Vol.2010-AL-132 No.5
2010/11/19

グラフクラスと部分グラフ同型性

斎藤寿樹[†1]　大舘陽太[†2]
来嶋秀治[†3]　宇野毅明[†4]

部分グラフ同型性判定問題は 2 つのグラフ G と H が与えられたとき, G を H に埋め込めるかどうかを判定する問題である．この問題は，ハミルトンパス問題や最大クリーク問題など多くの NP-完全な問題を含んでいるため，一般のグラフ上だけでなく，二つのグラフを連結な平面グラフに制限しても NP-完全である．

本論文では，ハミルトンパス問題や最大クリーク問題，同型性判定問題を多項式時間で解くことができるグラフクラス上の部分グラフ同型性判定問題を扱う．具体的には，真区間グラフ (Proper interval graphs), 準閾値グラフ (Trivially perfect graphs), 二部置換グラフ (Bipartite permutation graphs) 上の部分グラフ同型性判定問題が NP-完全であることを示す．また，これらのグラフクラスの部分クラスである補鎖グラフ (Co-chain graphs), 鎖グラフ (Chain graphs), 閾値グラフ (Threshold graphs) に対し，多項式時間アルゴリズムを提案する．

Graph Classes and Subgraph Isomorphism

Toshiki Saitoh,[†1] Yota Otachi,[†2] Shuji Kijima[†3]
and Takeaki Uno [†4]

The subgraph isomorphism problem is to determine whether a graph is isomorphic to a subgraph of another graph. Since it includes the Hamiltonian path problem, the subgraph isomorphism problem is NP-complete even if the input graphs are connected plannar graphs.

In this paper, we deal with proper interval graphs, trivially perfect graphs, and bipartite permutation graphs, and their subclasses. We know that on these graphs Hamiltonian path, maximum clique, and isomorphism problems can be solved in polynomial time. We show that the subgraph isomorpshim is NP-complete even when both of given graphs are connected proper interval graphs, trivially perfect graphs, and bipartite permutation graphs. Then, we propose polynomial time algorithms for the subgraph isomorphism problem on co-chain graphs, chain graphs, and threshold graphs.

1. はじめに

$H = (V_H, E_H)$ と $G = (V_G, E_G)$ をグラフとする．ただし，$|V_H| \le |V_G|$，かつ，$|E_H| \le |E_G|$ とする．ここで，以下を満たす V_H から V_G への単射写像 f が存在するとき，H は G に**部分グラフ同型**であるという．

$$\{u, v\} \in E_H \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_G.$$

このとき，f を H から G への**部分グラフ同型写像**という．また，このとき H は G に**埋め込める**ともいい，f を H から G への**埋め込み**ともいう．二つのグラフ G と H が与えられたとき，H が G に部分グラフ同型かを判定する問題を**部分グラフ同型性判定問題**という．この問題は，LSI 設計やバイオインフォマティクス，パターン認識など，様々な分野に応用があることが知られている[3]．

部分グラフ同型性判定問題は，最大クリーク問題やハミルトンパス問題を含んでいるため，平面グラフ，コーダルグラフ (Chordal graphs)，二部グラフといったグラフでも NP-完全である[6]．また，二つのグラフ G と H が共に連結な外平面グラフ (Outer planar graphs) であっても，NP-完全であることが示されている[13]．しかし，G と H が共に 2 連結な外平面グラフである条件を加えることによって，多項式時間アルゴリズムが存在する[9),13]．さらに，2 連結な外平面グラフという条件を拡張し，k 連結な部分 k 木に対する多項式時間アルゴリズムが提案されている[5),11]．近年では，平面グラフに対する FPT アルゴリズムが発表された[2]．平面グラフ以外では，二つのグラフがコグラフのとき NP-完全であることが知られている[1]．また，二つのグラフ G と H が木のとき多項式時間で解けるが，グラフ H が森の場合，NP-完全である[6]．このように埋め込むグラフ H が連結か非連結かで，問題の難しさが異なる場合がある．また，G を二部置換グラフとし，H を森とすると，NP-完全であることが知られている[12]．

本論文では，**真区間グラフ** *(Proper interval graphs)*，**準閾値グラフ** *(Trivially perfect graphs)*，**二部置換グラフ** *(Bipartite permutation graphs)* とその部分クラスにの部分グラフ同型性判定問題について扱う．これらのグラフクラス上では，ハミルトンパス問題，最大クリーク (最大二部クリーク) 問題，同型性判定問題など，多くの計算量上困難とされている問題を多項式時間で簡単に解けることが示されている．しかし，本論文では，真区間グラフ，準

†1 科学技術振興機構 ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト, t-saitoh@erato.ist.hokudai.ac.jp
†2 東北大学 情報科学研究科, otachi@dais.is.tohoku.ac.jp
†3 九州大学 システム情報科学研究院, kijima@inf.kyushu-u.ac.jp
†4 国立情報学研究所 情報学プリンシプル研究系, uno@nii.jp

Vol.2010-AL-132 No.5
2010/11/19

閾値グラフ, 二部置換グラフにおいて, 部分グラフ同型性判定問題が NP-完全であることを示す. 特に, 入力の二つのグラフ G と H が共に連結で, さらに二つのグラフの頂点数が等しい, という制限を加えても NP-完全であることを示す. 特に, Johnson により区間グラフの部分グラフ同型性判定問題が NP-完全であるかどうかは有名な未解決の問題であった[8]. 今回, その部分クラスである真区間グラフや準閾値グラフといったグラフクラスにおいて NP-完全であることを示すことにより, この未解決問題をさらに制限した問題に対する困難性の証明を与えることに成功した. また, 部分グラフ同型性判定問題に類似した問題として誘導部分グラフ同型性判定問題があり, 近年, 区間グラフ上の誘導部分グラフ同型性判定問題が盛んに研究されている. 具体的には, Marx と Schlotter により, 区間グラフの誘導部分グラフが NP-完全であることが証明された[10]. また, Heggernes らにより, 真区間グラフの誘導部分グラフ同型性判定問題は一般には NP-完全であるが, 二つのグラフが共に連結である場合, 多項式時間で解けることが示されている[7]. これらの結果と本論文の結果により, 誘導部分グラフ同型性判定と部分グラフ同型性判定問題の問題の難しさが本質的に異なることを示せた. また, **閾値グラフ** *(Threshold graphs)*, **鎖グラフ** *(Chain graphs)*, **補鎖グラフ** *(Co-chain graphs)* に対する多項式時間アルゴリズムを提案する. これらのアルゴリズムは次数列を使った単純なアルゴリズムである. 以上の結果をまとめたものを図 1 に示す.

2. 準　　備

本論文で扱うグラフはすべて無向でかつ単純なグラフとする. $G = (V, E)$ をグラフとし, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする. 頂点 v_i の**隣接点集合** $\{v_j \mid \{v_i, v_j\} \in E\}$ を $N(v_i)$ と書き, 閉じた隣接点集合を $N[v_i] = N(v_i) \cup \{v_i\}$ と書く. 頂点 v_i に接続している頂点の数を**次数** $d(v_i) = |N(v_i)|$ といい, 次数の非増加な列 $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ を**グラフ G の次数列**と呼ぶ. また, $\{v_i, v_j\} \in E$ となる $i < j$ が存在するとき, $N^*(v_i) = N[v_i]$ とし, 任意の $j(> i)$ に対し, $\{v_i, v_j\} \notin E$ のとき, $N^*(v_i) = N(v_i)$ とする. また, $\overline{E} = \{\{v_i, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \notin E\}$ とし, グラフ $\overline{G} = (V, \overline{E})$ を G **の補グラフ**という. $V' \subset V$ のとき, $E[V'] = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V', \{v_i, v_j\} \in E\}$ とし, $G[V'] = (V', E[V'])$ を V' **で誘導される部分グラフ**とする. 互いに素な二つの集合 X, Y の和集合を $X \dot\cup Y$ と書き, $\dot\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ を $U_1 \dot\cup U_2 \dot\cup \ldots \dot\cup U_k$ とする.

グラフクラス $\mathcal{C}$ の部分グラフ同型性判定問題を以下のように定義する.

グラフクラス $\mathcal{C}$ の部分グラフ同型性判定問題

入力：グラフクラス $\mathcal{C}$ に属する二つのグラフ $G = (V_G, E_G)$ と $H = (V_H, E_H)$. ただし, $|V_G| \geq |V_H|$ かつ $|E_G| \geq |E_H|$ とする.

質問：H は G に部分グラフ同型か?

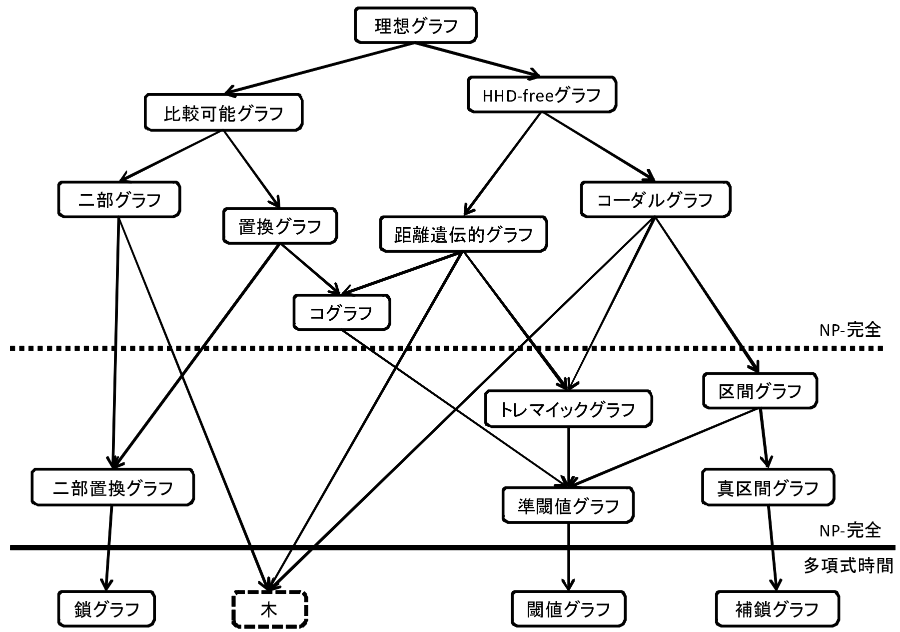

図 1　理想グラフ (Perfect graphs) と理想グラフの部分クラスの依存関係図. 点線は部分グラフ同型性判定問題に対する既存の結果であり, 実線は本論文による結果である.

3. NP-完全性

本節では, 真区間グラフ, 準閾値グラフ, 二部置換グラフ上での部分グラフ同型性判定問題が NP-完全であることを 3-PARTITION 問題からの帰着で証明する. 3-PARTITION 問題の定義は以下の通りである.

3-PARTITION 問題

入力：集合 $A = \{1, 2, \ldots, 3m\}$ とサイズ B, また各 $j \in A$ に対して, 正整数の重み a_j を与える. ただし, 各 $j \in \{1, \ldots, 3m\}$ に対し, a_j は $B/4 < a_j < B/2$ とし, また $\sum_{j \in A} a_j = mB$ とする.

質問：A を m 個の互いに素な集合 $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$ に分割することができるか? ただ

し, 任意の $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し, $\sum_{j \in A^{(i)}} a_j = B$ を満たす．このとき, $B/4 < a_j < B/2$ であることから, $|A^{(i)}| = 3$ である．

各 a_j と B が m の多項式に制限されても, 3-PARTITION 問題は強 NP-完全問題であることが知られている[6]．

3.1 真区間グラフ

真区間グラフと準閾値グラフは区間グラフの部分クラスである．そのため, まず区間グラフについて定義する．**区間グラフ**は区間表現と呼ばれる交差モデルを持つグラフである．区間表現は区間の集合で, グラフの各頂点は１つの区間に対応する．また, 頂点間に辺があるとき, またそのときに限り, 対応する二つの区間に重なりを持たせる．**真区間グラフ**は区間グラフで, 任意の区間が他のどの区間も真に含まないという区間表現を持つグラフである．

本節では, 真区間グラフ上の部分グラフ同型性判定問題が NP-完全であることを示す．厳密には, 与えられる二つのグラフ G と H を真区間グラフとし, さらに, G と H が連結で, かつ G と H の頂点数が等しいという制約を与えても, NP-完全であることを示す．

定理 1. 真区間グラフの部分同型性判定問題は *NP*-完全である．

証明. この問題は明らかに NP に属す．したがって，NP-困難性を示せば十分である．

3-PARTITION 問題のインスタンスから二つのグラフ G と H を多項式時間で構築する．グラフ $H = (V_H, E_H)$ は, 大まかに言うと, サイズが $7m^2 a_i$ の $3m$ 個のクリークを１列に並べ, 隣り合う二つのクリークを長さ $m-1$ のパスで繋いだグラフである (図 2)．厳密には,

$$V_H = \dot{\bigcup}_{i=1}^{3m} X^{(i)} \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup}_{i=1}^{3m-1} Y^{(i,i+1)} \,\dot{\cup}\, Z$$

とする．ただし, 各 $i \in \{1, \dots, 3m\}$ に対し $|X^{(i)}| = 7m^2 a_i$ とし, また, 各 $i \in \{1, \dots 3m-1\}$ に対し $|Y^{(i,i+1)}| = m-1$ とし, $|Z| = 3m^2(m-1) - (3m-1)(m-1)$ とする．このとき, $|V_H| = 7m^2 \sum_{i=1}^{3m} a_i + 3m^2(m-1) = 7m^3 B + 3m^2(m-1)$ である．ここで, 各 $i \in \{1, \dots, 3m\}$ に対し, $H[X^{(i)}]$ はクリークとする．また, 各 $i \in \{1, \dots, 3m-1\}$ に対し, $H[Y^{(i,i+1)}]$ はパス $(y_1^{(i,i+1)}, y_2^{(i,i+1)}, \dots, y_{m-1}^{(i,i+1)})$ で, 端点 $y_1^{(i,i+1)}$ は $x_s^{(i)} \in X^{(i)}$ と隣接し, 反対側の端点 $y_{m-1}^{(i,i+1)}$ は $x_t^{(i+1)} \in X^{(i+1)}$ と隣接する．ただし, 各 $i \in \{2, \dots, 3m-1\}$ に対し, $x_s^{(i)} \neq x_t^{(i)}$ とする．さらに, $H[Z]$ はパス $(z_1, z_2, \dots, z_{|Z|})$ で, z_1 は $x_t^{(3m)}$ と異なる $X^{(3m)}$ の頂点 $x_s^{(3m)}$ と隣接する．グラフ H は, 図 3 のような区間表現を持つため, 真区間グラフである．

次にグラフ $G = (V_G, E_G)$ を定義する．グラフ G は, 大まかに言うと, サイズが $7m^2B+6m^2$ の m 個のクリークを m 個並べ, 隣り合う二つのクリークは $3m^2$ 個の頂点を共有したグラフであ

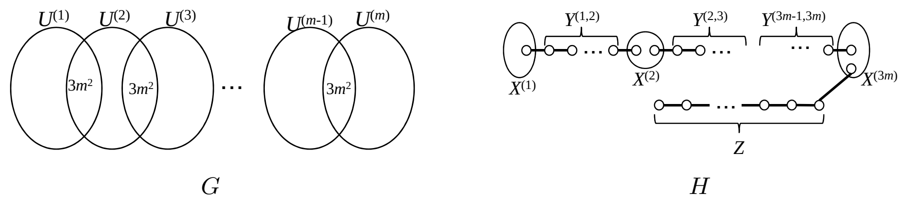

図 2 グラフ G と H.

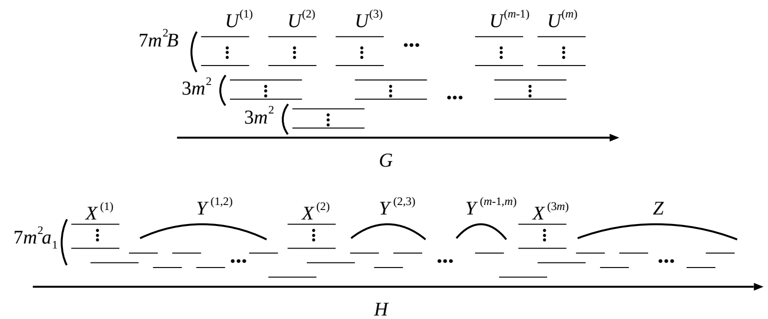

図 3 グラフ G と H の区間表現.

る (図 2)．厳密には, $V_G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} U^{(i)}$ とする．ここで, 各 $G[U^{(i)}](i \in \{1, \dots, m\})$ はクリークで, $i \in \{2, \dots, m\}$ に対し, $|U^{(i)}| = 7m^2B + 6m^2$, および $|U^{(1)}| = |U^{(m)}| = 7m^2B + 3m^2$ とする．また, $i \in \{1, \dots, m-1\}$ に対し, $|U^{(i)} \cap U^{(i+1)}| = 3m^2$ とし, さらに, $|i-j| > 1 (i, j \in \{1, \dots, m\})$ のとき $|U^{(i)} \cap U^{(j)}| = 0$ とする．このとき, $|V_G| = (m-2)(7m^2B+6m^2)+2(7m^2B+3m^2)-3m^2(m-1) = 7m^3B+3m^2(m-1) = |V_H|$ である．グラフ G は真区間グラフであり (図 3), また $|E_G| > |E_H|$ である．

次に, 3-PARTITION 問題が解を持つ必要十分条件が, グラフ H が G の部分グラフ同型であることを証明する．

$(\Rightarrow)$ 集合 A の分割 $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ を 3-PARTITION 問題の解とする．このとき, V_H から V_G への写像 f を構成する． $A^{(i)} = \{j, j', j''\}$ とし, $f(X^{(j)} \,\dot{\cup}\, X^{(j')} \,\dot{\cup}\, X^{(j'')}) = U^{(i)} \setminus (U^{(i-1)} \cup U^{(i+1)})$ とする．ただし, $U^{(0)} = U^{(m+1)} = \phi$ とする．このとき, $A^{(i)}$ は

3-PARTITION の解であることから, $|X^{(j)} \dot\cup X^{(j')} \dot\cup X^{(j'')}| = 7m^2B$ であり, G の構成方法から $|U^{(i)} \setminus (U^{(i-1)} \cup U^{(i+1)})| = 7m^2B$ である. また, $G[U^{(i)} \setminus (U^{(i-1)} \cup U^{(i+1)})]$ はクリークである. そのため, $H[X^{(j)} \dot\cup X^{(j')} \dot\cup X^{(j'')}]$ は $G[U^{(i)} \setminus (U^{(i-1)} \cup U^{(i+1)})]$ に埋め込むことができる.

次に残りの頂点 $V_H \setminus (\dot\bigcup_{j=1}^{3m} X^{(j)})$ の埋め込みについて考える. 上述の埋め込み方から, G の残りの頂点 W は $\dot\bigcup_{i=1}^{m-1}(U^{(i)} \cap U^{(i+1)})$ である. つまり, $G[W]$ は m 個のクリーク $G[W \cap U^{(i)}](i \in \{1, \ldots, m\})$ で構成され, 隣り合う二つのクリーク $G[W \cap U^{(i)}]$ と $G[W \cap U^{(i+1)}]$ は $3m^2$ 個の頂点を共有する. ここで, $j \in A^{(k)}$ および, $j+1 \in A^{(k')}$ とする. このとき, パス $H[Y^{(j,j+1)}]$ を, $f(y_1^{(j,j+1)}) \in U^{(k)}$ と $f(y_{m-1}^{(j,j+1)}) \in U^{(k')}$ となるように, $G[W]$ への任意の埋め込み f を与えればよい. これにより, 辺 $\{f(x_s^k), f(y_1^{(j,j+1)})\}$ と $\{f(x_t^{k'}), f(y_{m-1}^{(j,j+1)})\}$ は E_G に存在する. また, 任意の $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ に対して,

$$\left|\dot\bigcup_{j=1}^{3m-1} Y^{(j,j+1)}\right| = (3m-1)(m-1) \leq 3m^2 - 2 = |W \cap U^{(i)} \cap U^{(i+1)}| - 2 \qquad (1)$$

であるため, $Y^{(j,j+1)}$ は $G[W]$ に埋め込むことができる.

最後に, $W' = W \setminus f(\dot\bigcup_{j=1}^{3m-1} Y^{(j,j+1)})$ とする. このとき, $H[Z]$ から $G[W']$ への埋め込みを与える. $G[W']$ は m 個のクリーク $G[W' \cap U^{(i)}](i \in \{1, \ldots, m\})$ からなる. このとき, 式 (1) から, 隣り合う二つのクリーク $G[W' \cap U^{(i)}]$ と $G[W' \cap U^{(i+1)}]$ は少なくとも 2 頂点を共有する. このとき, $G[W']$ はハミルトン閉路を持つため, パス $H[Z]$ を埋め込むことができる. よって, グラフ H は G に部分グラフ同型である.

($\Leftarrow$) f を H から G への埋め込みを与える V_H から V_G への写像とする. このとき, H の各クリーク $X^{(j)}$ は, G の二つ以上のクリーク (ただし, 共有部分を除く) に埋め込まれることはない. つまり, $i \neq i'$ に対して, $f(X^{(j)}) \cap (U^{(i)} \setminus U^{(i+1)} \cup U^{(i-1)}) \neq \phi$ のとき, $f(X^{(j)}) \cap (U^{(i')} \setminus (U^{(i'+1)} \cup U^{(i'-1)})) = \phi$ である. これは, $H[X^{(j)}]$ はクリークであるのに対し, $U^{(i)} \setminus (U^{(i+1)} \cup U^{(i-1)})$ と $U^{(i')} \setminus (U^{(i'+1)} \cup U^{(i'-1)})$ の間に辺がないからである. また,$|U^{(i)} \cap U^{(i+1)}|$ は高々$3m^2$ であり, $|X^{(j)}|$ は $7m^2$ 以上なので, 任意の H のクリーク $X^{(j)}$ に対し, G のクリーク $U^{(i)}$ がただ一つ決まる. そのため, j を $A^{(i)}$ に割り当てる.

次に, 各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し, $|A^{(i)}| = 3$ であることを示す. もし, $|A^{(i')}| \neq 3$ となる割り当てが存在するとき, 鳩の巣原理より, $|A^{(i)}| > 3$ となる集合が存在する. ここで, j, j', j'', j''' を $A^{(i)}$ の異なる要素と仮定する. 3-PARTITION のインスタンスの条件から, $a_j + a_{j'} + a_{j''} + a_{j'''} > 4 \times (B/4) = B$ である. よって, $|X^{(j)} \cup X^{(j')} \cup X^{(j'')} \cup X^{(j''')}| = 7m^2(a_j + a_{j'} + a_{j''} + a_{j'''}) \geq 7m^2(B+1) > 7m^2B + 6m^2 = |U^{(i)}|$ となる. つまり, $A^{(i)}$ の要素に対応する H のクリークを G のクリーク $U^{(i)}$ へ埋め込むことに矛盾する. よって, $|A^{(i)}| = 3$ である.

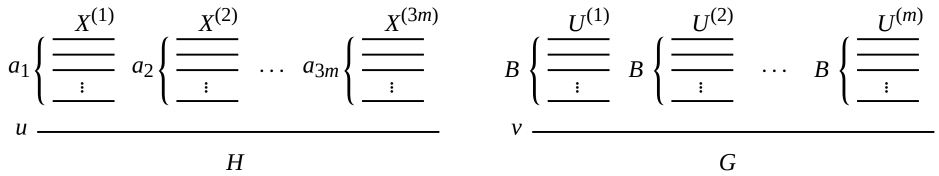

図 4 グラフ H と G の区間表現.

最後に, 各集合 $A^{(i)}$ に対し, $a_j + a_{j'} + a_{j''} = B$ であることを示す. もし, $\sum_{j \in A^{(i')}} a_j \neq B$ である i' が存在するとき, 鳩の巣原理より, $\sum_{j \in A^{(i)}} a_j > B$ となる i が存在する. ここで, $A^{(i)} = \{j, j', j''\}$ と $a_j + a_{j'} + a_{j''} > B$ と仮定する. このとき, $|X^{(j)} \cup X^{(j')} \cup X^{(j'')}| = 7m^2(a_j + a_{j'} + a_{j''}) \geq 7m^2(B+1) > 7m^2B + 6m^2 = |U^{(i)}|$ である. よって, H の 3 つのクリーク $H[X^{(j)} \cup X^{(j')} \cup X^{(j'')}]$ を G のクリーク $G[U^{(i)}]$ へ埋め込むことに矛盾する. □

3.2 準閾値グラフ

準閾値グラフは区間グラフで, 任意の区間が他のどの区間とも部分的な重なりを持たないという区間表現を持つグラフである.

定理 2. 準閾値グラフの部分同型性判定問題は *NP*-完全である.

証明. この問題は明らかに NP に属す. したがって, NP-困難性を示せば十分である.

3-PARTITION 問題のインスタンス $(A, B, \{a_1, \ldots, a_{3m}\})$ から, グラフ G と H を以下の通り多項式時間で構築する (図 4 参照). グラフ $H = (V_H, E_H)$ は, 大まかに言うと, サイズが a_i の $3m$ 個のクリークと, それらのクリーク中の全点に隣接する頂点 u からなるグラフである. 厳密には, $V_H = \{u\} \cup \dot\bigcup_{i=1}^{3m} X^{(i)}$ とする. ただし, 各 $i \in \{1, \ldots, 3m\}$ に対し $H[X^{(i)}]$ はクリークであり $|X^{(i)}| = a_i$ とする. また, 頂点 u は他の全ての点と隣接する. つまり, $N[u] = V_H$ である. グラフ $G = (V_G, E_G)$ は, 大まかに言うと, サイズが B の m 個のクリークと, それらのクリーク中の全点に隣接する頂点 v からなるグラフである. 厳密には, $V_G = \{v\} \cup \dot\bigcup_{i=1}^{m} U^{(i)}$ とする. ただし, 各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し $H[U^{(i)}]$ はクリークであり $|U^{(i)}| = B$ とする. また, 頂点 v は他の全ての点と隣接する. つまり, $N[v] = V_G$ である. グラフ H, G 共に準閾値グラフであることは, 図 4 から確認できる. また, $|V_H| = |V_G| = mB + 1$ かつ $|E_H| \leq |E_G|$ であることも明らか.

次に, 3-PARTITION 問題が解を持つ必要十分条件が, グラフ H が G の部分グラフ同型

であることを証明する．

($\Rightarrow$) 集合 A の分割 $A^{(1)},\ldots,A^{(m)}$ を 3-PARTITION 問題の解とする．このとき, V_H から V_G への写像 f を, 以下の通り構成する．まず, $f(u)=v$ とする．また, $A^{(i)}=\{j,j',j''\}$ の場合, $f(X^{(j)}\dot\cup X^{(j')}\dot\cup X^{(j'')})=U^{(i)}$ とする．$|U^{(i)}|=|X^{(j)}\dot\cup X^{(j')}\dot\cup X^{(j'')}|$ より, このような単射が構成可能である．この写像 f が H から G への部分グラフ同型写像となっていることを確認する．頂点 u と v は他の全ての頂点に隣接しているので, $\{u,x\}\in E_H$ ならば $\{f(u)=v,f(x)\}\in E_G$ となる．あとは, H の各クリーク $X^{(i)}$ の中の辺を確かめればよい．$x,x'\in X^{(j)}$ とすると, $\{x,x'\}\in E_H$ である．f の構成法より, $f(x),f(x')\in U^{(i)}$ となる i がある．$U^{(i)}$ は G のクリークなので, $\{f(x),f(x')\}\in E_G$ となる．

($\Leftarrow$) 単射 f を H から G への部分グラフ同型写像とする．部分グラフ同型写像の性質より, $f(x)=y$ ならば $d(x)\le d(y)$ となる．このことから, $f(u)=v$ であることが分かる．また, H のクリークは G のクリークに埋め込まなければならないため, 任意の j に対して $f(X^{(j)})\subseteq U^{(i)}$ となる i が存在する．したがって, f によって, A の分割 $A^{(1)},\ldots,A^{(m)}$ を次の通り構築できる: $A^{(i)}=\{j\in A\mid f(X^{(j)})\subseteq U^{(i)}\}$. この分割が 3-PARTITION の解になっていないとする．そのとき, $\sum_{j\in A^{(i)}}a_j>B$ となる i が存在する．これは, $|\dot\bigcup_{j\in A^{(i)}}X^{(j)}|=\sum_{j\in A^{(i)}}a_j>B=|U^{(i)}|$ を意味し, f が単射である事と任意の $j\in A^{(i)}$ に対して $f(X^{(j)})\subseteq U^{(i)}$ であることに矛盾する． □

3.3 二部置換グラフ

$G=(V,E)$ をグラフとし, $V=\{1,\ldots,n\}$ とする．グラフ G が次を満たす V 上のある置換 π を持つとき, G を**置換グラフ**という．

$$i,j\in E\Leftrightarrow(i-j)(\pi(i)-\pi(j))<0.$$

直観的には, 置換グラフは置換ダイアグラムと呼ばれる交差モデルを持つグラフである．置換ダイアグラムとは, 2 本の平行線 (L_1,L_2) に端点を持つ線分の集合で, 各線分はグラフの頂点に対応する．また, 2 頂点間に辺がある必要十分条件は, 対応する対応する二つの線分に重なりがある．グラフ G が二部グラフで, かつ置換グラフであるとき, G を**二部置換グラフ**という．

定理 3. 二部置換グラフの部分同型性判定問題は NP-完全である．

証明. この問題は明らかに NP に属す．したがって，NP-困難性を示せば十分である．

3-PARTITION 問題のインスタンス $(A,B,\{a_1,\ldots,a_{3m}\})$ から，グラフ G と H を以下の通り多項式時間で構築する (図 5 参照)．二部グラフ $H=(X_H,Y_H,E_H)$ は, 大まかに言うと, 頂点数が $10m^3a_i$ の $3m$ 個の二部クリークを並べ, 隣り合う二つのクリークを長さ $2m$ のパスで繋いだグラフである．厳密には,

$$V_H=\dot\bigcup_{i=1}^{3m}X^{(i)}\dot\cup\dot\bigcup_{i=1}^{3m}Y^{(i)}\dot\cup\dot\bigcup_{i=1}^{3m-1}P^{(i,i+1)}\dot\cup Q$$

とする． ただし, 各 $i\in\{1,\ldots,3m\}$ に対し $|X^{(i)}|=|Y^{(i)}|=5m^3a_i$ とし, また, 各 $i\in\{1,\ldots 3m-1\}$ に対し $|P^{(i,i+1)}|=2m$ とし, $|Q|=8m^3-14m^2+2m$ とする．このとき, $|X_H|=5m^3\sum_{i=1}^{3m}a_i+1/2\sum_{i=1}^{3m-1}2m+1/2|Q|=5m^4B+1/2(3m-1)2m+1/2(8m^3-14m^2+2m)=5m^4B+4m^2(m-1)$ で, また $|Y_H|=|X_H|$ である．ここで, 各 $i\in\{1,\ldots,3m\}$ に対し, $C^{(i)}=X^{(i)}\dot\cup Y^{(i)}$ とし, 二部グラフ $H[C^{(i)}]=(X^{(i)},Y^{(i)},E[C^{(i)}])$ は二部クリークとする． また, 各 $i\in\{1,\ldots,3m-1\}$ に対し, $H[P^{(i,i+1)}]$ はパス $(p_1^{(i,i+1)},p_2^{(i,i+1)},\ldots,p_{m-1}^{(i,i+1)})$ で, 端点 $p_1^{(i,i+1)}$ は $x_p^{(i)}\in X^{(i)}$ と隣接し, もう一方の端点 $p_{2m}^{(i,i+1)}$ は $y_p^{(i+1)}\in Y^{(i+1)}$ と隣接する．さらに, $H[Q]$ はパス $(q_1,q_2,\ldots,q_{|Q|})$ で, q_1 は $X^{(3m)}$ の頂点 $x_q^{(3m)}$ と隣接する．以上のようにグラフ H を構築すると, H は二部置換グラフである (図 5).

次にグラフ $G=(X_G,Y_G,E_G)$ を定義する．グラフ G は, 大まかに言うと, サイズが $10m^3B$ の二部クリークを m 個並べ, 隣り合う二つの二部クリークは X_G の頂点を $2m^2$ 個, Y_G の頂点を $2m^2$ 個を共有したグラフである (図 5)．厳密には, $V_G=\dot\bigcup_{i=1}^{m}U_X^{(i)}\dot\cup\dot\bigcup_{i=1}^{m}U_Y^{(i)}$ とし, $U^{(i)}=U_X^{(i)}\dot\cup U_Y^{(i)}$ とする．ここで, 各二部グラフ $G[U^{(i)}]=(U_X^{(i)},U_Y^{(i)},E[U^{(i)}](i\in\{1,\ldots,m\})$ は二部クリークで, $|U_X^{(i)}|=|U_Y^{(i)}|=5m^3B+4m^2$, および $|U_X^{(1)}|=|U_Y^{(1)}|=|U_X^{(m)}|=|U_Y^{(m)}|=5m^3B+2m^2$ とする．また, $i\in\{1,\ldots,m-1\}$ に対し, $|U_X^{(i)}\cap U_X^{(i+1)}|=2m^2$ および $|U_Y^{(i)}\cap U_Y^{(i+1)}|=2m^2$ とし, さらに, $|i-j|>1(i,j\in\{1,\ldots,m\})$ のとき $|U_X^{(i)}\cap U_X^{(j)}|=0$ とする．このとき, $|X_G|=(m-2)(5m^3B+4m^2)+2(5m^3B+2m^2)=5m^4B+4m^2(m-1)=|Y_G|$ であり, また, $|X_G|=|X_H|=|Y_G|=|Y_H|$ である．以上の構築方法から, グラフ G は二部置換グラフで (図 5), また $|E_G|>|E_H|$ である．

次に, 3-PARTITION 問題が解を持つ必要十分条件が, グラフ H が G の部分グラフ同型であることを証明する．

($\Rightarrow$) 集合 A の分割 $A^{(1)},\ldots,A^{(m)}$ を 3-PARTITION 問題の解とする．このとき, V_H から V_G への部分同型写像 f を次のように構成する．$A^{(i)}=\{j,j',j''\}$ のとき, $f(X^{(j)}\dot\cup X^{(j')}\dot\cup X^{(j'')})=U_X^{(i)}\setminus(U_X^{(i-1)}\cup U_X^{(i+1)})$ とし, また $f(Y^{(j)}\dot\cup Y^{(j')}\dot\cup Y^{(j'')})=U_Y^{(i)}\setminus(U_Y^{(i-1)}\cup U_Y^{(i+1)})$ とする． ただし, $U_X^0=U_X^{(m+1)}=U_Y^0=U_Y^{(m+1)}=\phi$ とする． このとき, $A^{(i)}$ は 3-PARTITION の解であることから, $|X^{(j)}\dot\cup X^{(j')}\dot\cup X^{(j'')}|=5m^3B$ で, かつ $|Y^{(j)}\dot\cup Y^{(j')}\dot\cup$

Vol.2010-AL-132 No.5
2010/11/19

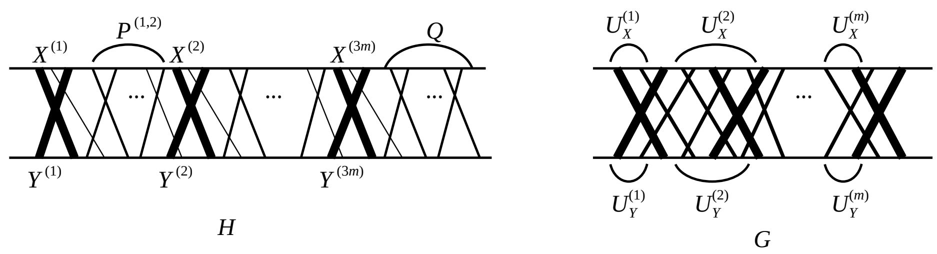

図 5 グラフ H と G の置換ダイアグラム．

$Y^{(j'')}| = 5m^3B$ である．また, G の構成方法から $|U_X^{(i)} \setminus (U_X^{(i-1)} \cup U_X^{(i+1)})| = 5m^3B$ で, かつ $|U_Y^{(i)} \setminus (U_Y^{(i-1)} \cup U_Y^{(i+1)})| = 5m^3B$ であり, $G[U^{(i)} \setminus (U^{(i-1)} \cup U^{(i+1)})]$ は二部クリークなので, このような f を構成可能である．

上述の埋め込み方から, H の残りの頂点は $\dot{\bigcup}_{i=1}^{m-1} P^{(i,i+1)} \dot{\cup} Q$ で, G の残りの頂点 W は $\dot{\bigcup}_{i=1}^{m-1}(U^{(i)} \cap U^{(i+1)}))$ である．ここで, $G[W]$ は m 個の二部クリーク $G[W \cap U^{(i)}](i \in \{1,\ldots,m\})$ で構成され, 隣り合う二つの二部クリーク $G[W \cap U^{(i)}]$ と $G[W \cap U^{(i+1)}]$ は X の頂点が $|U_X^{(i)} \cap U_X^{(i+1)}| = 2m^2$ 個, Y の頂点が $|U_Y^{(i)} \cap U_Y^{(i+1)}| = 2m^2$ 個の二部クリークである．ここで, $j \in A^{(k)}$ および, $j+1 \in A^{(k')}$ とする．このとき, パス $P^{(j,j+1)}$ を $f(p_1^{(j,j+1)}) \in U^{(k)}$ と $f(p_{2m}^{(j,j+1)}) \in U^{(k')}$ となるように, $G[W]$ への任意に埋め込めばよい．これにより, 辺 $\{f(x_p^{(k)}), f(p_1^{(j,j+1)})\}$ と $\{f(y_p^{(k')}), f(p_{2m}^{(j,j+1)})\}$ は E_G に存在する．また, 任意の $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ に対して,

$$\left|\dot{\bigcup}_{j=1}^{3m-1} P^{(j,j+1)}\right| = 2m(m-1) \leq 2m^2 = |W \cap U^{(i)} \cap U^{(i+1)}| - 2m^2 \qquad (2)$$

であるため, $P^{(j,j+1)}$ は $G[W]$ に埋め込める．

最後に $W' = W \setminus f(\dot{\bigcup}_{j=1}^{3m-1} P^{j,j+1})$ とする．このとき, $H[Q]$ から $G[W']$ への埋め込みを与える．$G[W']$ は m 個の二部クリーク $G[W' \cap U^{(i)}](i \in \{1,\ldots,m\})$ からなる．このとき, 式 2 から, 隣り合う二つの二部クリーク $G[W' \cap U^{(i)}]$ と $G[W' \cap U^{(i+1)}]$ は少なくとも X の頂点を m^2 個, Y の頂点を m^2 個共有する．これにより, $G[W']$ にはハミルトン閉路が存在するため, パス $H[Q]$ を埋め込むことができる．よって, グラフ H は G に部分グラフ同型である．

($\Leftarrow$) 単射 f を H から G への部分グラフ同型写像とする．このとき, H の各二部クリーク $C^{(i)}$ は, G の二つ以上の二部クリーク (ただし, 共有部分を除く) に埋め込まれることはない．つまり, $i \neq i'$ に対して, $f(C^{(j)}) \cap (U^{(i)} \setminus U^{(i+1)} \cup U^{(i-1)}) \neq \phi$ のとき, $f(C^{(j)}) \cap (U^{(i')}) \setminus (U^{(i'+1)} \cup U^{(i'-1)}) = \phi$ である．これは, $H[C^{(j)}]$ は二部クリークであるのに対し, $U^{(i)} \setminus (U^{(i+1)} \cup U^{(i-1)})$ と $U^{(i')} \setminus (U^{(i'+1)} \cup U^{(i'-1)})$ の間に辺がないからである．また, $|U^{(i)} \cap U^{i+1}|$ は高々$4m^2$ であり, $|C^{(j)}|$ は $10m^3$ 以上であるので, 任意の H の二部クリーク $C^{(j)}$ に対し, G の二部クリーク $U^{(i)}$ が唯一に決まる．そのため, j を $A^{(i)}$ に割り当てる．この割り当てが 3-PARTITION の解になっていないとする．このとき, $\sum_{j \in A^{(i)}} a_j > B$ となる i が存在する．これは, $|\dot{\bigcup}_{j \in A^{(i)}} C^{(j)}| = \sum_{j \in A^{(i)}} 10m^3 a_j \geq 10m^3(B+1) > |U^{(i)}|$ を意味し, f が単射であることと, 任意の $j \in A^{(i)}$ に対して, $f(C^{(j)}) \subseteq U^{(i)}$ であることに矛盾する． □

4. 多項式時間アルゴリズム

4.1 閾値グラフ

$G = (V, E)$ をグラフとする．G に, $\{u, v\} \in E$ である必要十分条件が, $w(v) + w(u) \leq S$ となる実数 S と各頂点 v への実数重み $w(v)$ が存在するとき, G を**閾値グラフ**であるという．閾値グラフに対して, 次の補題が知られている[4]．

補題 4. グラフ G を閾値グラフとし, 次数列を $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ とする．このとき, $N^*[v_n] \subseteq N^*[v_{n-1}] \subseteq \cdots \subseteq N^*[v_1]$ である．

アルゴリズムを提案する上で重要な補題を以下に示す．

補題 5. グラフ G と H を閾値グラフとし, $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ と $(d(u_1), d(u_2), \ldots, d(u_{n'}))$ をそれぞれ G と H の次数列とする．任意の $i \in \{1, \ldots, n'\}$ に対し, $d(u_i) \leq d(v_i)$ であるとき, H は G に部分グラフ同型である．

証明. 前提条件より, 任意の $i \in \{1, \ldots, n'\}$ に対して, $d(u_i) \leq d(v_i)$ であるとする．ここで, H が G の部分グラフ同型でないと仮定すると, $\{u_i, u_j\} \in E_H$ であり, かつ, $\{v_i, v_j\} \notin E_G$ である i と j の組が存在する．一般性を失うことなく, $i < j$ とする．ここで, 補題 4 より, 任意の $i'(\in \{1, \ldots, i\})$ に対し, $N^*(u_i) \subseteq N^*(u_{i'})$ であり, また $u_j \in N(u_i)$ であるため, $u_j \in N(u_{i'})$ となる．よって, u_j の隣接点集合は少なくとも $\{u_1, \ldots, u_i\}$ を含む．一方, $\{v_i, v_j\} \notin E_G$ より, $\{v_1, \ldots, v_{i'}\} = N(v_j)$ となるある $i'(< i)$ が存在する．よって, $d(u_i) \leq d(v_i)$ であることに矛盾する． □

また, 一般のグラフに対し, 次のことが言える．

補題 6. $G = (V_G, E_G)$ と $H = (V_H, E_H)$ をグラフとし, 各頂点集合を $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ と $V_H = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n'}\}$ とする．また, $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ と

$(d(u_1), d(u_2), \ldots, d(u_{n'}))$ をそれぞれ G と H の次数列とする．グラフ H が G の部分グラフ同型であるとき, 任意の $i \in \{1, \ldots, n'\}$ について, $d(u_i) \leq d(v_i)$ である.

以上, 補題 5, 6 から, 以下の定理を導くことができる.

定理 7. グラフ G と H を閾値グラフとし, $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ と $(d(u_1), d(u_2), \ldots, d(u_{n'}))$ をそれぞれ G と H の次数列とする．このとき, H が G の部分グラフ同型である必要十分条件は, 任意の $i \in \{1, \ldots, n'\}$ に対し, $d(u_i) \leq d(v_i)$ である.

定理 7 より, 二つの閾値グラフ G と H が与えられたとき, アルゴリズムはそれぞれのグラフの次数列を求め, 次数の大きい方から, それぞれの次数を比較すればよい. また, グラフの次数列は, バケットソートを用いることにより, 線形時間で求めることができる. よって, 閾値グラフ上の部分グラフ同型性判定問題は線形時間で解くことができる.

4.2 鎖グラフ

グラフ $G = (X, Y, E)$ を二部グラフとする．X の任意の 2 頂点 x_1, x_2 に対し, $N(x_1) \subseteq N(x_2)$ または, $N(x_2) \subseteq N(x_1)$ が成り立つとき, G を**鎖グラフ**という. G における X_G の頂点次数を降順に並べた列 $(d(x_1), d(x_2), \ldots, d(x_p))$ を，**G の X 次数列**と呼ぶ．同様に，**G の Y 次数列**も定義する.

鎖グラフの定義より，以下の性質が成り立つ.

補題 8. グラフ G を鎖グラフとし，G の X 次数列を $(d(x_1), d(x_2), \ldots, d(x_p))$，$Y$ 次数列を $(d(y_1), d(y_2), \ldots, d(y_q))$ とする．このとき，$N(x_p) \subseteq N(x_{p-1}) \subseteq \cdots \subseteq N(x_1)$ かつ $N(y_q) \subseteq N(y_{q-1}) \subseteq \cdots \subseteq N(y_1)$ である.

本小節では鎖グラフの部分グラフ同型性判定問題は線形時間で解ける事を示す．これ以降，$G = (X_G, Y_G; E_G)$ と $H = (X_H, Y_H; E_H)$ を鎖グラフとし，G の X 次数列を $(d(x_1), d(x_2), \ldots, d(x_p))$，$H$ の X 次数列を $(d(x'_1), d(x'_2), \ldots, d(x'_{p'}))$ とする．初めに，次の補題を示す.

補題 9. $f(X_H) \subseteq X_G$ を満たす H から G への部分グラフ同型写像 f が存在する事の必要十分条件は，任意の $i \in \{1, \ldots, p'\}$ について $d(x'_i) \leq d(x_i)$ であることである.

証明. $(\Rightarrow)$ ある $i \in \{1, \ldots, p'\}$ において，$d(x'_i) > d(x_i)$ であるとする．このとき，任意の $j \leq i$ に対して $d(x'_j) \geq d(x'_i)$ より，X_H は次数が $d(x'_i)$ 以上の頂点を少なくとも i 個含む. 一方，任意の $j \geq i$ に対して $d(x_i) \geq d(x_j)$ なので，X_G は次数が $d(x'_i)$ 以上の頂点を高々 $i-1$ 個しか含む事が出来ない．これは，$f(X_H) \subseteq X_G$ という仮定に矛盾する.

$(\Leftarrow)$ 写像 $f\colon V_H \to V_G$ を，$f(x'_i) = x_i$ かつ $f(y'_j) = y_j$ と定義する．もし f が部分グラフ同型写像でないとすると，$\{x'_i, y'_j\} \in E_H$ であり，$\{f(x'_i), f(y'_j)\} = \{x_i, y_j\} \notin E_G$ である i と j の組が存在する．補題 8 より任意の $h < j$ に対して $N(y'_j) \subseteq N(y'_h)$ である．したがって，$\{x'_i, y'_j\} \in E_H$ より $\{y'_j, y'_{j-1}, \ldots, y'_1\} \subseteq N(x'_i)$ となる．一方，$\{x_i, y_j\} \notin E_G$ より，$N(x_i) \subseteq \{y_{j-1}, y_{j-2}, \ldots, y_1\}$. これは $d(x'_i) > d(x_i)$ を意味し，仮定に矛盾する． □

鎖グラフは $2K_2$-free なので[14]，鎖グラフの連結成分のうち，辺を含むものは高々一つしかないという事が言える．二部グラフが連結であれば，頂点集合を二つの独立集合に分割する際，その分割は一意に決まる．また，次数 1 以上の頂点を孤立点に埋め込む事はできないため，H が連結であれば G に含まれる孤立点は無視できる．二部グラフの性質より，f が H から G への部分グラフ同型写像であるならば，$f(X_H) \subseteq X_G$ かつ $f(Y_H) \subseteq Y_G$ であるか，$f(Y_H) \subseteq X_G$ かつ $f(X_H) \subseteq Y_G$ である事が分かる．これらの考察と補題 9 から，次の系が導かれる.

系 10. H が連結である場合，H が G に部分グラフ同型である事の必要十分条件は，以下の *2* 条件のうち，どちらかが満たされる事である*: (1)* 任意の $i \in \{1, \ldots, p'\}$ に対して $d(x'_i) \leq d(x_i)$ である，または *(2)* 任意の $i \in \{1, \ldots, p'\}$ に対して $d(x'_i) \leq d(y_i)$ である.

上の系で，二つ目の条件が満たされるのは $f(X_H) \subseteq Y_G$ を満たす，H から G への部分グラフ同型写像が存在する場合である.

定理 11. 鎖グラフの部分グラフ同型性判定問題は，線形時間で解く事が出来る.

証明. H に含まれる全ての孤立点の集合を I とし，H から I を削除して得られる連結グラフを H' とする．まず，H' が G に部分グラフ同型であるか判定する．これは，系 10 より次数列の比較のみで判定できるため，線形時間で実行できる．以下で，H が G に部分グラフ同型であることの必要十分条件が，H' が G に部分グラフ同型であることであることを示す.

明らかに，H' が G に部分グラフ同型でなければ H も G に部分グラフ同型ではないので，H' が G に部分グラフ同型であると仮定する．単射 f' を H' から G への部分グラフ同型写像とする．I に含まれる頂点は全て孤立点なので，$V_G \setminus f'(V_{H'})$ の任意の頂点に埋め込める. ここで，部分グラフ同型性判定問題の入力に対する仮定より，$|V_G| \geq |V_H| = |V_{H'}| + |I|$ である．したがって，$f(I) \subseteq V_G \setminus f'(V_{H'})$ かつ $f(V_{H'}) = f'(V_{H'})$ を満たす単射を作ることができる．この f は明らかに H から G への部分グラフ同型写像である． □

4.3 補鎖グラフ

グラフ G の補グラフ $\overline{G}$ が鎖グラフであるとき, G を**補鎖グラフ**であるという. 鎖グラフの定義より，補鎖グラフについて以下の性質が成り立つ.

補題 12. グラフ $G = (X, Y; E)$ を補鎖グラフとし，X 次数列を $(d_Y(x_1), d_Y(x_2), \ldots, d_Y(x_p))$，$Y$ 次数列を $(d_X(y_1), d_X(y_2), \ldots, d_X(y_q))$ とする．このとき，$N[x_p] \subseteq N[x_{p-1}] \subseteq \cdots \subseteq$

$N[x_1]$ かつ $N[y_q] \subseteq N[y_{q-1}] \subseteq \cdots \subseteq N[y_1]$ であり，$G[X]$ と $G[Y]$ はクリークである．

これ以降，$G = (X_G, Y_G; E_G)$ と $H = (X_H, Y_H; E_H)$ を補鎖グラフとし，G の X 次数列を $(d_Y(x_1), d_Y(x_2), \ldots, d_Y(x_p))$，$H$ の X 次数列を $(d_Y(x'_1), d_Y(x'_2), \ldots, d_Y(x'_{p'}))$ とする．次の補題は，頂点集合の分割が与えられた上での部分グラフ同型性判定は容易である事を意味する．

補題 13. $f(X_H) \subseteq X_G$ かつ $f(Y_H) \subseteq Y_G$ を満たす H から G への部分グラフ同型写像 f が存在する事の必要十分条件は，任意の $i \in \{1, \ldots, p'\}$ について $d_Y(x'_i) \leq d_Y(x_i)$ であることである．

証明. $(\Rightarrow)$ ある $i \in \{1, \ldots, p'\}$ において，$d_Y(x'_i) > d_Y(x_i)$ であるとする．このとき，任意の $j \leq i$ に対して $d_Y(x'_j) \geq d_Y(x'_i)$ より，X_H は Y 次数が $d_Y(x'_i)$ 以上の頂点を少なくとも i 個含む．一方，任意の $j \geq i$ に対して $d_Y(x_i) \geq d_Y(x_j)$ なので，X_G は Y 次数が $d_Y(x'_i)$ 以上の頂点を高々$i-1$ 個しか含む事が出来ない．これは，$f(X_H) \subseteq X_G$ かつ $f(Y_H) \subseteq Y_G$ という仮定に矛盾する．

$(\Leftarrow)$ 写像 $f\colon V_H \to V_G$ を，$f(x'_i) = x_i$ かつ $f(y'_j) = y_j$ と定義する．もし f が部分グラフ同型写像でないとすると，$G[X_G]$ と $G[Y_G]$ がクリークであることから，$\{x'_i, y'_j\} \in E_H$ であり，$\{f(x'_i), f(y'_j)\} = \{x_i, y_j\} \notin E_G$ である i と j の組が存在する．補題8より任意の $h < j$ に対して $N[y'_j] \subseteq N[y'_h]$ である．したがって，$\{x'_i, y'_j\} \in E_H$ より $\{y'_j, y'_{j-1}, \ldots, y'_1\} \subseteq N_Y(x'_i)$ となる．一方，$\{x_i, y_j\} \notin E_G$ より，$N_Y(x_i) \subseteq \{y_{j-1}, y_{j-2}, \ldots, y_1\}$．これは $d_Y(x'_i) > d_Y(x_i)$ を意味し，仮定に矛盾する． □

あるグラフにおいて，ある頂点 u が他の全ての頂点と隣接している時，u を**万能頂点**と呼ぶ．補鎖グラフ G が万能頂点を持つ場合，分割 X_G, Y_G は一意には決まらない (任意の万能頂点は，X_G と Y_G のどちらにも入れることができるため)．一方，万能頂点以外の頂点は，どちらのセットに入れればよいかが一意に決定できる．したがって，U_G を G に含まれる全ての万能頂点の集合としたとき，U_G の点を X_G と Y_G のどちらに何個ずつ入れるかで，$|U_G| + 1$ 通りの分割が存在する (U_G の各点を区別する必要はない事に注意)．

定理 14. G の頂点数を n，辺数を m とすると，H が G に部分グラフ同型であるか，$O(n^2 m)$ 時間で判定できる．

証明. U_G を U_H をそれぞれ G と H に含まれる全ての万能頂点の集合とする．G の頂点集合の X_G, Y_G への分割は $|U_G + 1|$ 通り，H の頂点集合の X_H, Y_H への分割は $|U_H + 1|$ 通りある．したがって，G の分割と H の分割の組合せは $O(n^2)$ 個ある．そのそれぞれに対して，補題 13 の条件を $O(m+n)$ 時間で調べる事が出来る．(補題 13 では $f(X_H) \subseteq X_G$ かつ $f(Y_H) \subseteq Y_G$ の場合について述べているが，対称性より，$f(X_H) \subseteq Y_G$ かつ $f(Y_H) \subseteq X_G$ の場合についても同じ計算時間で確かめられる.) 以上より，全体として $O(n^2(n+m))$ 時間で部分グラフ同型性が判定できる．X_G と Y_G は共にクリークなので $m = \Omega(n^2)$ であり，したがって $O(n^2(n+m)) = O(n^2 m)$ である． □

参考文献

1) D.G.Corneil, H.Lerchs, and L.Stewart Burlingham, Complement reducible graphs, Discrete Applied Mathematics, **3** (1981), 163–174.
2) F.Dorn, Planar subgraph isomorphism revisited, (STACS 2010), 263–274.
3) D.Eppstein Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems, Journal of Graph Algorithms and Applications, **3** (1999), 1–27.
4) M.C.Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. Annals of Discrete Mathematics 57. Elsevier, 2nd edition, 2004.
5) A.Gupta and N.Nishimura, The complexity of subgraph isomorphism for classes of partial k-trees, Theoretical Computer Science, **164** (1996), 287–298.
6) M.R.Garey and D.S.Johnson, Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H. Freeman and Company, 1979.
7) P.Heggernes, D.Meister, and Y.Villanger, Induced subgraph isomorphism on interval and proper interval graphs, Proceedings of The 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2010), *to appear.*
8) D.S.Johnson, The NP-completeness column: an ongoing guide, Journal of Algorithms, **6** (1985), 434–451.
9) A. Lingas, Subgraph isomorphism for biconnected outerplanar graphs in cubic time, Lecture Notes in Computer Scinece, **210** (1986), 98–103.
10) D.Marx and I.Schlotter, Cleaning interval graphs, arXiv:1003.1260v1, available from: `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1003/1003.1260v1.pdf`
11) J.Matoušek and R.Thomas, On the complexity of finding iso- and other morphisms for partial k-trees, Discrete Mathematics, **108** (1992), 343–364.
12) A.M.S.Shrestha, T.Yamada, S.Tayu, and S.Ueno, A note on two problems of nano-PLA design, IEICE Technical Report, Circuits and systems, **108(453)** (2009), 183–184.
13) M.M.Sysło, The subgraph isomorphism problem for outerplanar graphs, Theoretical Computer Science, **17** (1982), 91–97.
14) M.Yannakakis, The complexity of the partial order dimension problem, SIAM J. Alg. Discr. Meth. **3** (1982) 351–358.