講座

数理論理学 (1)†

小野寛晰††

はじめに

最近，計算機科学において数理論理学に対する関心が高まってきた．これまでにももちろん Turing 機械の概念や帰納的関数の理論のように数理論理学は計算機科学の理論的な基礎づけに貢献してきたのだが，最近の関心はそれよりももう少し広い範囲にわたっているようだ．それは定理の機械証明とかプログラム理論におけるように数理論理学の結果や手法を直接的に利用する場合もあれば，人工知能の問題で数理論理学が役に立つらしいといった漠然とした期待からの関心という場合もある．それでは計算機科学と数理論理学はどのような点で結びつくのだろうか．ごく大雑把な言い方をするならば，計算機による機械的な手順による処理と数理論理学における形式的な取り扱いの類似にあると言ってよい．別の言い方をすれば，この二つはともに Leibniz の夢の延長上にあるということなのだ．

数理論理学における形式的な取り扱いということを少し論じておこう．普通の数学の取り扱いと数理論理学の取り扱いの大きな違いは，後者が数学の理論の内容よりもその数学の理論展開の枠組の方により関心をいだくというところにある．つまり，その理論のある結果が，どんな言語を用い，どんな仮定の下でどんな推論規則を使うことにより導かれるのかということに注意が向けられる．従って，ある一つの数学の定理を取り上げてみても，それが持つ数学上の意味よりはそれが (暗黙のものであろうと明白なものであろうと) どんな仮定から導かれるのかに注目する．このような反省をおこなうことにより，ある場合には多くの理論に共通な「メタ」定理を見いだすことができたり，またある場合には数学の議論の中に暗黙のうちに用いられていた概念や仮定を明るみに出すことができるのだ．Dedekind による実数の構成とそれに続く Cantor による集合論の展開が，後者に対するもっともよい例だろう．しかし一般の数学者はこのように枠組を限定して議論することに非常に固苦しさを感じるようである．更にどんな「言語」を用いて議論が展開されるのかということには全く関心がないと言ってもよい．この点，プログラム言語という人工的な言葉を使うことを余儀なくされている計算機科学者は，言語の問題の重要性を充分認識していることと思う．

たしかに計算機科学において数理論理学に対する関心が増してきたのは喜ばしいことなのだが，これまで過少評価されていた分だけ，過大な期待を受けているという感じを持つことがある．そんな意味で，今回から4回にわたるこの解説記事では，一般的な概説よりもむしろ私がこれまで計算機関係の方から受けたいろいろな質問や疑問を念頭において数理論理学のいくつかの問題を論じてみたい．数理論理学関係の本が数多く出版されている現在では，もはや一般的な概説を新たに書く必要もないだろうから．だからこの解説の内容は数理論理学のうちの特別な問題をいくつか取り上げたものに過ぎないということを了解していただきたい．読むための基礎知識としては大学教養程度の数学および命題論理についての一通りの知識を仮定している．

1. 1階の述語論理
——記号論理とその解釈

この章では1階の述語論理の基本的な概念および結果について述べる．この章を書くにあたって Barwise のすぐれた解説[2)]が参考になった．

1.1 1階の述語論理とは

数学の命題が1階の述語論理でどのように表現され，またどんな命題が1階の述語論理では表現できないかを，いくつかの例について説明してみよう．厳密な定義はすべて後回しにする．1階の述語論理の言語 (文の記述のために使われる記号の集まりは)，論理記号，変数記号，そして特定の理論を記述するための定数記号，関数記号，述語記号からなる．論理記号としては普通 $\wedge$(かつ)，$\vee$(または)，$\neg$(ではない)，$\supset$ (ならば)，$\forall$ (すべての対象について)，$\exists$ (ある対象

† Mathematical Logic by Hiroakira ONO (Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University).

†† 広島大学総合科学部総合科学科

について）が用いられる．また変数記号としては x, y, x_1, x_2, ……等の文字で表わされるような（通常は可算個の）記号が用意される．これらの変数はとり扱おうとしている理論によって記述されている対象の集まりの上を動くものとする．たとえば自然数論であれば，自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ を動くわけである．また自然数論を記述しようとするときには，定数記号として 0，関数記号としては自然数の上の加算，乗算を表わす $+$, $\times$，また述語記号としては自然数の間の関数を表わす $=$(等号)，$<$(不等号) などが用いられる．また集合論を展開しようとするときには，述語記号として $\in$ が用いられる．

このようにして，その理論での文――論理式――というものが定義されるのだが，それでは 1 階の述語論理というときの「1 階」は何を表わしているのだろうか．それはこういうことだ．今，考えている理論によって記述されている対象の集まりを M とする．このとき，1 階の述語論理では限定記号 $\forall$ および $\exists$ はそれぞれ M の上を動くと考える．つまり，$\forall x$ および $\exists x$ はそれぞれ「すべての M の要素 x について」および「ある M の要素 x について」というように解釈される．これに対し「2 階」の述語論理ではこのように M の上を動く限定記号だけでなく，M の部分集合全体を動く限定記号とか M 上で定義された関数全体を動く限定記号も許される．同様にして「3 階」の述語論理では更に関数全体の集合の部分集合全体を動く限定記号といったものも許されることになる．たとえば順序集合の公理としてはつぎの 1 階の論理式

(1) $\forall x(x\leq x)$

(2) $\forall x\forall y((x\leq y\wedge y\leq x)\supset x=y)$

(3) $\forall x\forall y\forall z((x\leq y\wedge y\leq z)\supset x\leq z)$

をとることができる．ところで集合 M 上の順序 $\leq$ が整列順序であるというのは，M の空でない任意の部分集合 S に対し必ず $\min S$ が存在することと定義される．したがって 2 階の論理式を用いれば，$\leq$ が整列順序であることは

(4) $\forall S(\exists xS(x)\supset\exists x(S(x)\wedge\forall y(S(y)\supset x\leq y)))$

のように表わされる．($S(x)$ は $x\in S$ だと解釈すればよい．)

このように 2 階以上の述語論理では，制限はあるものの集合論的な概念が論理の枠組に組み込まれている．この問題についてはもう一度あとで検討することにする．「2 階」の論理の表現力を少し弱めた「弱い 2 階」の述語論理というものがある．この論理では，M の部分集合全体を動く限定記号のかわりに，M の「有限」部分集合全体を動く限定記号および自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ の上を動く限定記号が用いられる．このようにしていろいろな強さの表現力を持った述語論理が定義されるわけだが，つぎにそれらの表現力の違いを群論の例について見てみることにしよう．

1.2 1 階の述語論理で表現できること

群の公理系としてつぎの 1 階の論理式 (1)，(2)，(3) で表わされる公理をとることができる．

(1) $\forall x\forall y\forall z(x+(y+z)=(x+y)+z)$

(2) $\forall x(x+0=x)$

(3) $\forall x\exists y(x+y=0)$.

ただし 0 は定数記号，$+$ は 2 変数の関数記号である．ここで代数系 $\boldsymbol{G}=\langle G,+,0\rangle$ をとる．G は空でない集合，$+$ は G 上の 2 項演算，また 0 は G の一つの要素とする．$\boldsymbol{G}$ が (1)，(2)，(3) を「みたす」とき，つまり $\boldsymbol{G}$ において (1)，(2)，(3) がすべて真になるとき，$\boldsymbol{G}$ は群の公理系 (1)，(2)，(3) のモデルであるといわれる．明らかに，$\boldsymbol{G}$ がこの群の公理系のモデルであるということは $\boldsymbol{G}$ が群であることに他ならない．群 $\boldsymbol{G}$ が Abel 群となるためには (1)，(2)，(3) のほかに

(4) $\forall x\forall y(x+y=y+x)$

をみたせばよいのだから，「Abel 群」という概念もやはり 1 階の論理式で表わされる．ここで x を n 個たし合せたものを nx と書くことにしよう．厳密には $1x=x$, $nx=((n-1)x+x)$ $(n>1)$ のように帰納的に定義すればよい．このような略記法を用いれば，たとえば「群 $\boldsymbol{G}$ の任意の元の位数は高々 n である」ことは

(5) $\forall x(x=0\vee 2x=0\vee\cdots\vee nx=0)$

のように書かれるから（n が具体的にあたえられさえすれば）1 階の論理式で表現できる．つぎに Abel 群が完備 (divisible) であることは

(6) $\forall n\geqq 1\forall x\exists y\ (ny=x)$

のように書かれる．この式は「$\forall n\geqq 1$」という形の限定記号を含んでいるから，弱い 2 階の論理式であるが 1 階の論理式ではない．(6) のかわりに，1 階の論理式の無限集合

(7) $\forall x\exists y(2y=x)$, $\forall x\exists y(3y=x)$, …, $\forall x\exists y(ny=x)$, …

ならとることができる．もちろん，完備という条件を (6) 以外の形に表わすことができれば，これを有限個

の1階の論理式によって表現できる可能性はある．しかしながら，つぎの定理はこのような可能性もあり得ないことを主張している．

定理 1.1 すべての完備 Abel 群でなりたつような，1階の論理式のどんな有限集合をとっても，それはまた完備でないある Abel 群でなりたつ．

したがって完備 Abel 群を1階の論理式を有限個用いて公理化することは不可能である．つぎに群 $\boldsymbol{G}$ がねじれ Abel 群であるとは，$\boldsymbol{G}$ が

（8） $\forall x \exists n \geqq 1 \ (nx=0)$

をみたすことをいう．（8）も弱い2階の論理式であって1階の論理式ではない．（8）を（5）の類推から

（9） $\forall x (x=0 \vee 2x=0 \vee \cdots \vee nx=0 \vee \cdots)$

を書くこともできるが，このような「無限の論理和」を用いることは1階の述語論理では許されない．ここでつぎの定理が証明される．

定理 1.2 すべてのねじれ Abel 群でなりたつような1階の論理式全体の集合は，あるねじれのない Abel 群でもなりたつ．

いまねじれ Abel 群を特徴づけるような1階の論理式のある集合 T が存在したとしよう．明らかに，T のどの論理式もすべてのねじれ Abel 群でなりたつ．すると定理 1.2 から T はまたあるねじれのない Abel 群でもなりたつことになる． これは T がねじれ Abel 群を特徴づけるという仮定に反す．つまり，「完備 Abel 群」の場合と異なり「ねじれ Abel 群」という概念は1階の論理式のどんな（無限）集合を用いてさえも表わすことができない．それに反して，弱い2階の論理式を用いれば（8）のように表わすことができるのである．

上の二つの定理は，**1.6** で述べる一般的な定理から導かれる．

1.3 1階の述語論理の論理式

それでは1階の述語論理というものを一般的な形できちんと定義することにしよう．**1.1** で述べたように我々が用いる言語 $\boldsymbol{L}$ は論理記号，変数記号，定数記号，関数記号，述語記号からなっている．数学の理論を形式化しようとするときには，多くの場合等号 $=$ を述語記号として入れておく必要がある．$\boldsymbol{L}$ は定数記号および関数記号を一つも含まなくてもよいが，述語記号は少なくとも一つは含まなければならない．さもないと，「$\boldsymbol{L}$ の論理式」というものが一つも構成されなくなってしまうから．また $\boldsymbol{L}$ の各関数記号および述語記号はそれらが何変数を持つかが確定しているものとする．たとえば自然数論において加算 $+$ は2変数の関数記号，不等号 $<$ は2変数の述語記号というように．

定義 1.1 $\boldsymbol{L}$ の項 (term) はつぎのように帰納的に定義される．

1) $\boldsymbol{L}$ の各変数記号および定数記号はそれぞれ $\boldsymbol{L}$ の項である．

2) $t_1, \cdots, t_m$ が $\boldsymbol{L}$ の項であり f が $\boldsymbol{L}$ の m 変数の関数記号ならば，$f(t_1, \cdots, t_m)$ も $\boldsymbol{L}$ の項である．

項 t に含まれる各変数記号に具体的な対象をあてはめてみると，t 自身もある対象を表わしていることがわかる．この意味において，項は対象の一つの表現形式だということができる．上の定義にしたがえば，たとえば $+(x, y)$ という表現が項になるわけだが，習慣にしたがって $(x+y)$ と書くことにする．

定義 1.2 $\boldsymbol{L}$ の1階の（述語論理の）論理式はつぎのように帰納的に定義される．

1) R が $\boldsymbol{L}$ の任意の n 変数の述語記号，$t_1, \cdots, t_n$ が $\boldsymbol{L}$ の任意の項であるとき，$R(t_1, \cdots, t_n)$ は $\boldsymbol{L}$ の1階の論理式である．

2) φ および ψ がともに $\boldsymbol{L}$ の 1階の論理式であるとき，$(\varphi \wedge \psi)$，$(\varphi \vee \psi)$，$\neg\varphi$，$(\varphi \supset \psi)$ もまた $\boldsymbol{L}$ の1階の論理式である．

3) φ が $\boldsymbol{L}$ の1階の論理式で，v が変数記号ならば（$\forall v \varphi$）および（$\exists v \varphi$）もまた $\boldsymbol{L}$ の1階の論理式である．

この定義の 1) の場合についてもやはり習慣にしたがって $=(t_1, t_2)$ や $<(t_1, t_2)$ を $t_1=t_2$ および $t_1<t_2$ のように書く．また混乱をきたさない限り，論理式に現われるカッコは省略される．ここしばらくは1階の論理式のみをあつかうので，断わらない限りは単に論理式とよぶことにする．またこれからは変数記号のことを単に変数ということにする．

ここで論理式の中に現われる変数の現われ方について注意しておきたい．例として $(x<3)$ および $\exists x (x<3)$ という二つの論理式に現われる変数 x について考えてみよう．一番目の論理式では，論理式の意味およびその値が変数 x のとる値に依存しているのに対し，二番目の論理式ではそれらは全く x の解釈には依存しない．つまり x は見かけ上の変数として φ に現われるにすぎない．そこで最初のような形で x が論理式 φ に現われるとき，x は φ で自由であるといわれ，二番目のような形で現われる時には，x は φ で

束縛されているということにする．もちろん，変数 x が φ の中に何個所も現われることもあるから，x が φ で自由であり同時に束縛されているということも起り得る．φ で自由であるような変数——φ の自由変数——のうち $v_1, \cdots, v_n$ についてのみ着目するとき，このことを強調して $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ と書くこともある．(この場合，実際には v_i が一個所も現われていなくてもよい.) また，φ の自由変数が一つも存在しないとき，φ は閉じた論理式といわれる．φ の自由変数が $v_1, \cdots, v_m$ のとき $\forall v_1 \cdots \forall v_m \varphi$ は閉じた論理式になる．この論理式を φ の閉包という．

1.4 正しい論理式

L の論理式という概念が導入されたから，つぎにどんな論理式が正しいのかまたは正しくないのかを定める基準をあたえなければならない．そもそも論理学の主要な目標の一つは正しい論理式はどのようなものであり，どのようにして判定されるのかを明らかにすることにあったのだから．しかしひとくちに「正しい」論理式といっても,「ある解釈のもとで正しい」という場合と「どんな解釈をしても正しい」という場合とがある．いいかえるなら，ある仮定の下で正しい論理式とつねに正しい論理式というのがあるのだ．そこでまず「解釈」という言葉の意味をはっきりさせておきたい．言語 L に属す記号のうち論理記号の解釈は通常の意味にとるとしても，その他の記号についてはさまざまな解釈をあたえることが可能だろう．このことから，つぎに述べる L の構造という概念が得られる．これは解釈という言葉を形式的に定義したものに他ならない．

言語 L に対し，L の構造 $\mathfrak{M}=\langle M, F\rangle$ はつぎのものからなる．

1) $\mathfrak{M}$ の対象領域とよばれる，空でない集合 M.
2) L の定数記号，関数記号，述語記号に対して定義される関数 F. ただし $F(\alpha)$ は普通 $\alpha^{\mathfrak{M}}$ と書かれ，つぎの条件をみたす．
   a．c が定数記号のとき，$c^{\mathfrak{M}} \in M$.
   b．f が n 変数の関数記号のとき，$f^{\mathfrak{M}}$ は M^n から M への関数，
   c．R が n 変数の述語記号で等号 $=$ と異なるとき，$R^{\mathfrak{M}}$ は M^n の部分集合．

L の構造 $\mathfrak{M}$ があたえられると，L のどんな論理式 φ についても，それが $\mathfrak{M}$ によって定まる解釈の下で正しいかどうかを順次決めていくことができる．だが，この定義を厳密におこなおうとするときには，少し注意が必要だ．というのは，たとえば構造 $\mathfrak{M}=\langle M, F\rangle$ で論理式 $\forall v\varphi(v)$ が正しいということは，M のどんな要素 a に対しても $\mathfrak{M}$ で $\varphi(a)$ が正しい，と定義すればよさそうだ．しかし，a は L の言語には属していないから $\varphi(a)$ という表現は L の論理式にはならないのだ．この点を補うために v とまず言語 L を拡張して，M の各要素 a に対して定数記号 $\bar{a}$ をつけ加えた言語 $L[\mathfrak{M}]$ を考えることにする．もちろんこの場合 $\bar{a}$ の $\mathfrak{M}$ における解釈 $\bar{a}^{\mathfrak{M}}$ としては a をとることにする．さて，変数を一つも含まないような $L[\mathfrak{M}]$ の任意の項 t に対し，t の $\mathfrak{M}$ による解釈 $t^{\mathfrak{M}}$ をつぎのように定めておこう．

1) t が $L[\mathfrak{M}]$ の定数記号 c である時，$t^{\mathfrak{M}}=c^{\mathfrak{M}}$.
2) t が $f(t_1, \cdots, t_n)$ の形の時，$t^{\mathfrak{M}}=f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}})$.

明らかに $t^{\mathfrak{M}}$ は M の要素になる．つぎに言語 $L[\mathfrak{M}]$ (L ではない) の任意の閉じた論理式 φ に対し，関係 $\mathfrak{M}\models\varphi$ をつぎのように帰納的に定義する．そして $\mathfrak{M}\models\varphi$ を，「$\mathfrak{M}$ において φ は正しい(true)」と読むことにする．

1) R が L の (等号 $=$ とは異なる) n 変数の述語記号，$t_1, \cdots, t_n$ が L の項のとき，
   $\mathfrak{M}\models R(t_1, \cdots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}}$

1') $\mathfrak{M}\models t_1=t_2 \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{M}}=t_2^{\mathfrak{M}}$

2) $\mathfrak{M}\models(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\varphi$ かつ $\mathfrak{M}\models\psi$

3) $\mathfrak{M}\models(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\varphi$ または $\mathfrak{M}\models\psi$

4) $\mathfrak{M}\models\neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\varphi$ ではない，

5) $\mathfrak{M}\models(\varphi\supset\psi) \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\varphi$ でないか，または $\mathfrak{M}\models\psi$

6) $\mathfrak{M}\models(\forall v\varphi(v)) \Leftrightarrow$ どんな $a\in M$ に対しても $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{a})$,

7) $\mathfrak{M}\models(\exists v\varphi(v)) \Leftrightarrow$ ある $a\in M$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{a})$,

ただし，6)，7) において $\varphi(\bar{a})$ は，論理式 $\varphi(v)$ において変数 v が自由変数として現われている個所をすべて定数記号 $\bar{a}$ でおきかえて得られるような論理式である．つぎに，φ を L の任意の論理式，φ^* を φ の閉包としたとき，$\mathfrak{M}\models\varphi^*$ がなりたつときそしてそのときのみ $\mathfrak{M}\models\varphi$ がなりたつと定義しておく．(φ^* は L の，したがって $L[\mathfrak{M}]$ の閉じた論理式になっていることに注意.) L の論理式 φ に対し，$\mathfrak{M}\models\varphi$ がすべての構造 $\mathfrak{M}$ においてなりたつとき，φ はつねに正しい (valid) といわれる．Φ を閉じた論理式のある集合としよう．すべての $\varphi\in\Phi$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi$ がなりたつならば，構造 $\mathfrak{M}$ は Φ のモデルであるといわれ，

$\mathfrak{M}\models\Phi$ と書かれる．$\boldsymbol{L}$ の構造のあるクラス $\boldsymbol{K}$ が（**有限）公理化可能**であるとは，$\mathfrak{M}\in\boldsymbol{K}$ であることと $\mathfrak{M}\models\Phi$ とが同値になるような1階の閉じた論理式のある（有限）集合 Φ が存在することである．**1.1** で述べたように，Abel 群全体のクラスは有限公理化可能．完備 Abel 群全体のクラスは公理化可能だが有限公理化は可能でない．そしてねじれ Abel 群全体のクラスは公理化さえも可能でないということになる．このほか有限公理化可能な構造のクラスの例としては，環，整域，体，標数 $p(p\neq0)$ の体，順序体，線形順序，Boole 代数などがあげられる．一方，有限公理化は可能でないが公理化可能なクラスとしては，ねじれのない群，標数0の体，代数的閉体，実閉体，有限体などをあげることができる．

このようにして我々は論理式が正しいかどうかを厳密に定義することができた．この定義は，我々が論理式に対していだいていた直観的な意味づけを数学的に整理したものだから，これ自身には何も問題はない．しかし，$\boldsymbol{L}$ の構造というような集合概念を背景とし意味内容に基づいて定義するかわりに，もっと形式的，構成的な方法で「正しい」論理式という概念が定義できないものだろうか．つまり論理式の意味内容から切り離して，いわば機械的に正しい論理式を導く手続きがないのだろうか．この問いに対しては，数学者が普段，定理の証明とよんでいる手続きが参考になる．その手続きとは，いくつかの基本的な仮定から出発して，その上に確実な推論をつみ重ねていくことからなっている．この手続きを整理し，それを厳密に表現することにより，形式的な意味での証明の手続きという概念が得られよう．そしてこのような，「意味づけ」よりも「証明」を重視する立場では，「正しい推論とは何か」という問いに答えることによって間接的に「正しい論理式とは何か」という問いに答えようとするのだ．そして，すべての数学を記号計算としてとらえようとした Leibniz の夢は，人間の精神活動の中にこのような機械的な手続きとして表現されるような推論機構を見いだすことだったのではなかろうか．

1.5　証明可能ということ

ここで我々は証明という概念をきちんと定義することにする．そして，「正しい」論理式にかわるものとして「証明可能な」論理式という概念を導入する．もちろん，証明可能な論理式はつねに正しいものでなければならない．そして出来ることならば，つねに正しい論理式がすべて証明可能となるような「証明の手続き」であって欲しい．このような「証明の手続き」——**形式体系**——としては Hilbert によるものおよび Gentzen によるものがよく知られている．それぞれ特徴があるのだが，ここでは Gentzen による形式体系 **LK** について述べてみよう．

Gentzen の体系 **LK** では，証明の各ステップでは論理式のかわりに **sequent** というものがとり扱われる．$\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_m,\ \psi_1,\ \cdots,\ \psi_n$ を論理式としたとき

（1）　$\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_m\rightarrow\psi_1,\ \cdots,\ \psi_n$

の形の表現を sequent という．ここで $m,\ n$ は0でもよい．したがって，$\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_m\rightarrow$ とか $\rightarrow\psi_1,\ \cdots,\ \psi_n$ とか $\rightarrow$ も sequent である．（1）は内容的には $\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_m$ のすべてから $\psi_1\vee\cdots\vee\psi_n$ が導かれる，つまり

$$(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m)\supset(\psi_1\vee\cdots\vee\psi_n)$$

と同じ意味を持つ．しかしながらこの論理式と（1）の sequent とを区別するところに Gentzen の体系の特徴がある．

LK における基本的な仮定（公理）—— **beginning sequent** とよばれる——としては $\varphi\rightarrow\varphi$ の形のものだけをとる．つぎに **LK** の推論規則を列挙しよう．以下では，$\Gamma,\ \Delta,\ \Theta,\ \Lambda$ は論理式の任意の有限列(空でもよい)，t は任意の項，w は任意の変数とする．

I. 構造に関する推論規則

1 a)　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta}$　　1 b)　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi}$

2 a)　$\dfrac{\varphi,\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta}{\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta}$　　2 b)　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi,\varphi}{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi}$

3 a)　$\dfrac{\Delta,\varphi,\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}{\Delta,\psi,\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta}$　　3 b)　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi,\psi,\Lambda}{\Gamma\rightarrow\Theta,\psi,\varphi,\Lambda}$

4)　(cut)　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi\quad\varphi,\Delta\rightarrow\Lambda}{\Gamma,\Delta\rightarrow\Theta,\Lambda}$

II. 論理記号に関する推論規則

1 a)　（∧－右）　$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi\quad\Gamma\rightarrow\Theta,\psi}{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi\wedge\psi}$

1 b)　（∧－左）

i）$\dfrac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}$　　ii）$\dfrac{\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}$

2 a)　（∨－右）

i）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi}{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi\vee\psi}$　　ii）$\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\psi}{\Gamma\rightarrow\Theta,\varphi\vee\psi}$

2 b)　（∨－左）　$\dfrac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Theta\quad\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\rightarrow\Theta}$

3 a) (¬－右) $\dfrac{\varphi, \Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta, \neg\varphi}$ 3 b) (¬－左) $\dfrac{\Gamma\to\Theta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma\to\Theta}$

4 a) (⊃－右) $\dfrac{\varphi, \Gamma\to\Theta, \psi}{\Gamma\to\Theta, \varphi\supset\psi}$ 4 b) (⊃－左) $\dfrac{\Gamma\to\Theta, \varphi \quad \psi, \Delta\to\Lambda}{\varphi\supset\psi, \Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda}$

5 a) (∀－右) $\dfrac{\Gamma\to\Theta, \varphi(w)}{\Gamma\to\Theta, \forall v\varphi(v)}$ 5 b) (∀－左) $\dfrac{\varphi(t), \Gamma\to\Theta}{\forall v\varphi(v), \Gamma\to\Theta}$

6 a) (∃－右) $\dfrac{\Gamma\to\Theta, \varphi(t)}{\Gamma\to\Theta, \exists v\varphi(v)}$ 6 b) (∃－左) $\dfrac{\varphi(w), \Gamma\to\Theta}{\exists v\varphi(v), \Gamma\to\Theta}$

ただし（∀－右）および（∃－左）において，変数 w は推論規則の下がわの sequent の中のどの論理式においても自由変数として現われてはならない．

つぎに**証明図**および証明図の **end sequent** という概念を帰納的に同時に定義する．

1) おのおのの beginning sequent はそれだけで証明図であり，その end sequent はその beginning sequent 自身である．

2) $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ がそれぞれ $S_1, \cdots, S_n$ を end sequent とする証明図であり，さらに

$$\frac{S_1\cdots S_n}{S}$$

が推論規則の一つであれば，

$$\frac{\boldsymbol{P}_1\cdots \boldsymbol{P}_n}{S}$$

もまた証明図であり，その end sequent は S である．（明らかに n は1または2である．）

S を end sequent とするような証明図——S の証明図——が存在するとき，S は（**LK** で）**証明可能**であるといわれる．とくに論理式 φ に対し，sequent $\to\varphi$ が証明可能であるとき，φ は証明可能であるといわれる．ここで，例として $\to\exists u\forall v(R(u)\supset R(v))$ の証明図をあげておこう．

$$\begin{array}{c}
R(w)\to R(w) \\ \hline
R(w)\to R(w),\ R(w') \\ \hline
\to R(w),\ R(w)\supset R(w') \\ \hline
\to R(w),\ \forall v(R(w)\supset R(v)) \\ \hline
\to R(w),\ \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)) \\ \hline
\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)),\ R(w) \\ \hline
R(z)\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)),\ R(w) \\ \hline
\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)),\ R(z)\supset R(w) \\ \hline
\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)),\ \forall v(R(z)\supset R(v)) \\ \hline
\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)),\ \exists u\forall v(R(u)\supset R(v)) \\ \hline
\to \exists u\forall v(R(u)\supset R(v))
\end{array}$$

このような形式体系上で数学の理論を展開するときは，その理論固有の仮定，すなわちその理論の公理を別にあたえておく必要がある．ところで一般に数学の形式的な理論とは閉じた論理式のある集合（無限集合でもよい）である，ということができる．そこで T を閉じた論理式のある集合としよう．**LK** において T から論理式 φ **が導かれる**（または，T で φ が証明可能）とは，T のある有限部分集合 Γ が存在して $\Gamma\to\varphi$ が証明可能であることをいう．また T **が矛盾を含む**とは，T のある有限部分集合 Γ が存在して $\Gamma\to$ が証明可能であることをいう．T が矛盾を含まないとき，T は**無矛盾**であるといわれる．数学のある形式的な理論を記述するための言語 $\boldsymbol{L}$ が等号 $=$ を含むときには，公理としてはその理論固有の公理のほかにつぎの**等号に関する公理**を仮定する必要がある．

1) $\forall x(x=x)$

2) $\boldsymbol{L}$ の任意の m 変数の関数記号 f に対し
$\forall x_1\cdots\forall x_m\forall y_1\cdots\forall y_m\ ((x_1=y_1\wedge\cdots\wedge x_m=y_m)$
$\supset f(x_1, \cdots, x_m)=f(y_1, \cdots, y_m))$

3) $\boldsymbol{L}$ の任意の n 変数の述語記号 R に対し
$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y_1\cdots\forall y_n\ ((x_1=y_1\wedge\cdots\wedge x_n=y_n$
$\wedge R(x_1, \cdots, x_n)\supset R(y_1, \cdots, y_n))$

これからは言語 $\boldsymbol{L}$ が等号を含んでいる場合には，暗黙のうちにこれらの等号に関する公理を仮定しておく．

このように形式体系 **LK** とその上の形式的な理論とが定義されたのだが，この形式体系 **LK** で証明可能な論理式は正しく，そしてこの逆もなりたつことが証明される．この定理は ***LK*** に対する完全性定理とよばれ，歴史的には Gödel により Hilbert 流の体系に対して証明された．まずこの定理をつぎのような強い形であたえておこう．

定理 1.3 **(LK に対する完全性定理)** T を言語 $\boldsymbol{L}$ の閉じた論理式の任意の集合とする．**LK** において T から論理式 φ が導かれるための必要十分条件は，T のモデルとなるような $\boldsymbol{L}$ の任意の構造で φ が正しいことである．

系 1.4 φ が **LK** で証明可能であるための必要十分条件は，φ がつねに正しいことである．

証明 定理 1.3 において T として空集合をとればよい．

系 1.5 T を閉じた論理式の任意の集合とする．T が無矛盾のとき，またちょうどそのときのみ T のモデルが存在する．

証明． いま内容的に矛盾を意味するような論理式（たとえば $(\psi \wedge \neg \psi)$ の形の論理式）を一つとり，それを φ とする．明らかに，T から φ が導かれるための必要十分条件は T が矛盾を含むことである．またどんな構造においても φ は正しくない．したがって定理 1.3 を用いると，T が矛盾を含むための必要十分条件は T がモデルを持たないことである，ということが導かれる．この対偶をとればよい．

このようにして，**LK** で証明可能であることとつねに正しいことが同値であることがたしかめられた．そしてこのような形式体系での証明はつぎの二つの特徴を持っている．第一の特徴は，もちろんそれが有限の手続きからなるということであり，第二は推論のつみ重ねとしての証明では内容的な解釈に基づいた場合よりもより多くの情報が証明図から得られるということなのである．この点についてはまたあとでふれる．

1.6 二つの定理

最後に，1階の述語論理における重要な定理を二つあげ，その応用を二，三述べることにしよう．

定理 1.6（コンパクト性定理——Gödel-Malcev）
T を閉じた論理式の集合とする．T の任意の有限部分集合 T_0 に対し，T_0 のモデルが存在するならば，T 自身のモデルも存在する．

証明 ここでは完全性定理を用いた証明をあたえておこう．仮定と系 1.5 から，T のどんな有限部分集合も無矛盾である．したがって（無矛盾性の定義より）T も無矛盾でなければならない．再び系 1.5 を用いれば，T のモデルが存在することがわかる．

定理 1.7（**Löwenheim-Skolem の定理**）閉じた論理式の集合 T は無限モデルを持つと仮定しよう．もし T が有限集合ならば，任意の無限濃度 β に対し，濃度 β の T のモデルが存在する．また T が濃度 α の無限集合ならば，$\beta \geqq \alpha$ となる任意の濃度 β に対し，濃度 β の T のモデルが存在する．ただし，構造 $\mathfrak{M}$ の濃度が β であるとは，$\mathfrak{M}$ の対象領域の濃度が β であることをいう．

後述の定理 1.1 の証明からわかるように，コンパクト性定理は弱い2階の述語論理ではなりたたない．一方 Löwenheim-Skolem の定理は弱い2階の述語論理ではなりたつが2階の論理ではなりたたない．さてここでコンパクト性定理の一つの応用として定理 1.1 の証明をあたえておこう．定理 1.2 もやはりコンパクト性定理により証明される．（この証明は読みとばしてさしつかえない．）

［定理 1.1 の証明］ いま $\{\psi_1, \cdots, \psi_k\}$ をすべての完備 Abel 群でなりたつような論理式の集合とし，$(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ を ψ とおく．T を Abel 群の公理および $\forall x \exists y\ (ny=x)$ の形の論理式 $(n \geqq 2)$ 全体からなる集合とする．ψ のとり方から $T \cup \{\neg \psi\}$ のモデルは存在しえない．したがってコンパクト性定理（の対偶）より T のある有限部分集合 T_0 が存在して $T_0 \cup \{\neg \psi\}$ のモデルは存在しない．いま T_0 に現われる $\forall x \exists y\ (ny=x)$ の形の論理式のうち最大の n を持つものをとり，その n を N とする．（そのような形の論理式が一つも存在しないときには $N=1$ とおく．）T_1 を Abel 群の公理および $\forall x \exists y\ (ny=x)$ の形の論理式で $2 \leqq n \leqq N$ となるもの全体からなる集合とすれば $T_0 \subset T_1$ となるから $T_1 \cup \{\neg \psi\}$ のモデルも存在しない．いいかえれば T_1 の任意のモデルで ψ が正しいことになる．ここで $p > N$ なる素数 p を一つとり，この p に対し整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ を p を法として類別したときの剰余類全体が加法に対してなす群 $\boldsymbol{Z}_p$ を考えてみる．明らかに $n < p$ ならば $\boldsymbol{Z}_p$ で $\forall x \exists y\ (ny=x)$ がなりたつ．したがって $\boldsymbol{Z}_p$ は T_1 のモデルになるから ψ がなりたつ．一方，任意の $x \in \boldsymbol{Z}_p$ に対し $px=0$ となるから $\boldsymbol{Z}_p$ は完備ではない．つまり $\psi_1, \cdots, \psi_k$ は完備でない Abel 群 $\boldsymbol{Z}_p$ でもなりたつことがわかった．

これまでは群論の例ばかりをあげてきたが，つぎは実数についての例をあげておこう．我々は解析学で実数体 $\boldsymbol{R}$ の構成および実数の公理が $\boldsymbol{R}$ を一意的に定めることを学んだ．普通それらの公理は定数記号 0，1，関数記号 $+$，$\times$ および述語記号 $=$，$<$ を用いて記述される．ここでつぎの定理が証明される．

定理 1.8 1階の閉じた論理式のどんな集合（無限でもよい）を実数の公理としてとっても，それは実数体 $\boldsymbol{R}$ を一意的に定めることはできない．

証明 上のような記号からなる言語を $\boldsymbol{L}$ とすると $\boldsymbol{L}$ の1階の論理式は高々可算個である．したがって特に $\boldsymbol{R}$ で正しいような1階の閉じた論理式全体の集合も可算である．いまこの集合を T とすると，Löwenheim-Skolem の定理より T は可算モデルを持つ．もちろんこのモデルは $\boldsymbol{R}$ と同型とはなり得ない．

Löwenheim-Skolem の定理は弱い2階の論理でもなりたっている．したがって上の証明と同様にして，

T' を $\boldsymbol{R}$ で正しいような弱い2階の（閉じた）論理式全体の集合とすると，T' も可算モデルを持つことがわかる．弱い2階の論理式で表現されるものとしては Archimedes の公理

$\forall x \exists n\ (x \leq n1)$

をあげることができる．ここで $n1$ は1を n 個たしあわせたものである．ところで定理1.8の証明を検討してみると，言語 $\boldsymbol{L}$ が可算であることから可算モデルの存在が導かれていることに気がつく．そこで言語をより強めてあらかじめ各実数 $r \in \boldsymbol{R}$ に対して定数記号 $\bar{r}$ を用意しておいたらどうなるであろうか．いまこのような言語を $\boldsymbol{L'}$ とする．明らかに $\boldsymbol{L'}$ は非可算個の記号を含む．

定理 1.9 $\boldsymbol{R}$ で正しいような $\boldsymbol{L'}$ の1階の閉じた論理式全体の集合を S とする．すると S のすべての論理式がなりたつような，Archimedes 的でない（つまり，Archimedes の公理をみたさないような）$\boldsymbol{R}$ の拡大体 $\boldsymbol{R^*}$ が存在する．

証明 いま新しい定数記号 c を導入し，$T_0=\{\bar{r}<c \mid r \in \boldsymbol{R}\}$ とする．そして T を S と T_0 との和集合とする．T の任意の有限部分集合はモデルを持つから，コンパクト性定理より T もまたモデルを持つ．このモデルを $\boldsymbol{R^*}$ とおく．$\boldsymbol{R^*}$ で T_0 の各論理式がなりたつから $\boldsymbol{R^*}$ は非 Archimedes 的であり，また順序体の公理は1階の閉じた論理式で表わされ $\boldsymbol{R}$ でなりたつのだから，$\boldsymbol{R^*}$ でもなりたつ．さらに各定数記号 $\bar{r}$ の $\boldsymbol{R^*}$ における解釈全体のなす集合は明らかに $\boldsymbol{R}$ と同型である．したがって $\boldsymbol{R^*}$ は $\boldsymbol{R}$ の拡大体とみなすことができる．

c の $\boldsymbol{R^*}$ における解釈を $\bar{c}$ とすると，$\bar{c}$ はどんな「標準的な」実数よりも大きい．したがって $(1/\bar{c})$ は「無限小」の実数になる．この考えが Robinson により始められた「超準解析 (nonstandard analysis)」の基礎になっているのである．さてここでもう一度，実数の公理が $\boldsymbol{R}$ を一意的に定めるということの意味を反省しておこう．通常の実数の公理のうち，1階の論理式で表わされていないのはつぎの実数の連続性の公理である．

$\forall X \subseteq \boldsymbol{R}$（$X$ が空でなくさらに上に有界ならば，X は上限を持つ）．

ここで変数 X は $\boldsymbol{R}$ の部分集合全体を動いているのである．このことは，一意性の証明が実は集合論の枠組のなかでなされていたことを意味する．そしてこれと全く同じことが Peano の公理に対する自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ の一意性の証明に対してもいえる．

だいぶ話が抽象的になってしまったが，ここで用いられた手法はプログラムの諸概念の定義可能性を論ずる際にも有効に用いられる．このことは最後の章であらためて述べるつもりだ．

参考文献

この章を書くにあたって参考にした文献のみをあげておく．

1) J. W. R. デデキント（河野伊三郎訳）：数について，p. 163，岩波書店 (1961)．
2) Barwise, J.: An introduction to first-order logic, Handbook of mathematical logic, ed. by Barwise, J. Studies in logic and the foundations of mathematics, Vol. 90, pp. 5-46 (1977).
3) Shoenfield, J. R.: Mathematical logic, p. 344, Addison-Wesley, (1967).
4) 前原昭二：数理論理学，p. 236，培風館 (1973)．

（昭和54年5月10日受付）