is 2.47 for $k=2$ and 2.75 for $k=3$, which is the first matching bound for each.

1. はじめに

多状態スキーレンタル問題[12)] とは，古典的スキーレンタル問題[11)] を一般化した問題である．あるスキー店にはスキーをするための**状態**（料金設定がされたプランのようなもの）が $k+1$ 個用意されている．各状態 $i(0\le i\le k)$ には，スキーをする度に支払うコスト r_i と，状態 i から状態 j に遷移するときに必要なコスト $b_{i,j}$ が設定されている．この $\mathbf{r}$ と $\mathbf{b}$ のベクトルの組 $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ をインスタンスとする．スキーヤーはインスタンス $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ の料金設定に従い，スキーをする．このとき，スキーヤーはインスタンス $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ に対し，ある戦略 $\mathbf{x}$ を立てる．各成分 $x_i(0\le i\le k)$ は状態 i に遷移するときのスキーの回数を示している．ここで例として，$k=2$，すなわち状態数は 3 つで，戦略を $\mathbf{x}=(x_0,x_1,x_2)$，スキーに行く回数を $t(x_1<t<x_2)$ としたとき，スキーヤーが支払うべきコストは次のように計算できる．状態 0 のまま x_1 回スキーに行き，その後状態 1 に遷移し，そして残りの $t-x_1$ 回まで状態 1 でスキーをするので総コストは $r_0\cdot x_1+b_{0,1}+r_1\cdot(t-x_1)$ となる．一般に，戦略 $\mathbf{x}$ に従うスキーヤーが t 回スキーに行く場合に支払うべきコストは以下の式で表される．

$$ON(\mathbf{x},t) := r_i(t-x_i)+\sum_{l=0}^{i-1} r_l(x_{l+1}-x_l)+\sum_{l\prec m\le i} b_{l,m} \qquad (x_i<t<x_{i+1})$$

上式に出てくる $\prec$ は戦略 $\mathbf{x}$ における状態の遷移を表している (第 2 章で説明する)．ここで，r_0 =(1 回あたりのレンタルコスト)，$b_{0,1}$ =(スキー板購入コスト) とすると，古典的スキーレンタル問題と同等となることを確認して欲しい．

スキーヤーにとって自身が将来スキーに行く回数 t を知ることは出来ない．そこで，t がいくらであろうと出来るだけコストを抑えることを目的とする．さて，スキーに行く回数 t を予め知っている最適オフラインプレーヤーを想定し，彼が t 回スキーに行く場合に支払うコストを $OPT(t)$ とする．インスタンス $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ に対し，スキーヤーが戦略 $\mathbf{x}$ を決めたと

†1 豊橋技術科学大学
Toyohashi University of Technology

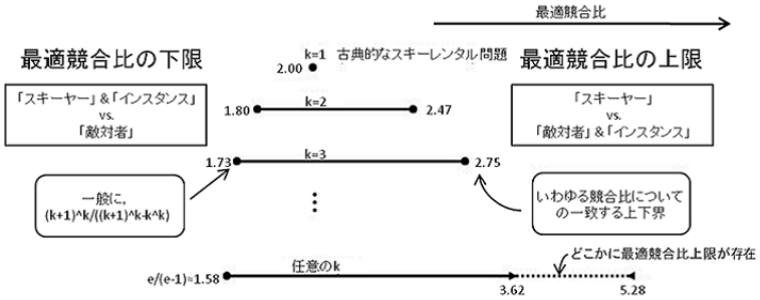

図 1 $(k+1)$ 状態スキーレンタル問題に対しての最適競合比の範囲の図．下限／上限はそれぞれ最適／最悪なインスタンスで達成される．任意の k に対する，いわゆる競合比の下界と上界はそれぞれ文献 3) と文献 1) で与えられる．

Fig. 1 Illustration of the range of the best possible competitive ratio for $(k+1)$-slope ski-rental problem. The infimum/supremum is achieved by the best/worst instance, respectively. The lower and upper bounds of the competitive ratio (in a usual sence) for arbitrary k are found in 3) and 1), respectively.

き，以下の式を満たすような c を戦略 $\mathbf{x}$ の**競合比**と呼ぶ．

$$ON(\mathbf{x},t) - c \cdot OPT(t) \leq 0, \quad for \quad t \geq 0$$

この競合比 c が小さい戦略ほど良い戦略であると言える．

これまで，与えられたインスタンス $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ に対し，達成可能な最適な戦略と最適な競合比を数値的に計算するアルゴリズムが知られていた[1]．しかしながら，スキーヤーが常に最適な戦略を選択するという仮定で，スキーヤーにとって最も有利（つまり競合比を最小に出来る），あるいは最も不利（競合比が最大になってしまう）なインスタンスとはどういうものか，またそのようなインスタンスに対し，競合比がどのような値をとるのか分かっていなかった．

1.1 我々の成果

我々は，与えられたインスタンスに対する達成可能な最適な競合比を**最適競合比**と定義し，これを解析することにより以下の結果を得た．

(I) 状態数が $k+1$ のインスタンスのうち，スキーヤーにとって最も有利なインスタンスを求め，かつそのときの最適競合比は $(k+1)^k/((k+1)^k - k^k)$ であることを証明した．その値は $k=2$ に対して 1.80，$k=3$ に対して 1.73，$k=4$ に対して 1.70 となる．任意の状態数からインスタンスを選ぶとすると，最適競合比の下限は $e/(e-1) \approx 1.58$ となる．**図 1** 参照．スキーヤーにとって最も有利なインスタンスを選べば，競合比はいくらでも 1 に近づけることが出来ると思われるかもしれない．もしそうならば最適競合比の下限は 1 ということになろう．しかし，それは誤りである．我々は最適競合比の下限が非自明な値であることを証明した．また，任意にインスタンスの状態数を増やすことを許す場合でも最適競合比を 1 に近づけることは出来ないことも証明した．さて，スキーヤーが自身にとって有利なインスタンスを考えるということは，スキーレンタルの文脈では少々現実離れしたことかもしれない．しかし実は 1.2 節で紹介する動的電力管理問題ではうまく説明がつく．

(II) 状態数が 3，4 のインスタンスのうち，それぞれスキーヤーにとって最も不利なインスタンスを求め，それぞれの最適競合比を求めた．その値はそれぞれ 2.47，2.75 となることを示した．図 1 参照．最適競合比の上限とは「いわゆる競合比についての一致する上下界」と同等である．このことは次のようにして確かめられる．スキーレンタル問題の文脈では，もし全ての $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ に対して競合比 c_u となる戦略 $\mathbf{x}$ が存在すれば，c_u は「いわゆる競合比の上界」であると言われる．そのような c_u の集合は，任意のインスタンス上の最適競合比の上界の集合と等しいことが容易に分かる．従って，もし最適競合比の上限を得ることが出来れば，それは「いわゆる競合比の上界」の集合のうち，最小なものと等しい．他方では，どんな戦略 $\mathbf{x}$ に対しても競合比 c_l とならないような $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ が存在すれば，c_l は「いわゆる競合比の下界」と言われる．同様にして，最適競合比の上限は「いわゆる競合比の下界」の集合の上限とも一致する．残念ながら我々は任意の k についての最適競合比の上限を得ていない．しかし，上で論じたことと合わせると，既存結果よりこれは $(5+\sqrt{5})/2 \approx 3.62$ より大きく[3]，$3+2\sqrt{2} \approx 5.28$ 以下[1] であることがいえる．

オンライン問題はゲームとしてよく認知されている．古典的スキーレンタル問題においては「スキーヤー」と「スキー回数を決める敵対者」との間の，$ON(\mathbf{x},t)/OPT(t)$ をペイオフとするゲームである．多状態スキーレンタル問題は次のようなゲームとして理解することが出来る．ここで「インスタンス」を新たなプレーヤーと見なせる．図 1 のように，最適競合比の下限とは,「スキーヤー」と「インスタンス」が協力し，それに対し「スキー回数を決める敵対者」と競うゲームでの最適なペイオフである．同様に，上限とは,「スキー回数を決める敵対者」と「インスタンス」が協力し，それに対し「スキーヤー」が競うゲームでの最適なペイオフである．

1.2 動的電力管理問題との関連

多状態スキーレンタル問題は，Windows のスタンバイ状態や休止状態のような，低電力

表 1 多状態スキーレンタル問題と動的電力管理問題の対応表
Table 1 Correspondence between Multislope Ski Rental and Dynamic Power Management.

多状態スキーレンタル問題	対象	動的電力管理問題
料金設定のプラン	状態	低電力モード
1 回あたりのスキー料金	$\mathbf{r}$	消費電力
状態遷移料金	$\mathbf{b}$	状態遷移電力量
スキーに行く回数	t	アイドル期間の長さ
スキーヤーによる料金プランの遷移の方針	$\mathbf{x}$	機器による待機状態の遷移の方針
スキー回数が t に達した時の総コスト	$ON(\mathbf{x}, t)$	時刻 t でユーザが戻った場合に稼働再開するまでの総コスト

モードを装備した機器の省電力問題 (動的電力管理問題) を表しており，実際その方面から研究は始まった[7]．これから動的電力管理問題の文脈で，多状態スキーレンタル問題を考えるとどうなるのかを示す．ユーザが機器から一時的に離れている期間をアイドル期間と呼び，その長さを t とする．この問題のコストはアイドル期間中に消費される電力量である．状態とはすなわち低電力モードを意味し，消費電力 r_i，状態 i から状態 j に遷移するときに消費する電力量 $b_{i,j}$ が設定されている．ユーザが機器から離れ，アイドル期間がスタートする．ここで，機器はある戦略に則り，状態を遷移する．戦略 $\mathbf{x}$ はアイドル期間の長さ t によってどの状態で待機をするか，という方針を示したものであり，$x_i(0 \le i \le k)$ は状態 i に遷移する時刻を示している．機器はユーザが戻って来るまである状態で待機し，電力を消費する．ある程度待ってもユーザが戻って来なければ r が低い状態に遷移する．この時，状態を遷移すればするほど消費電力は小さくなるが，その代わりに稼働状態に起ちあがるときに大きな電力量を消費することになることを念頭に置いてほしい．多状態スキーレンタル問題と同様に，この問題の難しさは機器にはユーザがいつ戻ってくるかという情報が分からないことにある．そこで，t がいくらであろうと消費電力を出来るだけ抑えることを目的とする．多状態スキーレンタル問題との対応は**表 1** を参照.

1.1 節において，最適競合比の下限の議論で，スキーヤーが自身にとって有利なインスタンスを考えることは少々現実離れしている，という話をした。動的電力管理問題においては，機器のメーカーが自身にとって有利なインスタンスを考える，というのは妥当なことである．というのもメーカーは機器の低電力モードの設計とそれに基づいた最適な戦略の設計を両方行うことが出来るからである．それにより限られた状態数の制約の中で省電力性能の高い製品を設計でき，それは商品価値を高めることにつながる.

1.3 関連研究

古典的（すなわち 2 状態）スキーレンタル問題は snoopy caching の文脈で最初に紹介され，競合比 2 の最適戦略が与えられた[11]．文献 8) では，この問題が様々な実用的なアプリケーションに適用出来ることを確認した．1.2 節でも紹介したが，文献 7) では多状態スキーレンタル問題を動的電力管理問題として考察した．Augustine らは与えられたインスタンスに対して最適な戦略を出力するアルゴリズムを開発した[1]．また，任意のインスタンスに対して競合比が $3+2\sqrt{2}(\approx 5.83)$ となる戦略を与えた．Irani らは加法的なインスタンス (第 2 章で紹介) に対して競合比が 2 となる戦略[7] を与えた．Damaschke は $(5+\sqrt{5})/2(\approx 3.62)$ の下界を与えた[3]．Bahncard 問題[5] は 2 状態スキーレンタル問題の別の拡張である.

次に確率的戦略についての研究を述べる．Karlin らは 2 状態スキーレンタル問題に対して競合比 $e/(e-1)$ となる最適な確率的戦略を与えた[10]．また，Karlin らはこれを TCP Acknowledgment などの問題に適用した[9]．El-Yaniv らは本問題を利息が発生するモデル上で研究した[4]．Lotker らは購入とリースの 2 つの状態を持つ問題を研究した[13]．また彼らの他の論文[12] で，多状態スキーレンタル問題に対して，任意のインスタンスに対して競合比が e の確率的戦略を与えた．さらに，彼らは加法的なインスタンスに対し競合比 $e/(e-1)$ の確率的戦略を与え，与えられた加法的なインスタンスに対して最適な確率的戦略を計算するアルゴリズムを開発した.

最後に，スキーの継続期間が確率変数であるようなモデルを紹介する．このモデルの 2 状態スキーレンタル問題に対して，Karlin らはオフラインのコストの期待値とオンラインのコストの期待値の比の下界を与えた[10]．また，Irani らは多状態で加法的なインスタンスに対しても同じ下界が言えることを証明した[7]．藤原と岩間はオフラインのコストとオンラインのコストの比の期待値を用い 2 状態問題を研究した[6]．Xu らは利息を取り入れたモデルを考察した[14]．Bienkowski らは時間とともに価格が変動するモデルを研究した[2]．

2. 多状態スキーレンタル問題

第 1 章において，多状態スキーレンタル問題のインスタンス，スキーヤーの戦略，スキーヤーが支払うコスト，最適オフラインプレーヤーが支払うコストを紹介したが，まだ詳細を述べていないのでここで詳しく説明する．これ以降 k と添え字以外の全ての文字は実数とする.

- **インスタンス**

  インスタンス $(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ は以下の制約を満たしているもののみを扱っても一般性を失わな

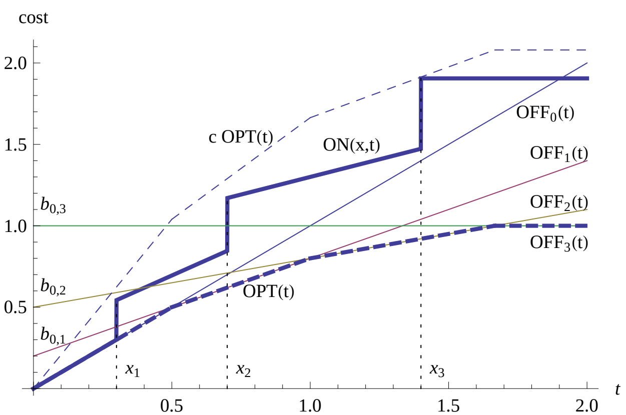

図 2 4 状態スキーレンタル問題のインスタンスに対するコスト関数．t はスキーヤーがスキーに行く回数である．$ON(\mathbf{x}, t)$ は x_1, x_2, x_3 で状態の遷移によりジャンプする．それ以外の所で傾き r_i で線形に増加する．破線は $OPT(t)$ を示す．これは t が分かっているため，途中で遷移をせず初めからある状態に最適に遷移する．競合比については視覚的に説明出来る．すなわち，$ON(\mathbf{x}, t)$ が $c \cdot OPT(t)$ より下に描かれているなら，戦略 $\mathbf{x}$ は競合比 c であると言える．

Fig. 2 Cost functions for a 4-slope ski-rental instance. $ON(\mathbf{x}, t)$ jumps at $t = x_1, x_2,$ and, x_3 because of transitions of states. Elsewhere it increases linearly with slope of r_i. The dashed line is $OPT(t)$, which optimally transitions a state at the beginning without another transition, based on the information of t. The competitiveness can be explained visually: If $ON(\mathbf{x}, t)$ is drawn under $c \cdot OPT(t)$, then strategy $\mathbf{x}$ is c-competitive.

い．制約を満たす $(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ の集合を $I(k)$ と書く．

$$1 = r_0 > r_1 > \cdots > r_k = 0, \tag{2.1}$$

$$0 = b_{0,0} \le b_{0,1} \le \cdots \le b_{0,k} = 1, \tag{2.2}$$

$$b_{l,j} - b_{l,i} \le b_{i,j} \le b_{l,j}, \qquad for\ 0 \le l < i < j \le k, \tag{2.3}$$

$$b_{0,i+1}(-r_{i-1} + r_i) + b_{0,i}(r_{i-1} - r_{i+1}) + b_{0,i-1}(-r_i + r_{i+1}) \le 0, \qquad for\ 1 \le i \le k-1. \tag{2.4}$$

全ての値は 0 と 1 の範囲で正規化している．加えてスキー板購入コスト $b_{0,k}$ を 1 とし，かつ状態 0(つまりレンタル) で 1 回スキーに行くと，そのコストも 1 となるように設定してある．(2.1) 式は，番号が大きな状態ほど，スキー 1 回に掛かるコストは小さいことを意味する．(2.2) 式は，番号が大きな状態ほど，状態 0 からの遷移コストが大きいことを表す．こう並べておくと番号の若い状態に遷移することにより得しないから，我々は $b_{j,i}(i < j)$ は定義しない．状態 1 から状態 $k-1$ までは，初期費用と 1 回あたりの費用の両方を払うプランである．(2.3) 式において，左の不等号は一瞬だけ他の状態に遷移した方が得となることを防いでいる．また，右の不等号が成り立っていないと，状態 i から j への遷移コストは，状態 i から l へ遷移し状態 l から状態 j へ遷移したときのコストより大きくなってしまう．文献 7) では，これらの制約を動的電力管理問題の文脈で解説している．(2.4) 式は，**図 2** を参照してもらうと分かりやすいが，OFF_i の線は OFF_{i-1} の線と OFF_{i+1} の線の包絡線よりも下に現れることを示す．これは，最適オフラインプレーヤーが決して利用しない状態は考慮しない，つまり，$OPT(t)$ に現れない状態は削除することを示している．

また，以下の制約を追加したインスタンスを加法的なインスタンスと言う．加法的なインスタンスの集合を $I_A(k)$ と書く．

$$b_{l,n} = b_{l,m} + b_{m,n} \quad for\ 0 < l < m < n \le k$$

- **戦略**

時刻 0 では状態 0 である設定としても一般性を失わない．先ほど述べたように，常に番号の大きい状態に遷移するとしてよい．状態 i から状態 $j(i < j)$ にスキップして遷移するような戦略は $x_{i+1} = \cdots = x_{j-1} = x_j$ と考えればコストを特別扱いしなくて済む．戦略 $\mathbf{x}$ において状態 i から状態 j への遷移することを $i \prec j$ と表す．戦略の集合を $S := \{\mathbf{x} | 0 = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_k\}$ とする．

- **スキーヤーが支払うコスト**

スキーヤーが支払うべきコストは第 1 章で $ON(\mathbf{x}, t)$ と紹介したが，特に $t = x_i$ のとき，つまりスキーに行った回数が丁度状態遷移のときのコストは，状態 i に遷移した後に支払うコストとし，

$$ON(\mathbf{x}, x_i) := \sum_{l=0}^{i-1} r_l(x_{l+1} - x_l) + \sum_{l \prec m \le i} b_{l,m}$$

とする．図 2 に 4 状態スキーレンタル問題のあるインスタンスに対する例を図示する．

- **最適オフラインプレーヤーが支払うコスト**

最適オフラインプレーヤーは自信が将来スキーに行く回数を予め知っているので，その回数で最もコストが小さくなるような状態に最初から遷移しておくことが出来る．スキー回数 t のときの状態 j のコストは

$$OFF_j(t) := r_j t + b_{0,j}$$

と表せるので，t のとき最も小さくなる $OFF_j(t)$ が支払うべきコストとなる．一般に，

最適オフラインプレーヤーが支払うコストは以下のように表せる．

$$OPT(t) := \min_{0 \le j \le k} OFF_j(t)$$

$OPT(t)$ は図 2 の破線を参照．

3. 最適競合比

我々は，与えられたインスタンス $(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \in I(k)$ に対し，**最適競合比**を

$$\tilde{c}(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = \inf\{c|(\forall t \ge 0) ON(\mathbf{x}, t) - c \cdot OPT(t) \le 0, x \in S\}$$

と定義する．すなわち $(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ について達成可能な戦略の競合比の下限である．次の補題を用いると，競合比が c であるという条件は緩和され，

$$\tilde{c}(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = \inf\{c|(0 \le \forall i \le k, 0 \le \forall j \le k) ON(\mathbf{x}, x_i) - c \cdot OFF_j(x_i) \le 0, x \in S\}$$

を得る．以降，$g_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{b}, c) := ON(\mathbf{x}, x_i) - c \cdot OFF_j(x_i)$ と書く．

補題 3.1 *(文献 1))*．競合比が c となる戦略 $\mathbf{x}$ が存在すれば，全ての $i(0 \le i \le k)$ に対して $ON(\mathbf{x}', x_i') = c \cdot OPT(x_i')$ となる戦略 $\mathbf{x}'$ が存在する．

我々は最適競合比の下限と上限について，さらに k を固定した場合と任意とした場合それぞれについて議論を進めていくが，次のようなことが暗黙に成立する．ある状態数のインスタンスは，それより状態数の少ないインスタンスを模倣することが出来る．よって，(状態数 k についての下限)≥(状態数 $k+1$ についての下限)，(状態数 k についての上限)≤(状態数 $k+1$ についての上限) が言える．当然，任意の k についての最適競合比下限は固定した k についての最適競合比下限の下限であり，任意の k についての最適競合比上限は固定した k についての最適競合比上限の上限となる．

4. 最適競合比の下限

まず固定した k に対する下限について議論する．

定理 4.1 $\inf\{\tilde{c}(\mathbf{r}, \mathbf{b})|(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \in I(k)\} = \min\{\tilde{c}(\mathbf{r}, \mathbf{b})|(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \in I(k)\} = (k+1)^k/((k+1)^k - k^k)$.

最小値を達成する $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{c})$ は以下の通りである．

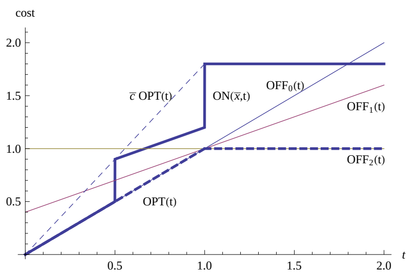

図 3 $k = 2$ の最適競合比の下限を満たすインスタンスと戦略

Fig. 3 Instance and strategy that achieve the infimum for $k = 2$.

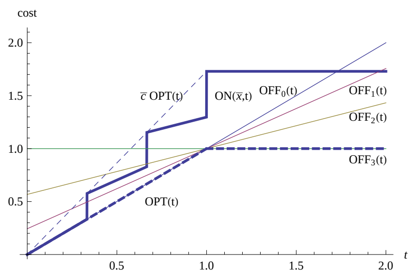

図 4 $k = 3$ の最適競合比の下限を満たすインスタンスと戦略

Fig. 4 Instance and strategy that achieve the infimum for $k = 3$.

$$\bar{x}_i = \frac{i}{k}, \qquad for \ \ 0 \le i \le k, \qquad (4.1)$$

$$\bar{r}_i = \bar{c} + (1 - \bar{c})(1 + \frac{1}{k})^i, \qquad for \ \ 0 \le i \le k, \qquad (4.2)$$

$$\bar{b}_{0,i} = 1 - \bar{r}_i, \qquad for \ \ 0 \le i \le k, \qquad (4.3)$$

$$\bar{b}_{i,j} = \bar{b}_{0,j} - \bar{b}_{0,i}, \qquad for \ \ 0 < i < j \le k, \qquad (4.4)$$

$$\bar{c} = \frac{(k+1)^k}{(k+1)^k - k^k}. \qquad (4.5)$$

定理 4.1 の略証を 4.1 節に載せる．

ここで最適競合比を最小とするインスタンスと戦略の数値例を挙げる．$k = 2$ のとき，$\bar{c} = 9/5 = 1.80$，$(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 1/2, 1)$，$(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2) = (1, 3/5, 0)$，$(\bar{b}_{0,1}, \bar{b}_{0,2}, \bar{b}_{1,2}) = (2/5, 1, 3/5)$ となる．また，$k = 3$ のとき，$\bar{c} = 64/37 \approx 1.73$，$(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 1/3, 2/3, 1)$，$(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = (1, 28/37, 16/37, 0)$，$(\bar{b}_{0,1}, \bar{b}_{0,2}, \bar{b}_{0,3}, \bar{b}_{1,2}, \bar{b}_{1,3}, \bar{b}_{2,3}) = (9/37, 21/37, 1, 12/37, 28/37, 16/37)$ となる．**図 3** と**図 4** にそれぞれの状態についての $OFF_j(t)$ と戦略のコスト関数 $ON(\mathbf{x}, t)$ を図示する．

(4.4) 式より，インスタンスは加法的であることに気付く．また，上図より，戦略の結果の特徴を見る．まず，最適オフラインプレーヤーの戦略の結果に注目すると，$OFF_i(t)$ の線は全て $(t, cost) = (1, 1)$ の点を通っており，それゆえ $OFF_i(t)(1 \le i \le k-1)$ の線はその点だけに現れている．また，一般に (2.4) 式より $OPT(t)$ とは $OFF_i(t)$ の包絡線と考えることが出来る．これらのことから，最適オフラインプレーヤーの戦略は状態 0 と k しか使

えなくなっている．他の状態を使うことが出来ないので，このインスタンスは最適オフラインプレーヤーにとっては縛りがきつく，厳しいものとなっている．他方で，スキーヤーの戦略の結果は，次の状態への遷移は毎回 $1/k$ の間隔を保ち，全ての状態を使うことが最善となっている．

次に任意の k について考える．(4.5) 式より，k が増加する毎に $\bar{c}$ は単調減少する．ここで $k \to \infty$ とすると，以下を得る．

$$\bar{c} = 1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k - 1} \to 1 + \frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1}$$

これは以下の系を与える．任意のインスタンスに対しても，競合比が $e/(e-1)$ を下回るような戦略は無いことが言える．

系 4.1 $\inf\{\tilde{c}(\mathbf{r},\mathbf{b})|(\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I(k), k \geq 2\} = e/(e-1)$.

4.1 定理 4.1 の略証

次の補題により，最適競合比下限の求解を非凸計画として定式化出来る．加法的なインスタンスのみを考えた場合，スキーヤーは全ての状態に遷移すると仮定してよいことに注意されたい．つまり状態をスキップして得することはない．このことにより，$ON(\mathbf{x}, t)$ の最後の総和を戦略 $\mathbf{x}$ に依存しない総和に置き換えることが出来る．

補題 4.1 最適競合比下限の求解を定式化した問題を (Q) とする．$(\mathbf{x},\mathbf{r},\mathbf{b},c)$ は問題 (Q) で実行可能であると仮定する．$0 < i < j \leq k$ に対し $b'_{i,j} := b_{0,j} - b_{0,i}$，$0 \leq i \leq k$ に対し $b'_{0,i} = b_{0,i}$ としたベクトルを $\mathbf{b}'$ とする．そのとき，$(\mathbf{x},\mathbf{r},\mathbf{b}',c)$ も $(\mathbf{r},\mathbf{b}') \in I_A(k)$ で問題 (Q) で実行可能である．

証明 $(\mathbf{r},\mathbf{b}') \in I_A(k)$ は定義より容易に確かめられる．各 $0 \leq i \leq k$ と各 $0 \leq j \leq k$ に対する $g_{i,j}$ を考える．全ての $l \prec m \leq i$ に対して，$b_{l,m} \geq b_{0,m} - b_{0,l} = b'_{l,m}$ が成り立つ．従って，$\mathbf{b}$ を $\mathbf{b}'$ と置き換えることで，$ON(\mathbf{x}, x_i)$ は減少するか，あるいは変化しない．他方で，$OFF_j(x_i)$ は変化しない．結果として，$g_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{r},\mathbf{b}',c) \leq 0$ を得る． □

次の非凸計画を得る．

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{minimize} & c & \\ & \text{subject to} & g_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{r},\mathbf{b},c) \leq 0, & for \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k, \\ & & \mathbf{x} \in S, (\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I_A(k). & \end{array}$$

我々は問題 (P) の $\mathbf{r}$ をパラメータとしたパラメトリック最適化問題を考える．この問題も依然として非凸計画であるが，次の補題を利用すると解析的に解ける．

補題 4.2 実数 c をラベルとする集合 $M(c)$ を考える．どんな $c < c'$ に対しても $M(c) \subset M(c')$ を満たす，すなわち $M(c)$ は $M(c')$ の真部分集合であると仮定する．もし，$M(\bar{c})$ が単集合となるような $\bar{c}$ が存在するならば，$\inf\{c|M(c) \neq \emptyset\} = \min\{c|M(c) \neq \emptyset\} = \bar{c}$ となる．

証明 $A := \{c|M(c) \neq \emptyset\}$ を考える．$M(\bar{c})$ が単集合となるような $\bar{c}$ に対して $\bar{c} \in A$ は自明である．仮定により，どんな $c > \bar{c}$ に対しても $M(\bar{c}) \subset M(c)$ が成立する．そのとき，$M(c) \neq \emptyset$ であり $c \in A$ となる．他方で，各 $c < \bar{c}$ に対し $M(c) \subset M(\bar{c})$ が成立する．$M(\bar{c})$ は単集合より，$M(c) = \emptyset$ となる．よって $c \notin A$ となる．従って，どんな $c \in A$ に対しても $\bar{c} \leq c$ が成り立つ．$\bar{c} \in A$ が成立することと合わせて，$\bar{c} = \min A$ を得る． □

我々は，$g_{0,0} = g_{1,0} = \cdots = g_{k,0} = 0$ 及び $g_{k,k} = 0$ を解いたものがパラメトリック最適化問題の解であると予想する．そしてそれが実際に最適解であることを補題 4.2 より導く．結果として $\mathbf{r}$ をパラメータとした最適化関数を得る．最後に $\mathbf{r}$ について最適化を行い，既に挙げた $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{b}},\bar{c})$ が最小を達成することを示す．

5. 最適競合比の上限

まず固定した k に対する上限について議論する．我々は $k = 2$，3 についての最適競合比の上限を示し，以下の定理を与える．

定理 5.1 $\sup\{\tilde{c}(\mathbf{r},\mathbf{b})|(\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I(2)\}$ は方程式 $c^3 - 4c^2 + 5c - 3 = 0$ の解であり，近似値は 2.47 である．

定理 5.2 $\sup\{\tilde{c}(\mathbf{r},\mathbf{b})|(\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I(3)\}$ は方程式 $c^3 - 5c^2 + 8c - 5 = 0$ の解であり，近似値は 2.75 である．

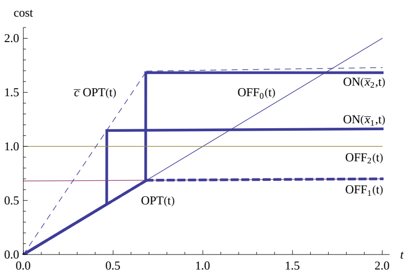

図 5 $k=2$ の最適競合比の上限を満たすインスタンスと戦略．($\bar{r}_1$ は 0.01 とする)
Fig. 5 Instance and strategy that asymptotically achieve the supremum for $k=2$. $\bar{r}_1$ is set 0.01.

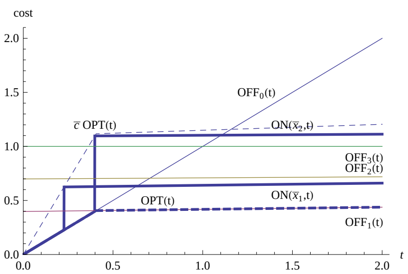

図 6 $k=3$ の最適競合比の上限を満たすインスタンスと戦略．($\bar{r}_1$ を 0.02，$\bar{r}_2$ を 0.01 とする)
Fig. 6 Instance and strategy that asymptotically achieve the supremum for $k=3$. $\bar{r}_1$ and $\bar{r}_2$ are set 0.02 and 0.01, respectively.

定理 5.1，5.2 の略証を 5.1 節に載せる．

ここで，漸近的に上限を得るインスタンスの数値例を挙げる．$k=2$ のとき，$(\bar{r}_0,\bar{r}_1,\bar{r}_2)=(1,\varepsilon_1,0)$，$(\bar{b}_{0,1},\bar{b}_{0,2},\bar{b}_{1,2})=(0.68,1,1)$ となる．$k=3$ のとき，$(\bar{r}_0,\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3)=(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,0)$，$(\bar{b}_{0,1},\bar{b}_{0,2},\bar{b}_{0,3},\bar{b}_{1,2},\bar{b}_{1,3},\bar{b}_{2,3})=(0.41,0.71,1,0.71,1,1)$ となる．**図 5**，**図 6** を参照．ε_1，ε_2 は微小な正数である．これらのインスタンスはスキーヤーにとって最も不利であると言える．この図から，中間の状態の $r_i (1 \le i \le k-1)$ はどれも 0 に近いことが分かる．また，インスタンスは加法的ではない事に気付く．ここで得られたインスタンスでは，全ての $0<i<j\le k$ に対し，$b_{i,j}=b_{0,j}$ が成立する．我々は全ての k に対しても，この性質を満たすインスタンスが上限を達成するのではないかと推測している．

また，各 k に対して上限を達成する戦略を以下に示す．いくつかの戦略が同時に上限を達成するが，状態をスキップする戦略もあることに注意されたい．記号 $i \prec j$ は状態 i から状態 j へ遷移することを表すのであった．各戦略は，$k=2$ のとき，$0 \prec 2$ の戦略は $\bar{\mathbf{x}}_1=(0,0.68,0.68)$，$0 \prec 1 \prec 2$ の戦略は $\bar{\mathbf{x}}_2=(0,0.47,1/\delta_1)$ となる．$k=3$ のとき，$0 \prec 1 \prec 3$ の戦略は $\bar{x}_1=(0,0.23,1/\delta_1,1/\delta_1)$，$0 \prec 2 \prec 3$ の戦略は $\bar{\mathbf{x}}_2=(0,0.41,0.41,1/\delta_2)$ となる．δ_1，δ_2 は $\bar{\mathbf{r}}$ の ε によって決まる．図 5，図 6 を参照．

任意の k については上限はまだ解明出来ていない．Augustine らにより，$3+2\sqrt{2}$ の上界が与えられており[1]，また Damaschke により $(5+\sqrt{5})/2$ の下界が与えられている[3]．これらの結果から，最適競合比の上限はこの間にあると言える．

定理 5.3 *(文献 3))*. $(5+\sqrt{5})/2 < \sup\{\tilde{c}(\mathbf{r},\mathbf{b}) | (\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I(k), k \ge 2\}$.

定理 5.4 *(文献 1))*. $\sup\{\tilde{c}(\mathbf{r},\mathbf{b}) | (\mathbf{r},\mathbf{b}) \in I(k), k \ge 2\} \le 3+2\sqrt{2}$.

5.1 定理 5.1，5.2 の略証

これらの 2 つの定理はそれぞれ，ほぼ同様にして示される．特に技巧的工夫はなく，地道に解いていく他無いようである．以下ではその流れについてのみ説明する．

(I) まずは，最適競合比を $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ で表す．ここで注意すべきことは，直ちに数理計画に定式化出来ないことである．$ON(\mathbf{x},t)$ で現れる最後の総和のとり方は，戦略 $\mathbf{x}$ に依存するからである．これを解決するため戦略の集合 S を，どの戦略をスキップするかに関し分割する．それぞれ戦略を部分集合に制限した場合の最適競合比は，非凸計画の解として与えられる．我々は解を予想し補題 4.2 を適用することによりそれぞれの最適解を得る．そもそも求めたい最適競合比は，それらの最小値である (min が残るが放っておく)．途中，部分集合上の最適解が min で表されるような (すなわち $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ に依存して最適解が異なる) 非凸計画も出てくるが，ここでまとめて最小をとれば最適競合比が得られる．

(II) そして $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ で表された最適競合比を $(\mathbf{r},\mathbf{b})$ について最大化する．これは max min の形なので，新たに変数 c を導入し，(I) の非凸計画の解が全て c 以上であるという制約条件を課せば非凸計画となる．再度補題 4.2 を適用し最適解を得る． □

6. おわりに

本論文では，古典的スキーレンタル問題を一般化した多状態スキーレンタル問題について最適競合比に注目して研究を行った．そして任意のインスタンスに対する最適競合比の下限を示し，状態数が 3，4 の時のインスタンスに対する最適競合比の上限を示した．状態数が 5 以上のインスタンスに対しては，どの状態を使った戦略なら最適競合比の上限を達成するのかということを現在調査中である．そして，任意の状態数のインスタンスに対する最適競合比の上限を示すことを目標とする．

また，今回扱っているインスタンスは $r_k=0$((2.1) 式参照) となるもののみである．実はこの制約は，最適競合比下限については本質的に効いてくる．ただし，$r_k>0$ とした場合は，問題 (P)(4.1 節参照) の解 (つまり単集合) を見つけることが容易ではない．Augustine らのアルゴリズム[1] は $r_k>0$ とした場合でも正しく動作するので，この点は今後解決すべ

き問題である.

参 考 文 献

1) J. Augustine, S. Irani, and C. Swamy. Optimal power-down strategies. In *Proc. FOCS '04*, pp. 530–539, 2004.
2) M.Bienkowski. Price fluctuations: To buy or to rent. In *Proc. WAOA '09*, Vol. 5893 of *LNCS*, pp. 25–36. Springer, 2009.
3) P.Damaschke. Nearly optimal strategies for special cases of on-line capital investment. *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 302, No. 1-3, pp. 35–44, 2003.
4) R.El-Yaniv, R.Kaniel, and N.Linial. Competitive optimal on-line leasing. *Algorithmica*, Vol.25, No.1, pp. 116–140, 1999.
5) R.Fleischer. On the Bahncard problem. *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 268, No.1, pp. 161–174, 2001.
6) H.Fujiwara and K.Iwama. Average-case competitive analyses for ski-rental problems. *Algorithmica*, Vol.42, No.1, pp. 95–107, 2005.
7) S.Irani, S.Shukla, and R.Gupta. Online strategies for dynamic power management in systems with multiple power-saving states. *ACM Trans. Embed. Comput. Syst.*, Vol.2, No.3, pp. 325–346, 2003.
8) A.R. Karlin. On the performance of competitive algorithms in practice. In A.Fiat and G.J. Woeginger, editors, *Online Algorithms*, Vol. 1442 of *LNCS*, pp. 373–384. Springer, 1996.
9) A.R. Karlin, C. Kenyon, and D. Randall. Dynamic TCP acknowledgement and other stories about $e/(e-1)$. In *Proc. STOC '01*, pp. 502–509, 2001.
10) A.R. Karlin, M.S. Manasse, L.McGeogh, and S.Owicki. Competitive randomized algorithms for nonuniform problems. *Algorithmica*, Vol.11, No.6, pp. 542–571, 1994.
11) A.R. Karlin, M.S. Manasse, L.Rudolph, and D.D. Sleator. Competitive snoopy caching. *Algorithmica*, Vol.3, pp. 77–119, 1988.
12) Z.Lotker, B.Patt-Shamir, and D.Rawitz. Rent, lease or buy: Randomized algorithms for multislope ski rental. In *Proc. STACS '08*, pp. 503–514, 2008.
13) Z.Lotker, B.Patt-Shamir, and D.Rawitz. Ski rental with two general options. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 108, No.6, pp. 365–368, 2008.
14) Yinfeng Xu, Weijun Xu, and Hongyi Li. On the on-line rent-or-buy problem in probabilistic environments. *J. of Global Optimization*, Vol.38, No.1, pp. 1–20, 2007.