論 文

# 電子計算機による多重3値論理関数の簡単化*

大 倉 良 昭** 原 田 尚 文***
島 田 良 作**** 為 貞 建 臣***

**Abstract**

A practical method of minimization of multiple-output-functions of ternary switching circuits is presented in this paper.

First, a given multiple-output-function is expanded into a minterm-expansion-form. Every multiple-output-term consists of a variable-part and a function-part. These terms are transformed into ε-terms. Second, from these ε-terms, new terms are derived by means of CONSENSUS in the three-valued logic, and every redundant term is removed. In this way, all of the multiple-output prime-implicants are generated. Finally, all sets of the fewest multiple-output prime-implicants necessary to represent the given multiple-output-function are obtained completely.

All of these processes are carried out by a computer. It is noted that the algorithm for the minimization depends largely on a new CONSENSUS extended from the method presented formerly. This method is quite novel in the minimization of multiple-output-functions on three-valued logic.

## 1. まえがき

これまでに，3値あるいは多値論理に関する研究が数多く行われている．しかし，多値論理回路の具体的な論理設計は，Yoeli[1]，Givon[2]，Su[3]らのものを見るのみで，あまり発表されていないようである．さらにその応用面にいたっては，回路実現の困難さ，回路設計の複雑さなどのため大きな発展はみられなかったように思われる．

ここでは，現時点においてもっとも実際的であると考えられる3線式3値論理回路[4]にもとづいた多出力3値論理回路網の論理設計法について報告する．すなわち，前に著者らが発表した3値論理回路の論理設計法[4]をもとにして，多重論理関数の簡単化のための計算機向アルゴリズムとプログラミングの手法について述べる．ここに扱う3値論理関数は，単項演算として，$x^{abc}=\{a(x=0), b(x=1), c(x=2)\}: a, b, c\in\{0,1,2\}$，二項演算として，論理積「・」，論理和「+」を用いて展開したものである．その簡単化は，2値論理における Quine[5] の CONSENSUS 反復法を拡張した主項生成と必要最少限の主項選択とで構成される．多重論理関数の表現方法は，Bartee の方法[6]を参考にした．この簡単化のアルゴリズムを FORTRAN によりプログラミングし，それは与えられた多重論理関数すべての簡約形式，すなわち，必要最少主項のすべての組を得ることが可能である．

## 2. 3値論理関数の展開

3個の真理値を"0"，"1"，"2"とする．これらの真理値に順序（大小関係）

$$0<1<2 \qquad (1)$$

を与える．$a, b(\in\{0,1,2\})$ について，論理積「・」，論理和「+」をそれぞれ

$$a\cdot b=\min(a, b)$$

* Minimization of Multiple-Output-Functions of Ternary Switching Circuits by Yoshiteru OHKURA (Junior college of Tokushima Bunri University), Naofumi HARADA, Ryosaku SHIMADA, and Takeomi TAMESADA (Faculty of Engineering, Tokushima University).
** 徳島文理大学短期大学商科
*** 徳島大学工学部電子工学科
**** 徳島大学工学部情報工学科

Table 1 Truth table of the one-variable function ($f(x)=x^{a_0a_1a_2}$).

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $a_0$ |
| 1 | $a_1$ |
| 2 | $a_2$ |

$$a+b=\max(a,b) \qquad (2)$$

で定義する．

3値1変数論理関数 $f(x)$ が $x=i(i\in\{0,1,2\})$ に対して値 $a_i(\in\{0,1,2\})$ をとるとき，この $f(x)$ を **Table 1** の真理値表で表わすことができる．このような1変数関数を単項演算とし，$f(x)=x^{a_0a_1a_2}$ で表わす．

同一変数の1変数論理関数相互の論理積および論理和は，

$$x^{a_0a_1a_2}\cdot x^{b_0b_1b_2}=x^{c_0c_1c_2}$$
$$x^{a_0a_1a_2}+x^{b_0b_1b_2}=x^{d_0d_1d_2}$$
$$c_i=a_i\cdot b_i,\ d_i=a_i+b_i,\ (i=0,1,2) \qquad (3)$$

となる．

任意の$m$変数3値論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ は

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)&=f(0,0,\cdots,0)\cdot x_1^{200}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\\&+f(1,0,\cdots,0)\cdot x_1^{020}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\\&+f(2,0,\cdots,0)\cdot x_1^{002}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\\&+f(0,1,\cdots,0)\cdot x_1^{200}\cdot x_2^{020}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\\&+\cdots\cdots\\&+f(2,2,\cdots,2)\cdot x_1^{002}\cdot x_2^{002}\cdot\cdots\cdot x_m^{002}\end{aligned} \qquad (4)$$

のように展開できる[4]．展開式(4)の各論理積項を論理最小項といい，式(4)を最小項展開式という．

以下簡単のため，変数の **m-tuple** $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ を $\boldsymbol{X}$ で表わす．3値論理関数 $f(\boldsymbol{X})$, $g(\boldsymbol{X})$ があって，$\boldsymbol{X}$ のすべての値に対して，

$$f(\boldsymbol{X})\leq g(\boldsymbol{X}) \qquad (5)$$

であるとき，$g(\boldsymbol{X})$ は $f(\boldsymbol{X})$ を包含するという．さらに包含関係(5)があるとき，

$$f(\boldsymbol{X})\cdot g(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X})$$
$$f(\boldsymbol{X})+g(\boldsymbol{X})=g(\boldsymbol{X}) \qquad (6)$$

が成立する．

論理積項

$$\phi_h=h\cdot x_1^{a_1b_1c_1}\cdot x_2^{a_2b_2c_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{a_mb_mc_m} \qquad (7)$$

があって，$\phi_h$ のとり得る最大値が $h(\in\{1,2\})$ であるとき，この $\phi_h$ を$h$形項という．展開式(4)は，その論理最小項を1形項 $\phi_{1i}$ と2形項 $\phi_{2j}$ に分けて，これを，

$$f(\boldsymbol{X})=\sum_{h=1}^{2}(\sum_i\phi_{hi})=\sum_i\phi_{1i}+\sum_j\phi_{2j} \qquad (8)$$

のように表わすことができる．

3値論理関数 $f(\boldsymbol{X})$ の$h$形項$\phi_h$が，$f(\boldsymbol{X})$ のどの論理積項 ($\phi_h$ 以外) にも包含されないとき，$\phi_h$ を $f(\boldsymbol{X})$ の$h$形主項という．

## 3. CONSENSUS

$m$変数3値論理関数 $f(\boldsymbol{X})$ のある $h$ 形項と $k$ 形項をそれぞれ，

$$\phi_h=k\cdot x_1^{a_1b_1c_1}\cdot x_2^{a_2b_2c_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{a_mb_mc_m}$$
$$k_k=kx_1^{p_1q_1r_1}\cdot x_2^{p_2q_2r_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{p_mq_mr_m}$$

とする．これらの論理積項に現われない変数 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ があれば，$x_j^{222}$ を論理積し，同一変数が重複して現われている場合には，式(6)によってこれを統合する．このようにして，式(9)のそれぞれには$m$個のすべての変数がそれぞれ1回だけ現われるようにする．さらに，指標 $a_j,b_j,c_j(j=1,2,\cdots m)$ の中に "$h$" 以上のものがあれば，これを "2" にする．また，$p_j,q_j,r_j(j=1,2,\cdots,m)$ の中に "$k$" 以上のものがあれば，これを "2" にする．このようにして得られた論理積項$\phi_h,\phi_k$を標準積項という．展開式(4)の論理積項はすべて標準積項である．

このような標準積項 $\phi_h$ と $\phi_k$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi_g&=x_1^{a_1b_1c_1}\cdot x_1^{p_1q_1r_1}\cdot x_2^{a_2b_2c_2}\cdot x_2^{p_2q_2r_2}\cdot\cdots\\&\quad\cdots\cdot(h\cdot x_i^{a_ib_ic_i}+k\cdot x_i^{p_iq_ir_i}\cdot\cdots\\&\quad\cdots\cdot x_m^{a_mb_mc_m}\cdot x_m^{p_mq_mr_m}\\&=g\cdot x_1^{u_1v_1w_1}\cdot x_2^{u_2v_2w_2}\cdot\cdots\cdot x_i^{u_iv_iw_i}\cdot\cdots\\&\quad\cdots\cdot x_m^{u_mv_mw_m}\end{aligned} \qquad (10)$$

なる$\phi_g$を考え，$\phi_g$のとり得る最大値を "$g$" とすれば，これを標準積項として表わすことができる．このようにして得られた$\phi_g$を，$\phi_h$と$\phi_k$の座標$i$における **CONSENSUS** といい，

$$\phi_g=(\phi_h*\phi_k)i \qquad (11)$$

と表わす．ここに，$g\leq h+k$ であることは明らかである．$\phi_h$, $\phi_k$ をそれぞれ3値論理関数 $f(\boldsymbol{X})$ の$h$形項，$k$形項とすれば，

$$\phi_g\leq\phi_h+\phi_k\leq f(\boldsymbol{X}) \qquad (12)$$

が成立する[4]．

## 4. 多重3値論理関数の展開

$m$入力，$n$出力を有する3値組合せ論理回路網のブロック，ダイアグラムを **Fig. 1**(次頁参照)に，その出力関数の真理値表を **Table 2**(次頁参照)に示す．この

真理値表は $m$ 個の入力変数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の値の組合せのそれぞれに対する $n$ 個の関数値を与えている．この $n$ 個の3値論理関数を **$n$-tuple** $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ とし，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \equiv (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ を多重3値論理関数という．展開式(4)にならって，真理値表 (Table 2) で与えられた $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ を，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) &= (f_1(\boldsymbol{X}), f_2(\boldsymbol{X}), \cdots, f_n(\boldsymbol{X})) \\
&= x_1^{200}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\cdot(f_{10}, f_{20}, \cdots, f_{n0}) \\
&\quad + x_1^{020}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\cdot(f_{11}, f_{21}, \cdots, f_{n1}) \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{200}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\cdot(f_{12}, f_{22}, \cdots, f_{n2}) \\
&\quad + x_1^{200}\cdot x_2^{020}\cdot\cdots\cdot x_m^{200}\cdot(f_{13}, f_{23}, \cdots, f_{n3}) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{002}\cdot\cdots\cdot x_m^{002}\cdot(f_{1l}, f_{2l}, \cdots, f_{ml}) \\
&\qquad \text{但し，} l = 3^m - 1 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

のように展開できる．ここに，**$n$-tuple** に対する論理積は **$n$-tuple** の各成分に対する論理積からなる **$n$-tuple** であり，**$n$-tuple** 相互の論理和は対応する各成分相互の論理和からなる **$n$-tuple** である．式 (13) の各項を **2.** で述べた最小項および論理積項に対応して，**多出力項**という．

多重3値 $m$ 変数論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$ があって．それらの対応するすべての成分に関して，式(15)が成立しているとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \qquad (14)$$

と表わし，このとき，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ を包含するという．包含関係(14)があるとき，

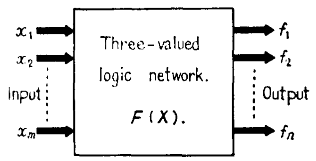



**Fig. 1** Multiple-output three-valued logic network.

**Table 2** Truth table of the multiple-output three-valued logic function.

| Inputs | | | | Outputs | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_n$ |
| 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | $f_{10}$ | $f_{20}$ | $\cdots$ | $f_{n0}$ |
| 1 | 0 | $\cdots$ | 0 | $f_{11}$ | $f_{21}$ | $\cdots$ | $f_{n1}$ |
| 2 | 0 | $\cdots$ | 0 | $f_{12}$ | $f_{22}$ | $\cdots$ | $f_{n2}$ |
| 0 | 1 | $\cdots$ | 0 | $f_{13}$ | $f_{23}$ | $\cdots$ | $f_{n3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| 2 | 2 | $\cdots$ | 2 | $f_{1l}$ | $f_{2l}$ | $\cdots$ | $f_{nl}$ |

$l = 3^m - 1.$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \\
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

が成立する．ここに，**$n$-tuple** 相互の論理積は対応する各成分相互の論理積からなる **$n$-tuple** である．

多出力項

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_h &= x_1^{a_1b_1c_1}\cdot x_2^{a_2b_2c_2}\cdot\cdots \\
&\quad \cdots x_m^{a_mb_mc_m}\cdot(h_1, h_2, \cdots, h_n) \\
h_i &\in \{0, 1, 2\},\ (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

があって，$\boldsymbol{\Phi}_h$ のとり得る最大値が“$h$”であるとする．$\boldsymbol{\Phi}_h$ が多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ に包含されるとき，この $\boldsymbol{\Phi}_h$ を $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の **$h$ 形多出力項**という．

展開式(13)において，関数部 $(f_{1j}, f_{2j}, \cdots, f_{nj})$ に“1”と“2”を同時にもつ多出力項を1形と2形の多出力項の論理和形式に分ける．この1形多出力項は，その関数部において，$f_{ij} \geq 1$ なる $f_{ij}$ をすべて“1”にしたものであり，2形多出力項は，その関数部において，$f_{ij} < 2$ なる $f_{ij}$ をすべて“0”にしたものである．このようにして得られる $h$ 形多出力項 $\boldsymbol{\Phi}_h$ を **$h$ 形 $\varepsilon$-項**という．

展開式(13)は，ε-項のみを用いて，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{h=1}^{2}\left(\sum_i \boldsymbol{\Phi}_{hi}\right) \qquad (17)$$

のように表わすことができる．

**例．Table 3**(次頁参照) の真理値表で与えられる多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$ は，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) &= x_1^{200}\cdot x_2^{200}\cdot(0, 1, 0) \\
&\quad + x_1^{200}\cdot x_2^{020}\cdot(1, 1, 1) \\
&\quad + x_1^{020}\cdot x_2^{020}\cdot(1, 0, 1) \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{020}\cdot(1, 1, 1) \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{002}\cdot(1, 0, 1) \\
&\quad + x_1^{020}\cdot x_2^{200}\cdot(2, 0, 0) \\
&\quad + x_1^{200}\cdot x_2^{020}\cdot(2, 2, 0) \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{020}\cdot(2, 0, 0) \\
&\quad + x_1^{002}\cdot x_2^{002}\cdot(0, 0, 2) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

のように，1形ε-項，2形ε-項で構成される．

多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の $h$ 形多出力項 $\boldsymbol{\Psi}_h$ が，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ のどの多出力項 ($\boldsymbol{\Psi}_h$ 以外) にも包含されないとき，$\boldsymbol{\Psi}_h$ を $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の **$h$ 形多出力主項**という．任意の多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ は，その多出力主項$\{\boldsymbol{\Psi}_{hi}\}$ のみを用いて，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{h=1}^{2}\left(\sum_i \boldsymbol{\Psi}_{hi}\right) \qquad (19)$$

のように表わすことができる．

**Table 3** An example of multiple-output-function.

| Inputs | | Outputs | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |

## 5. 標準多出力項の CONSENSUS

**3.** で述べた **CONSENSUS** を多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ に応用して，ここで標準多出力項の **CONSENSUS** を定義する．

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ のある $h$ 形多出力項と $k$ 形多出力項をそれぞれ，

$$\boldsymbol{\Phi}_h = x_1{}^{a_1b_1c_1}\cdot x_2{}^{a_2b_2c_2}\cdot\cdots\cdot x_m{}^{a_mb_mc_m}\cdot(h_1, h_2, \cdots, h_n)$$
$$\boldsymbol{\Phi}_k = x_1{}^{p_1q_1r_1}\cdot x_2{}^{p_2q_2r_2}\cdot\cdots\cdot x_m{}^{p_mq_mr_m}\cdot(k_1, k_2, \cdots, k_n) \quad (20)$$

とする．これらの変数部は共に **3.** で述べた標準積項であり，$\boldsymbol{\Phi}_h$ の関数部の各成分 $h_j$ は“0”か“$h$”であり，$\boldsymbol{\Phi}_k$ の関数部の各成分 $k_j$ は“0”か“$k$”である．このような多出力項を**標準多出力項**という．展開式(17)のすべての $\varepsilon$-項は，それぞれ標準多出力項である．

このような標準多出力項 $\boldsymbol{\Phi}_h$ と $\boldsymbol{\Phi}_k$ に対して，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_g = {} & x_1{}^{a_1b_1c_1}\cdot x_1{}^{p_1q_1r_1}\cdot x_2{}^{a_2b_2c_2}\cdot x_2{}^{p_2q_2r_2}\cdot\cdots \\ & \cdots\cdot\{h\cdot x_i{}^{a_ib_ic_i}+k\cdot x_i{}^{p_iq_ir_i}\}\cdot\cdots \\ & \cdots\cdot x_m{}^{a_mb_mc_m}\cdot x_m{}^{p_mq_mr_m}\cdot(h_1', h_2', \cdots, h_n')\cdot \\ & (k_1', k_2', \cdots, k_n')\end{aligned} \quad (21)$$

なる $\boldsymbol{\Phi}_g$ を考える．ここに $(h_1', h_2', \cdots h_n')$，$(k_1', k_2', \cdots k_n')$ はそれぞれ $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$，$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ の“0”以外のすべての成分を“2”にしたものである．この $\boldsymbol{\Phi}_g$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_g = {} & x_1{}^{u_1v_1w_1}\cdot x_2{}^{u_2v_2w_2}\cdot\cdots\cdot x_i{}^{u_iv_iw_i}\cdot\cdots \\ & \cdots\cdot x_m{}^{u_mv_mw_m}\cdot(g_1, g_2, \cdots, g_n)\end{aligned} \quad (22)$$

なる形の標準多出力項に変形する．このようにして作られた $\boldsymbol{\Phi}_g$ を，$\boldsymbol{\Phi}_h$ と $\boldsymbol{\Phi}_k$ の座標における **CONSENSUS** といい，

$$\boldsymbol{\Phi}_g = (\boldsymbol{\Phi}_h * \boldsymbol{\Phi}_k)i \quad (23)$$

と表わす．ここに，$g_j \leq h_j + k_j (j=1, 2, \cdots, n)$ は明らかである．さらに，

$$(\boldsymbol{\Phi}_h * \boldsymbol{\Phi}_k)i \leq \boldsymbol{\Phi}_h + \boldsymbol{\Phi}_k \quad (24)$$

である．このことから，$\boldsymbol{\Phi}_h$ と $\boldsymbol{\Phi}_k$ をそれぞれ多重論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の任意の標準 $h$ 形多出力項，および標準 $k$ 形多出力項とすると，

$$(\boldsymbol{\Phi}_h * \boldsymbol{\Phi}_k)i \leq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \quad (25)$$

であり，したがって，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) + (\boldsymbol{\Phi}_h * \boldsymbol{\Phi}_k)i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \quad (26)$$

である．

## 6. 多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の簡単化

ここに述べる簡単化とは，与えられた真理値表(Table 2) より得られる多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ を必要最小数の多出力主項の論理和形式で表わすことである．この簡単化は **5.** で述べた標準多出力項の **CONSENSUS** によって，与えられた多重論理関数のすべての多出力主項を生成すること，次にこれらより必要最小限の多出力主項を選択することである．

### (a) 多出力主項の生成

**(a-1)** 簡単化すべき多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ を真理値表より式(17)の形に表わし，1形 $\varepsilon$-項と2形 $\varepsilon$-項に分類する．組合せ禁止があれば，この項を1形と2形の両方に，それぞれ1形 $\varepsilon$-項，2形 $\varepsilon$-項として加える*．

**(a-2)** 1形多出力項相互で **CONSENSUS** を作る．これが他の1形多出力項に包含されなければ，これを1形多出力項に加え，この項に包含される1形多出力項を除く．以上を新しい1形多出力項が作れなくなるまで反復する．

次に，2形多出力項相互で上と同じ操作を行う．

**(a-3)** 1形多出力項と2形多出力項，および2形多出力項相互で **CONSENSUS** を作り，これが他の項に包含されなければこれを2形多出力項に加え，この項に包含される2形多出力項を除く．以上を新しい2形多出力項が作れなくなるまで反復する．

**(a-4)** 最後に，2形多出力項に包含される1形多出力項を除く．

以上の操作 **(a-1)**～**(a-4)** で最終的に得られるすべての多出力項は，与えられた多重3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ の多出力主項であり，しかも $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ のすべての多出力主項を尽している[4]．

### (b) 多出力主項の選択

与えられた3値論理関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ をそれぞれ最小項展開し，得られた最小項と **(a)** で求めた多出力

* 1形 $\varepsilon$-項には，(11) 式の2形 $\varepsilon$-項を組合せ禁止として1形 $\varepsilon$-項に加える．

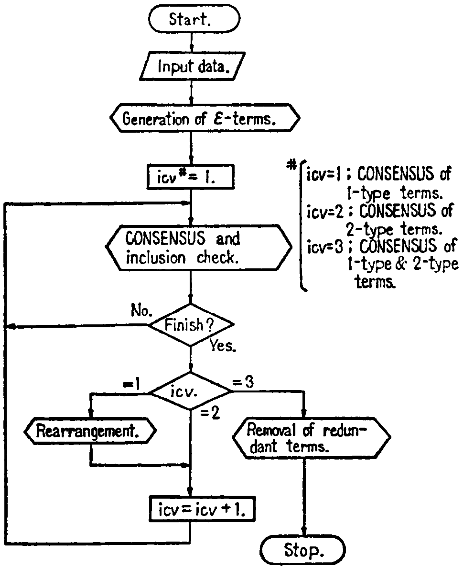
主項との包含関係を調査して，いわゆる主項表を作る．主項表の行は多出力主項 $\Psi_i$ に対応し，列は最小項 $\phi_j$ に対応する．包含関係，$\Psi_i \geq \phi_j$ があれば，$\Psi_i$ の行と $\phi_j$ の列の交点に * 印をつけ，なければ，空白にする．

この主項表より，すべての最小項を包含する最小限の多出力主項の組すべてを求める．

## 7. 簡単化の例

真理値表 (Table2) で与えられる $n$ 重 $m$ 変数3値論理関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ について，前節の簡単化のアルゴリズムに基づく計算機プログラムを作成した．本プログラムは，1個のメインプログラム，3個のセグメントプログラム (フォートラン 400ステップ)，2個のサブプログラム (アセンブラ 50W) で構成されている．**Table 4** の真理値表で与えられる2重3変数3値論理関数の簡単化例を **Fig. 4** (次頁～427頁参照) に示す．入力データは入力変数と出力関数の個数をそれぞれ“3”“2”および Table 4 の関数値の並び $f_1$，$f_2$ の順に“120002…00220001…21”である．これより，2形，1形の順に ε-項を生成する．**Fig. 2** においては，制御変数 $icv$ を用いて **6. (a-1)～(a-4)** の **CONSENSUS** と包含関係調査等の対象となる2項の選択を行う．**CONSENSUS** は，関数部がすべて零あるいは変数部の少なくとも1個の座標において指標がすべて零となるとき，この操作を中止し，次の2項の **CONSENSUS** へと移行する．なお2形多出力項においては指標“2”をもたない座標についても同様に処理する．これにより，**6. (a)** の操作が能率よく実行される．その結果，Fig. 4, 3 の多出力主項が得られる．

次に，多出力主項の選択 (**Fig. 3**(次頁参照)) の最初に，各関数値ごとに生成された最小項と多出力主項との包含関係調査により，(Fig. 4, 4) の多出力主項表が得られる．行方向の・が1個の最小項を，列方向の左端の数字が多出力主項をそれぞれ表わしている．一般に，$i$ 行 $j$ 列の * 印は $j$ 番目に生成された最小項が番号 $i$ に対応する行の多出力主項に包含されることを示す．これに続く多出力主項の選択 (Fig. 3) は次のような手順で行われる．まず，多出力主項表の列に着目して，この列が対応している最小項について，これを包含する多出力主項のうち何番目の多出力主項を選択するかを，次のようなカウンタを用いて決定する．このカウンタの桁数は最小項の総数 $J$ に等しく，その各桁はそれぞれ最小項の1列に対応している．カウン




(To Fig. 3)

**Fig. 2** Generation of multiple-output prime-implicants.

**Table 4** An example of multiple-output-function.

| Inputs | | | Outputs | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f_1$ | $f_2$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 1 |

タの初期値を (1,1,…,1) にセットする．これは各々の最小項を包含している何個かの多出力主項 (Fig. 4,4) の列方向の＊印の個数のうち，各列の最上部にある＊印をもつ行の多出力主項を選択することを意味する．このように選択された多出力主項の番号（行番号）の組とその個数を得る．カウンタの第1桁に1を加えて (2,1,…,1) とし，上と同じ操作を行う．$j$ 列目の最小項 $\phi_j$ を包含する多出力主項が $P_j$ 個あれば，カウンタの値を $(P_1,1,\cdots,1)$ さらに，$(1,2,\cdots,1)$，…，$(P_1,P_2,\cdots,P_J)$ のように変化させ，必要な多出力主項のすべての組合せについて調査する．また，上の操作と並行して，選択された多出力主項の個数 $i$ とそれ以前に選択された多出力主項の最少個数 $mst$ とを比較し，個数の多い多出力主項の組は削除される．この結果，必要最少多出力主項の組をすべて求めることが出来る．最後に，重複した必要最少多出力主項の組を除き，結果を印刷する．Fig. 4 の例では必要最少多出力主項の組が4組得られる．その中の SET-1 については，以下のような論理和形式で表現される．なお，本例の計算時間は約 920sec であった．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=x_1^{200}\cdot x_2^{202}\cdot x_3^{200}\cdot(1,1)+\cdots$$
$$\cdots+x_1^{022}\cdot x_2^{020}\cdot x_3^{002}\cdot(2,0)+\cdots$$

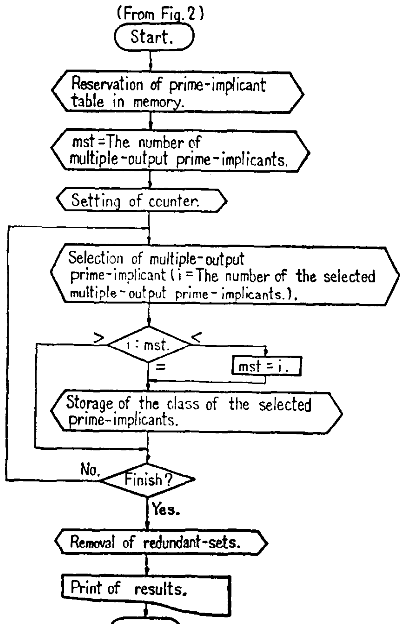



**Fig. 3** Selection of the fewest multiple-output prime-implicants.

$$\cdots+x_1^{012}\cdot x_2^{202}\cdot x_3^{020}\cdot(2,0) \qquad (27)$$

（途中省略）

## 9. あとがき

本論文で電子計算機による多重3値論理関数の簡単化のアルゴリズムとその計算機プログラムについて述べた．この論理設計法においては文献 4) で示された3値論理関数の標準積項に関数部を付加することにより，能率よく多重3値論理関数の多出力主項を生成す

```
** INPUT-DATA **

3,2
1200002000220000122000022000
2200011000020000012000000021
```
1

```
** E-TERMS **

 TYPE    F-PART    V-PART
2-TYPE    01      200  200  200
          11      020  200  200
          10      200  002  200
          10      020  200  020
          11      002  200  020
          10      002  002  020
          11      200  200  002
          10      020  020  002
          10      002  020  002
          01      020  002  002
1-TYPE    11      200  200  200
          11      020  200  200
          01      002  020  200
          11      200  002  200
          10      020  200  020
          11      002  200  020
          10      020  002  020
          11      002  002  020
          11      200  200  002
          10      020  020  002
          10      002  020  002
          01      020  002  002
          01      002  002  002
```
2

```
** PRIME-IMPLICANTS.**

 TYPE    F-PART    V-PART
1-TYPE    01      002  002  022
          11      200  202  200
          01      002  020  200
2-TYPE    10      022  020  002
          01      200  200  202
          01      220  200  200
          10      020  200  220
          01      021  002  002
          11      200  200  102
          11      002  201  020
          10      200  102  200
          11      120  200  200
          01      200  201  200
          10      012  202  020
          10      022  201  020
```
3

```
** MULTIPLE-OUTPUT PRIME-IMPLICANTS TABLE **

    ...................
  1             **
  2 *          *
  3           *
  4         **
  5               *  *
  6               **
  7   * *
  8              *    *
  9 *      *         *
 10      *      *   *
 11 *  *
 12 * *            *
 13            *  *
 14  *   **
 15  *  **
```
4

```
SET-1
 1-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   11      200  202  200
   01      002  020  200
 2-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   10      022  020  002
   01      220  200  200
   10      020  200  220
   01      021  002  002
   11      200  200  102
   11      002  201  020
   10      200  102  200
   10      012  202  020

SET-2
 1-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   01      002  020  200
 2-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   10      022  020  002
   01      220  200  200
   10      020  200  220
   01      021  002  002
   11      200  200  102
   11      002  201  020
   10      200  102  200
   01      200  201  200
   10      012  202  020

SET-3
 1-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   01      002  020  200
 2-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   10      022  020  002
   10      020  200  220
   01      021  002  002
   11      200  200  102
   11      002  201  020
   10      200  102  200
   11      120  200  200
   01      200  201  200
   10      012  202  020

SET-4
 1-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   01      002  020  200
 2-TYPE PRIME-IMPLICANTS.
  F-PART    V-PART
   10      022  020  002
   01      021  002  002
   11      200  200  102
   11      002  201  020
   10      200  102  200
   11      120  200  200
   01      200  201  200
   10      012  202  020
   10      022  201  020
```

5

**Fig. 4** An example of computer-minimization for a two-output network with three-input lines.

ることができ，プログラミングも容易である．ここに開発した計算機プログラムでは必要最少数の多出力主項のすべての組を求めることができる．しかし，多出力主項生成において，有効な項すべての多出力項相互間で **CONSENSUS** を作るため，特に多変数の場合にはその回数が増大し，計算時間が長くなる．また，初めにある関数に適当な置換[4]をほどこし，それから本論文のアルゴリズムによって簡単化し，その結果に対して逆に置換をほどこした場合が，置換をほどこさない場合に比べて，より簡単になる場合が考えられる．前者の場合，変数の個数と処理時間の関連を調査する必要があるが，置換を考慮に加えた上で，調査検討することを考えている．これらは残された問題である．

## 参 考 文 献


1) M. Yoeli and G. Rosenfeld: Logical design of ternary switching circuits, IEEE Trans., EC-14, 1, p. 19 (1965).
2) D. D. Givone and R. W. Snelsive: The design of multiple-valued logic systems, Dep. Elect. Eng. State Univ. N. Y. Buffalo, Final Rep. (1968).
3) S. Y. H. Su and P. T. Cheung: Computer minimization of multivalued switching functions, IEEE Trans., Vol. C-21, No. 9, p. 995 (1972).
4) 三根，長谷川，原田，島田：多線式多値論理回路網の一論理設計法，信学論 D, 56-D, 3, p. 186. (1975).
5) W. V. Quine: A way to simplify truth functions, Amer. Math. Monthly, 62, p. 627. (1973).
6) T. C. Bartee: Computer design of multiple-output logical-network, IRE Trans., EC-10, p. 21 (1961).
7) E. M. McCluskey: Minimization of Boolean functions, Bell Syst. Tech., J., 45, 6, p. 1417 (1956).


(昭和52年8月8日受付)
(昭和52年11月8日再受付)