

薄板のボリュームデータのための 多項式近似によるスケルトンメッシュ生成

長井 超慧^{†1} 大竹 豊^{†1} 鈴木 宏正^{†1}

スケルトン構造は、医用や産業の現場で多くのアプリケーションに用いられる重要な形状表現である。本研究の目的は、実際の薄板から得たボリュームデータから、スケルトン構造を表す滑らかで高品質な三角形メッシュを生成することである。実物体のボリュームデータは一般に X 線 CT スキャンなどで得られるが、そこには多量のノイズが含まれている。そこで、ノイズに対し頑健な手法とするため、入力データを滑らかに近似するスカラー場を関数近似により構築し、その場における極大点集合をスケルトン構造と見なす。提案手法はまず、入力データの輝度値を、球状のサポートを持つ関数の集合で近似する。サポート球の大きさと配置は、物体形状の複雑さに基づき適応的に変化する。次に、出力の三角形メッシュを得るための格子を生成する。格子は、先に生成した関数群のサポート球により定義される重み付きドロネー四面体分割の一部とする。最後に、格子上で近似値の極大点を検出し、それらの点をつなぐことにより、スケルトン構造を近似する三角形メッシュを生成する。極大点の検出には微分値の見積りが必要であるが、近似関数の導関数を用いて離散化誤差のない値を得ることができるのも本手法の特長である。本論文の最後には、ノイズを多く含むデータに対し提案手法を適用して得たスケルトン構造の例を紹介する。

Skeletal Mesh Generation Using Polynomial Approximation for Volumetrically Sampled Thin Object

YUKIE NAGAI,^{†1} YUTAKA OHTAKE^{†1}
and HIROMASA SUZUKI^{†1}

Skeletal structures are shape representations that play an important role in many aspects of medical and industrial fields. Our aim here is to generate a smooth and well-connected surface mesh that approximates a skeletal structure using volumetric data from a thin object. Volumetric data provided using the CT-scanning method include large amounts of noise. Approximating the intensity of CT-scanned data using adaptively supported polynomial functions

enables identification of skeletal structures from the maxima of the approximated values, and achieves noise-robust skeletal mesh generation. First, the input image intensity is approximated using a set of spherically supported polynomials. The size of the supports changes adaptively with the complexity of the object's shape. Next, a tetrahedral mesh is generated to serve as a grid for the detection of the maxima. This mesh is a subset of a weighted Delaunay tetrahedrization defined using a set of spherical supports. Finally, the maxima are detected, and polygonization is performed on the tetrahedral mesh. This approximation approach contributes to the analytical evaluation of function derivatives for detection of the maxima. The last part of the paper presents results regarding skeletal meshes for noisy data.

1. はじめに

3次元の実物体のデータから生成されるスケルトン構造は、CAD、CAEをはじめとする工業分野、医療分野などで広く用いられる形状データである。スケルトン構造は一般的に、実物体の形状を簡略化した曲面・曲線状の構造で表されるため、実物体のおおまかな形状を把握するのに便利である。前述の利用先の中でも、リバースエンジニアリングや物理シミュレーション、品質評価、形状モデリングで重要な操作である変形などでは特に曲面状のスケルトン構造を必要としている^{9),10),23),26)}。これらの分野が扱う実物体は薄い板状の工業製品であることが多い。従来、薄い部分を詳細にスキャンするのは困難だったが、近年、X線CTスキャン技術が発達したため、高精細なスキャンデータを得られるようになった。そこで本研究では、リバースエンジニアリングでの利用を目標に、X線CTデータから曲面状のスケルトン構造を表す三角形メッシュ（以降スケルトンメッシュと呼ぶ）を生成する手法を提案する（図1）。三角形メッシュは、コンピュータグラフィックスや産業分野を含む非常に多くの分野で用いられる形状表現である。

リバースエンジニアリングで扱われる製品は前述のとおり薄い板からなることが多く、データはCT画像などのボリュームデータとしてユーザに与えられる。実物体およびボリュームデータによる表現では物体に厚みがあるが、この厚みをなくした面状の構造が本研究で目標とするスケルトン構造である。リバースエンジニアリングでは、製品になるべく近い形状をしているスケルトン構造が求められる。具体的な性質としては、製品をデザインする際に

^{†1} 東京大学
The University of Tokyo

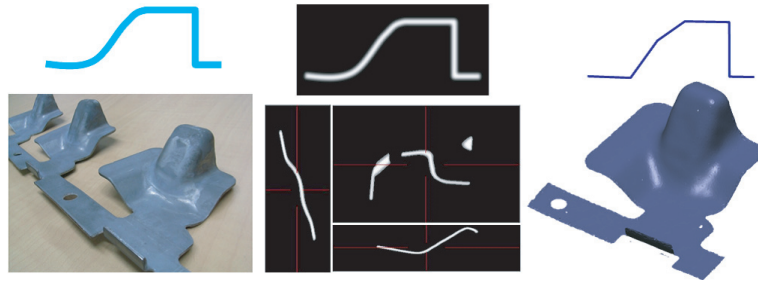


図 1 リバースエンジニアリングの流れ。実物体（左）から得た X 線 CT データ（中）を用いてスケルトン構造のメッシュモデル（右）を生成する。下段に実物体や実際のデータを、上段にそれらの断面の模式図を示す

Fig.1 An overview of reverse engineering. From left to right, an object, CT-scanned data, and a mesh model of the skeletal structure generated from the CT-scanned data. In the lower column, a real object and its kinds of data are shown, and in the upper column, their cross-section views are shown.

用いられる CAD 面と同様に、滑らかな面からなること、物体の厚みの中心を通り縁まで延びていること、CAD 面と同位相である（面には穴が開くことなく、縁付近で枝分かれなど起こさない）ことなどである。また、後の工程の計算量を節約するために、三角形メッシュの三角形数が少ないことも重要である。

スケルトン構造の抽出アルゴリズムは入力となるデータの種類や特徴ごとに異なり、それぞれの種類や特徴に応じて数多く提案されてきた。たとえば、実物体のポリウムデータを入力としたものには、細線化を行うもの¹²⁾ や、物体の境界を表すボクセルからの距離変換を用いて距離場の極大点を得る手法²¹⁾ がある。実物体表面上の点を入力としてポロノイ図による中立面を用いる手法^{1),4)} も多く提案されている。この手法では、実物体表面上の点を生成元とするポロノイ図から得られる中立面をスケルトン構造と見なす。

入力データだけでなく、スケルトン構造のアプリケーションも多岐にわたっており、それぞれの用途に合わせた出力形式がある。本研究では表面メッシュとして表現するが、文献 3), 12), 21) の手法では、本研究と同様にポリウムデータを入力とし、ボクセルの集合で表現したスケルトン構造を抽出する。

中立面を用いる手法の難点は、実物体表面上の点に対するノイズに弱いことである。ノイズがあると中立面の位相は元の物体の位相とは大きく異なったものになってしまう。CT スキャン画像にはノイズが非常に多く含まれるため、物体の輪郭部分に小さな凹凸がたくさんできてしまう。また、文献 3), 12), 21) で提案されている手法は、利用先のアプリケー

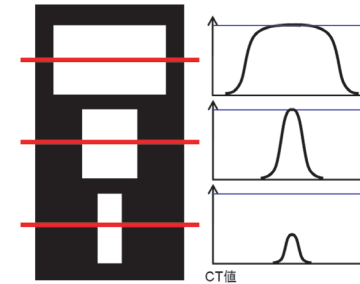


図 2 厚みの異なる物体と CT 値の様子。上段と中段はぼけの量に対し十分な厚みがある場合、下段は厚みが不十分な場合

Fig.2 CT value is affected by the thickness of an object. The objects on the top and the middle are sufficiently thick. In contrast, the object on the bottom is not sufficiently thick.

ションが曲面状のスケルトン構造を必要とする場合¹⁰⁾ には、検出されたボクセル集合を近似する三角形メッシュを生成する必要がある。しかし、スケルトン構造は一般に非多様体部分を含むため、適切な三角形メッシュの生成は自明な問題ではない。したがってこれら既存の手法は本研究が目標とするスケルトン構造生成には適さない。

X 線 CT 画像では、物体の表面付近でぼけのために S 字状に CT 値が増加する（図 2）。本研究が対象とするような厚みが小さい物体の場合、厚み方向に関して、CT 値が十分に大きくなる前に減少するので、物体の中央付近で CT 値が極大になる（図 2 下）。提案手法は、薄板のスケルトン構造が CT スキャンデータの輝度値の極大点集合として表現できることに着目している。極大点集合を得るには輝度値の微分値が必要である。安定した微分値を求めるために、以下のように関数近似を導入したところに本提案の新規性がある。

輝度値を表す近似関数は局所近似関数集合の重み付き平均（partition of unity）で表現される²²⁾。得られた近似関数によるスカラー場は元の CT 値よりもノイズが少なく滑らかである。CT データに含まれるノイズが局所近似関数に及ぼす影響は、局所近似関数を得る際に近似誤差を調整することで軽減できる。また、スケルトン構造の三角形メッシュ化には、局所近似関数による形状表現に基づいて生成した適応的四面体メッシュを用いる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず 2 章でアルゴリズムの詳細を説明する。アルゴリズムの順に従って、2.1 節で近似関数生成、2.2 節で四面体メッシュ生成、2.3 節でスケルトン構造抽出と三角形メッシュ化を説明する。得られた結果を 3 章で紹介する。最後に 4 章でまとめと今後の課題について述べる。

2. アルゴリズム

まずアルゴリズムの全体像を示す．アルゴリズムは大きく分けて3つの段階からなる．次いで本章の各節で段階ごとの詳しい説明を与える．

本手法の入力は空間上の点の集まり（点群）であり，各点にはスカラー値が与えられているものとする．CTデータはボクセルの集合であるが，各ボクセルの中心を点として考えれば，値付き点群と見なせる．CTデータをもとにした点群では点は格子状に配置されているが，本手法は入力点群の配置に関して制約を課さない．点は円筒状に配置されていてもよいし，ランダムに配置されていてもよい．図3に2次元データに対する例を示す．下のスケルトンメッシュ生成アルゴリズムではこの例に基づいて説明している．また，括弧 [] の中に3次元データに対する記述を記してある．

スケルトンメッシュ生成アルゴリズム

- (1) 入力点のうち，物体を表す点を被覆する関数付き円 [球] 集合を生成する (図 3 (b)) .
- (2) 球集合を基に三角形 [四面体] メッシュを生成する (図 3 (c)) .
- (3) 円 [球] 集合・三角形 [四面体] メッシュを用いてスケルトンメッシュを生成する (図 3 (d)) .

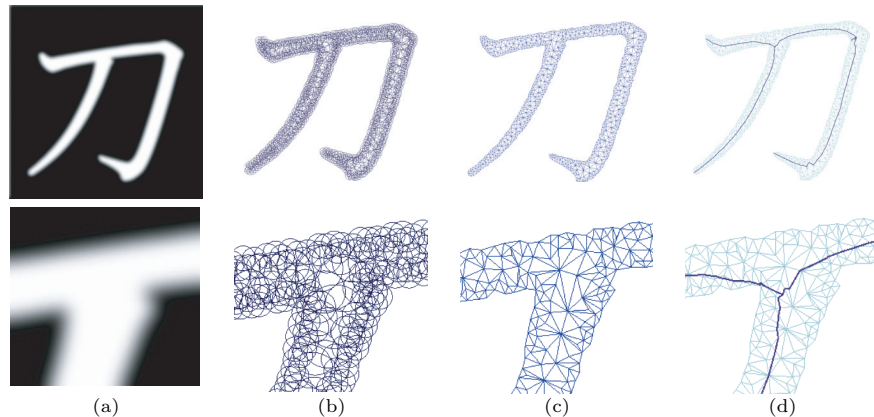


図3 2次元データに対する例．(a) 入力画像，(b) 生成された円集合，(c) 三角形メッシュ，(d) スケルトン構造
Fig.3 An example for a 2D image. (a) The input image, (b) The cover with support circles, (c) The triangular mesh, (d) The skeleton structure.

ステップ(1)を2.1節で，(2)を2.2節で，(3)を2.3節でそれぞれ説明する．

2.1 球被覆による近似関数生成

ステップ(1)では球集合を生成し，物体を表す点群を被覆する．各球には局所近似関数が割り当てられている．この球集合を簡単に球被覆と呼ぶことにする．近似関数はCTデータの輝度値を近似するような関数とする．スケルトン構造を生成する際，多量のノイズが含まれていることの多いCTデータの輝度値をそのまま使うよりも，輝度値の近似値を用いた方がノイズの影響が少なく，より滑らかなスケルトン構造が得られると期待される．本節では，そのための近似スカラー場を球被覆を用いて生成する手法について述べる．この手法は文献[22]に基づいたものである．

球被覆生成アルゴリズムの全体は2.1.2項で示すが，その前にまず2.1.1項で球被覆のデータ構造について説明したい．

2.1.1 サポート球と近似関数

物体を表すポリウムモデルがおかれた3次元空間を考え，この空間中の点を x で表す．また，ボクセルの中心の座標を x_i とし，そのCT値を v_i で表す．この空間に，球 s_i とそれをサポートとするスカラー関数 $g_i(x)$ を多数配置し，物体を表す点を被覆すると(図3(b))，この球集合で被覆された領域に対してスカラー場を定めることができる．各球に割り当てられる関数 $g_i(x)$ は，球内部の入力点の輝度値を近似する．本研究では $g_i(x)$ は入力点と同じ次元の2次式とする．たとえば入力が3次元データなら， $g_i(x) = C_{xx}x^2 + C_{yy}y^2 + C_{zz}z^2 + C_{xy}xy + C_{yz}yz + C_{zx}zx + C_x x + C_y y + C_z z + C_0$ となる(C_* は実数)．

球被覆の生成は後述の球被覆生成アルゴリズムで行う．球被覆が得られたら，被覆された空間全体に対する近似関数を関数集合 $\{g_i(x)\}$ の重み付き平均で

$$f(x) = \frac{\sum_i w_i(x) g_i(x)}{\sum_i w_i(x)} \quad (1)$$

と定めることができる．重み関数 $w_i(x)$ は，中心 c_i ，半径 r_i の球 s_i に対し，以下のように表される関数とした：

$$w_i(x) = \begin{cases} \exp(-\|x - c_i\|^2 / (2r_i^2)) / (2\pi)^{\frac{n}{2}} r_i^n & (\|x - c_i\| \leq r_i) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (2)$$

ここで n は入力点の次元を表す．

重み関数に，サポート球をサポートとして滑らかに0に接続する C^2 連続な関数を用いる

と, $f(x)$ は球被覆上で連続な関数となる. C^2 連続性が求められるのは, 後述のスケルトンメッシュ生成の際に 2 階微分を行うためである. このような重み関数の候補としては, たとえば 3 次の B-スプライン関数¹⁹⁾ や, 本手法で用いた重み関数の台を広げて 0 に滑らかに接続するようにした関数¹⁸⁾ があげられる. 本研究で採用した重み関数 $w_i(x)$ は, 文献 18) による重み関数をサポート球の境界で打ち切ったものである. サポート球の境界における重みは十分小さい値となるので実用上は問題ないと考えられる. 著者らは 3 次の B-スプライン関数を重み関数とした場合と比較を行い, 提案の重み関数で同等の結果が得られることを確認した.

2.1.2 球被覆生成

本項では球被覆の生成法を説明する. これは文献 16) に基づいた手法である. アルゴリズムの概略は以下のとおりである.

球被覆生成アルゴリズム

- (1) サポート球の中心候補の集合を, 物体内部の点の集合で初期化する.
- (2) サポート球 s_i および関数 $g_i(x)$ を決定する.
- (3) 中心候補の集合から, s_i に被覆されたものを除く.

以降, 各ステップを順次説明していく.

物体内部の点の決定 (ステップ (1))

スケルトン構造は物体内部に対して定められる構造なので, スカラー場も物体内部に関して定めれば十分である. そこでまず, 入力点のうち, 物体内部を表す点 (オブジェクト点と呼ぶことにする) を選び出す. これは単純な閾値処理で行う. すなわち, 閾値以上の値を持つ入力点がオブジェクト点であるとする.

サポート球と局所近似関数の決定 (ステップ (2))

ステップ (2) では最初にサポート球 s_i の中心 c_i を決める. これはステップ (1) で生成したサポート球中心候補の集合から, ランダムに 1 点選んで決める. 乱数の発生アルゴリズムの初期値を毎回同じ値にすることで, 再現性を持たせることができる. また, 後述するが, 局所近似関数の近似誤差を制限できるため, ここでのランダム性が結果に大きく影響することはない.

中心を選んだら, サポート球の半径と局所近似関数 $g_i(x)$ を決める. 文献 16) による近似誤差を考慮する手法を用いると, 半径と関数を同時に決定することができる.

サポート球の半径が小さいと, 内部の点数が少なくなり, 近似精度が高くなる傾向がある. つまり小さなサポート球ばかりで球被覆を生成すると必要以上に高い精度で近似するこ



図 4 異なる誤差許容値に対するスケルトンメッシュ. 左から, 誤差許容値を輝度値の範囲の 5%, 10%, 20%とした結果

Fig. 4 Skeletal mesh for various values of the error tolerance. From left, error tolerance is set to 5%, 10%, 20% of the range of the intensities.

とになるため, ノイズの影響を受けやすくなる. そこでなるべく大きなサポート球で近似を行いたい. そのために, 半径は, $g_i(x)$ の L_2 近似誤差がユーザ指定の誤差許容値 ε を超えない範囲で最大のものとする. このような半径 r_i は以下の方程式を解いて決定される:

$$\sum_j w_j(x)(g_i(x_j) - v_j)^2 = \varepsilon^2. \quad (3)$$

左辺は球内部のオブジェクト点に関する和である. 誤差許容値 ε は通常スキャナ依存の値であり, ユーザには既知の値である. 本研究では ε が未知と仮定し, 各データ一律に輝度値の範囲の 5%とした.

図 4 は近似の誤差許容値を異なる値に設定した結果である. 左から順に ε を輝度値の範囲の 5%, 10%, 20%とした結果である. 誤差許容値が厚みに比べ十分小さい場合 (左および中央), 元の物体に近いスケルトンメッシュが得られるが, 誤差許容値が大きくなると (右), 穴が開くなどして元の CAD 面とは異なる位相のスケルトンメッシュが生成されてしまう. 良い結果を得るには適切な ε の見積りが重要であることが分かる.

局所近似関数 $g_i(x)$ は, 式 (3) の左辺を最小化することで得られる最小二乗フィッティングによって求める. 半径が大きくなるにつれて近似誤差も大きくなる傾向があるので, 式 (3) は二分法で解くことができる²⁰⁾. その際の最大半径候補 r_{\max} は, サポート球の数を抑えるために, 物体の厚みの最大値に設定した. 物体の最大厚みは実物体から直接求められるが, 不明な場合には, 入力データをもとに物体内部の距離変換を行うことで得られる. また最小半径候補 r_{\min} は式 (3) が満たされるよう十分小さい値とする.

図 3 の例ではオブジェクト点の数が 61,300 だったのに対し, 生成されたサポート球の数は 919 と非常に少なくなる. サポート球の大きさは, 物体の境界では値が急激に変化するため小さくなり, 物体内部では値があまり変化しないため大きくなっている (図 3 (b) および図 5). また近似値は図 5 に示すように, ガウス関数状に値が増減し, 物体の中心付近で

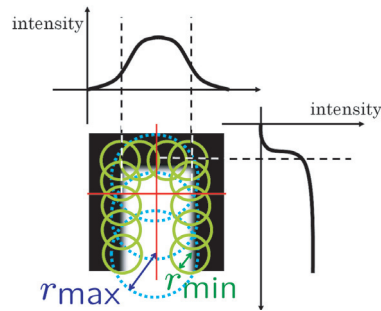


図 5 球被覆の模式図と近似値の変化の様子。左下：入力データおよび生成された球被覆。上および右：赤線における断面での輝度値のグラフ。近似による値をグラフに示す

Fig. 5 An example of a spherical cover and approximated values. Lower left: a part of an input data and supports. Top and right: approximated values at the cross sections shown with red lines are drawn with black lines.

最大値をとる。

被覆の判定 (ステップ (3))

被覆に含まれる球の数をなるべく少なくするために、サポート球を 1 つ生成するたび、そのサポート球に被覆される点をサポート球中心候補の集合から除いていく。

除くのは、サポート球を生成したとき、そのサポート球によって被覆される点である。生成したサポート球内のオブジェクト点による凸包内部の点を、被覆された点とする。このように定めると、ほとんどの場合において球被覆に隙間が生じない。図 6 は赤い円で表されたサポート球が生成されたときの様子を表す模式図である。赤い点がこのサポート球により被覆される点を表す。灰色の点はすでに被覆済みの点を、黒い点は未被覆の点を表す。これは 2 次元データに対する円による被覆判定法²⁴⁾を 3 次元に拡張したものとなっている。

2.2 四面体メッシュ生成

球被覆生成後、サポート球の中心を頂点とする四面体メッシュを生成する (図 7)。この四面体メッシュが、後述のスケルトンメッシュ生成アルゴリズムのステップ (3) でスケルトン構造を抽出・メッシュ化する際の格子の役割を果たす。スケルトン構造を三角形メッシュ化するには規則格子を用いるのが一般的である¹¹⁾が、生成したメッシュの要素数は非常に多くなる傾向がある。一方、提案手法では、要素の大きさが適応的に変化する四面体メッシュを用いるので、規則格子の場合と比べて少ない要素数のスケルトンメッシュを生成することができる。適応的四面体メッシュ生成にはドロネー四面体分割を用いる。

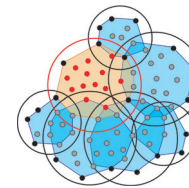


図 6 赤で示したサポート球が生成されると、凸包内部の点 (赤点) が被覆される
Fig. 6 When a support (red circle) is generated, the red points inside the convex hull are considered as covered.

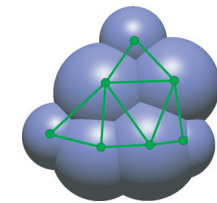


図 7 図 6 に対応する三角形メッシュ
Fig. 7 The triangulation corresponding to the cover in the Fig. 6.

本節ではまずドロネー四面体分割を 2.2.1 項で紹介し、そこで生じる退化への対策である摂動について 2.2.2 項で説明する。四面体メッシュの品質がスケルトンメッシュの品質に影響するので、得られた四面体メッシュの品質を向上させるための工夫を行った。これを 2.2.3 項で述べる。

2.2.1 重み付きドロネー四面体分割の利用

本提案では、四面体メッシュを重み付きドロネー四面体分割に基づいて生成する。重み付きドロネー四面体分割は、生成点で定まる凸包に対する空間分割法であり、通常のドロネー四面体分割の距離関数を重み付き距離に置き換えたものである⁷⁾。半径 r_i のサポート球 s_i の中心 c_i を生成元としたとき、 c_i から点 p への重み付き距離を $\|p - c_i\|^2 - r_i^2$ とした。

実装では、四面体メッシュの接続関係はサポート球どうしの交わりに基づいて求める。まずサポート球の次元を 1 だけ上げる。3 次元サポート球を例にとると、中心 (c_x, c_y, c_z) 、半径 r のサポート球は方程式 $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2$ と書ける。これを 1 次元上げた式は $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 + (u - 0)^2 = r^2$ となる。中心は元の位置と変わらず xyz 平面上に存在する。以下、本項において球といった場合、次元を上げた球を指す。また、3 次元データを例に説明を進める。

任意の 4 つの球は 4 次元空間においてたかだか 2 点の共通点を持つ。4 つの球の組が少なくとも 1 つの共通点を持ち、共通点がこの 4 球以外の球に含まれないときに限り、この 4 球の中心を頂点とする四面体を生成する。共通点の計算は 4 次元空間で行われるが、球の中心は xyz 平面上に存在するので、生成される四面体は 3 次元空間の要素である。この手法で生成される四面体メッシュは凹な形状も表現するため、重み付きドロネー四面体分割の一部となっている⁶⁾。

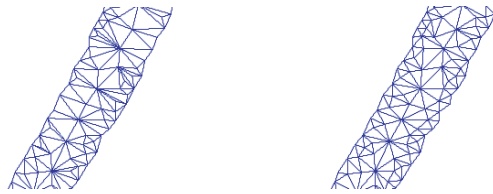


図 8 サポート球のサイズ調節の効果．左：サイズ調節をせずを得た三角形メッシュ．右：サポート球のサイズを小さくして得た三角形メッシュ．境界付近に頂点が増え，アスペクト比の高い三角形が増えた

Fig. 8 The effect of the shrinking of supports. Left: triangulation without shrinking. Right: triangulation with shrinking. Some vertices appear and triangles with high aspect ratio are generated near boundary.

2.2.2 摂動

サポート球の中心点は CT データの点なので，格子状に分布している箇所が多くある．格子を構成する各直方体の 8 頂点は同一球面上に存在するため，このようなデータに対してドロネー四面体分割を行うと退化した四面体を生じやすい．退化を回避する手法には，記号摂動法などがある^(8),25)．本研究では共通点を計算する際に各球の中心をランダムな方向に微小量 ($0.01 \times r_i$) 摂動させることで対処した．この摂動は接続関係を求める計算上でのみ行い，実際に点を摂動させるのではないことに注意されたい．この摂動は退化が起こらない保証を与えるわけではないが，4 章に示すように十分良い結果を与えている．

2.2.3 四面体メッシュの品質向上

以上のアルゴリズムを用いて図 3 の 2 次元データから生成した三角形メッシュの一部が図 8 左である．境界付近に細長い（アスペクト比の低い）三角形が多数見られる．これは，境界付近で小さなサポート球が大きなサポート球に含まれるので，小さなサポート球の中心が四面体メッシュの頂点に用いられなかったためである．

一般的に四面体メッシュの品質は，アスペクト比が高い四面体が多いほど良いとされる．2.3 節で後述するように，本手法では四面体メッシュを格子としてスケルトン構造をポリゴン化するため，四面体メッシュの品質がスケルトンメッシュの品質に直接影響する．そこでサポート球の大きさの変化を緩やかにすることで，小さいサポート球が飲み込まれる状況を防ぎ，四面体メッシュの頂点に小さいサポート球の中心も採用されやすくする．その結果，より頂点数が多く品質が高い四面体メッシュを生成できる（図 8 右）．サポート球の大きさの変化を緩やかにするには，すべてのサポート球の半径を一定の割合（0.75 倍など）で縮小すればよい．

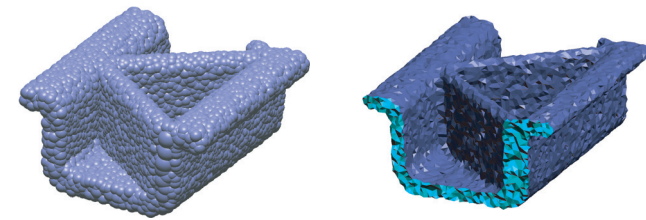


図 9 工業製品に対する例．左：球被覆の一部．右：左の被覆に対応する四面体メッシュ

Fig. 9 The result for a mechanical part. Left: a part of a spherical cover. Right: the tetrahedral mesh generated by the supports on the left.

図 9 は工業製品の X 線 CT データに対する球被覆の一部（左）と対応する四面体メッシュ（右）である．データ全体のオブジェクト点数は 1,732,755，球被覆全体のサポート球の数は 44,095 であり，四面体メッシュ全体の頂点数は 44,084，四面体数は 226,474 である．

2.3 スケルトンメッシュ生成

本論文では，実物体を含む空間で定義された C^2 連続な 3 次元スカラー場 $f(x)$ が与えられたとき，

$$\langle e, \nabla f \rangle = 0, \quad \lambda < 0 \quad (4)$$

を満たす点の軌跡をスケルトン構造と見なすこととする．ここで e は f のヘッセ行列の最小固有値 λ に対応する固有ベクトルである．また， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表す．条件 (4) は， f が方向 e に沿って極大値をとるための条件である．この手法は画像処理の分野において height ridge と呼ばれるものである^(5),14)．幾何的モデリング分野においては，このような極値に関する条件で定められる面は extremal surface⁽²⁾ と呼ばれる．

本手法で目標とするのは三角形メッシュにより離散化されたスケルトン構造である．これを得るためにまず，四面体メッシュの辺上で条件 (4) による判定を行い，その辺とスケルトン構造が交差するか判定する（図 10 左）．この判定および交点の算出について 2.3.1 項で説明する．交差する場合，交点の周りに微小な面（以下，スケルトンパッチと呼ぶ）を生成する（図 10 右）．スケルトンパッチの集合が，求めるスケルトンメッシュとなる（図 11）．スケルトンパッチの生成は 2.3.2 項で述べる．最後に 2.3.3 項でスケルトンメッシュを滑らかにするための工夫を紹介する．

2.3.1 スケルトン構造上の点の算出

まず四面体メッシュの辺とスケルトン構造との交点の判定について説明する．交点があるかどうかの判定には微分値を用いる．しかし入力データにはノイズが含まれるため，これを

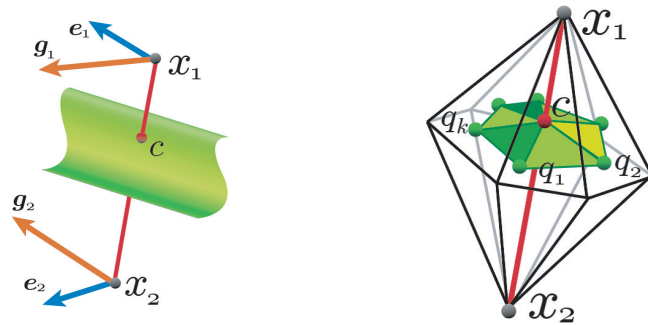


図 10 スケルトンパッチ生成の模式図．左：スケルトン構造（緑の曲面）との交点を持つ辺（赤）．右：赤い辺に接続する四面体と、生成されたスケルトンパッチ

Fig.10 The generation of a skeletal patch. Left: an edge intersecting with a skeletal structure (green). Right: tetrahedra inserting the red edge and a skeletal patch around the red edge.

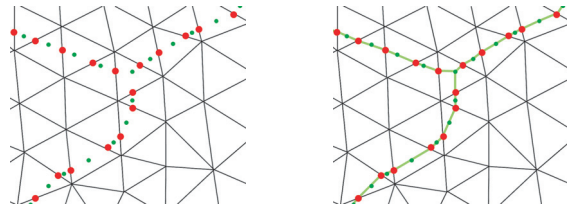


図 11 2次元におけるスケルトンメッシュ生成．左：三角形メッシュの辺上の極大点（赤）と各三角形における極大点の重心（緑）．右：生成されたスケルトンメッシュ（黄緑）

Fig.11 The skeletal mesh generation in 2D. Left: maxima (red) on the edges of the triangular mesh and the centroids (green) of maxima on edges belonging to triangles. Right: the generated skeleton mesh (light green).

もとに微分値を得るのは望ましくない．そこで球被覆により得た近似関数の微分値を解析的に計算することで、ノイズの影響の少ない微分値を得る．以下、近似関数 $f(x)$ の勾配およびヘシアンをそれぞれ $g = \nabla f$, $H = \nabla g$ と記述する．

座標が x_1, x_2 である点 p_1, p_2 を両端点に持つ四面体メッシュの辺に対する判定を考える．点 p_1, p_2 におけるヘシアン H の最小固有値に対応する固有ベクトル e_1, e_2 を考え、これらの向きが同じであると仮定する．つまり $\langle e_1, e_2 \rangle > 0$ が成り立つとする．この不等式が満たされない場合は、 e_2 を $-e_2$ で置き換える．

スケルトン構造は、近似関数値の極大点集合である．そこでまず近似関数の極値点を検出

する．近似関数の極値点は、方向 e に関して関数値の微分が 0 になる点である．すなわち勾配 g の e 方向に関する成分 $\langle e, g \rangle = 0$ が成り立つ点である．したがって、辺上に極値点が存在するのは、中間値の定理より、両端点における $\langle e, g \rangle$ の符号が互いに異なるとき、すなわち次の条件が成り立つときである：

$$\langle e_1, g_1 \rangle \langle e_2, g_2 \rangle < 0. \quad (5)$$

次に、辺上の極値点が極大点であるかどうかを判定する．極大点ならば、近似関数値は辺の端点から極大点に向かって増加するので、不等式

$$\langle e_i, g_i \rangle \langle (x_j - x_i), e_i \rangle > 0 \quad (6)$$

が $(i, j) = (1, 2)$ または $(2, 1)$ について成り立つ．この条件は文献 17) で提案されたものである． $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$ 両方に関して調べるのは、辺と e_i が直交すると不等式 (6) は成り立たないためである．

最後に交点座標を求める．微分値 $\langle e, g \rangle$ が四面体メッシュの辺に沿って線形に変化すると仮定すると、交点の座標は内分により

$$\frac{|\langle e_2, g_2 \rangle|}{|\langle e_1, g_1 \rangle| + |\langle e_2, g_2 \rangle|} x_1 + \frac{|\langle e_1, g_1 \rangle|}{|\langle e_1, g_1 \rangle| + |\langle e_2, g_2 \rangle|} x_2 \quad (7)$$

と表すことができる．

2.3.2 スケルトンパッチ生成

四面体メッシュの辺 l 上に検出された極大点 c の周りに、微小な面（スケルトンパッチ）を生成する．スケルトンパッチは全極大点に関して生成され、その集合が求めるスケルトンメッシュとなる（図 11）．

c の周りに生成されるスケルトンパッチは c を共有する三角形集合である（図 10）．スケルトンパッチの c 以外の頂点は、 l に接続する四面体内部の点である．以下に c 周りのスケルトンパッチ生成の手順を示す．

スケルトンパッチ生成アルゴリズム

- (1) l に接続する各四面体 t_i において、4 辺すべてに関して極大点を調べ、検出した極大点の重心 q_i を計算する．
 - (2) 各四面体 t_i における重心 q_i と c を順に接続し、三角形集合を生成する．
- ステップ (2) では、 l に接続する四面体 $\{t_1, \dots, t_k\}$ を順にたどって、各四面体で求められた重心と c を $\{q_1, q_2, c\}, \{q_2, q_3, c\}, \dots, \{q_k, q_1, c\}$ のようにつなぐことでスケルトンパッチを得る．このスケルトンパッチ生成は、dual contouring¹³⁾ の四面体版である．

2.3.3 スムージング

上述の手法で生成したスケルトンメッシュには、データに含まれるノイズや近似誤差により、本来のスケルトン構造には存在しない小片が存在する。こういった小片がなく滑らかなスケルトンメッシュを得るには、近似関数の導関数が滑らかであればよい。本研究では各局所近似関数の影響範囲を広げて、導関数の値の変化を緩やかにする。本論文の結果はすべて、半径を4倍に拡大したサポート球で g と H を計算して得たものである。

3. 結果

本章では、提案手法によって得られた結果の紹介と、既存手法との比較をそれぞれ 3.1, 3.2 節で述べる。

リバーエンジニアリングが対象とする実物体は多くが CAD 曲面で生成されており、実物体に近いスケルトン構造を求めるのが目標なので、得られるスケルトンメッシュの評価基準は 1 章で述べたとおり、

- 滑らかな曲面で構成されること
- 物体の厚みの中央を通ること
- 縁まで延びること
- 元の CAD 面と同位相である（面には穴が開かず、縁付近で枝分かれを起こさない）こと
- 三角形メッシュの三角形数が少ないこと

である。

3.1 実験結果

図 12, 図 13, 図 14 は工業部品の X 線 CT スキャンデータに対する結果である。ピンク色部分は CT データの等値面を表示したものである。青い面は抽出されたスケルトン構造である。断面の色は近似関数値を表す。赤色の部分では値が大きく、青色の部分では値が小さいことを示す。いずれの結果も、スケルトンメッシュが物体の厚みの中央を通り、物体の縁まで枝分かれなく延びていることが観察できる。ドロネー分割を用いる手法などでは、縁付近で Y 字状に枝分かれしたスケルトン構造が得られるが、本研究で目標とするリバーエンジニアリングなどの分野では枝分かれのない 1 枚の面で表現されたスケルトン構造が求められるため、本手法が有効である。

図 12 は厚みが一樣な物体と非一樣な物体のデータに対する結果である。どちらのデータに対しても良いスケルトンメッシュが得られている。右の例の入力データは $100 \times 100 \times 57$ ボクセルであり、それから三角形数 40,792 のスケルトンメッシュが得られている。

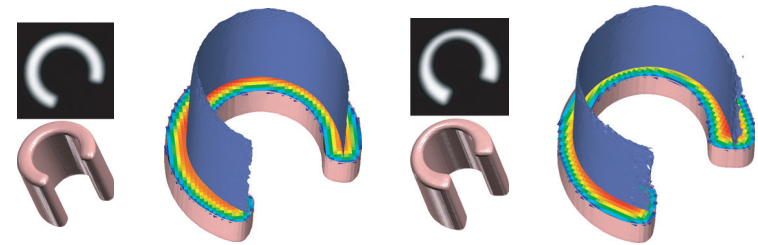


図 12 左：厚みが一樣な物体の CT スキャンデータに対する結果。
右：厚みが非一樣な物体に対する結果
Fig. 12 Left: a CT scanned object with a uniform thickness.
Right: a CT scanned object with a non-uniform thickness.

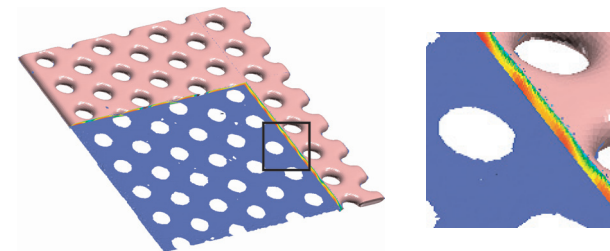


図 13 多数の穴の開いた薄板に対するスケルトンメッシュ
Fig. 13 Skeletal mesh for a metal plate with many holes.

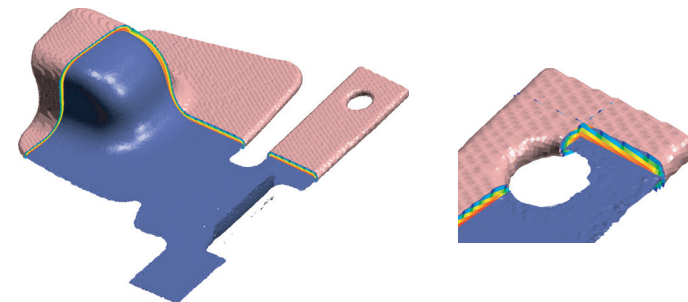


図 14 境界にノイズを多く含む穴の開いた薄板に対するスケルトンメッシュ
Fig. 14 Skeletal mesh for a thin plate with a hole.

図 13 は同一の大きさの穴が多数開いた薄板のデータに対する結果である。スケルトン構造部分の穴の大きさと等値面部分の穴の大きさがほぼ同じであることから、スケルトン構造が穴の縁付近まで延びていることが分かる。

図 14 は、物体の境界にノイズを多く含むボクセル数 $280 \times 450 \times 110$ のデータに対する例である。得られたスケルトンメッシュの三角形数は 183,276 であり、ノイズの影響がなく滑らかな面であることが観察される。

3.2 比較

本手法と同じく CT データを入力とするアルゴリズムに、画像処理に基づいてスケルトン構造を表すボクセルを抽出する手法がある。最も一般的な手法の 1 つは non-maximum suppression³⁾ (極大値以外の点の削除) と呼ばれる手法である。Non-maximum suppression は各ボクセルに値と方向が与えられると、その方向に沿った極大点に対応するボクセルを抽出する。著者らは提案手法による結果と non-maximum suppression による結果を比較した。Non-maximum suppression で各ボクセルに与える値と方向は、標準的なガウス関数の畳み込み積分を用いて計算した¹⁵⁾。

Non-maximum suppression で抽出されたボクセルが図 15 である。この結果が示すとおり、厚みが一律の物体に対しては、ガウス関数のカーネルの大きさを適切に設定することで良い結果が得られる。しかしカーネルの大きさは空間全体で一定であるため、厚みが非一様な物体に対して望ましいスケルトン構造を得ることは困難である。たとえばスムージング不足により縁付近で枝分かれができたり、逆にスムージングの影響が大きすぎて物体の外にまでスケルトン構造が延びてしまうことがある。そのような失敗の例を図 16 に示す。一方、提案手法では局所近似関数のサポートの大きさが誤差に応じて適応的に変化するため、この問題は起こらない。適切なスムージング効果が得られるので、望ましいスケルトン構造を生成することができる。

提案手法と比較するために、non-maximum suppression で抽出されたボクセルを三角形メッシュに変換する必要がある。変換手法によってはボクセルのアーチファクトにより変換がうまくいかないこともある。今回は、ボクセルの中心をつないで三角形メッシュに変換した。変換後のメッシュを図 15 下に示す。メッシュの頂点は格子点から選択されるため、提案手法による結果と比較するときざざとして滑らかさのない三角形メッシュになっている。

計算時間については、提案手法よりも non-maximum suppression の方が効率が良い。たとえば図 14 のデータに対する標準的な PC での計算時間は、non-maximum suppression では約 3 分なのに対し、提案手法では約 10 分である。これは提案手法の、画像処理に基づ

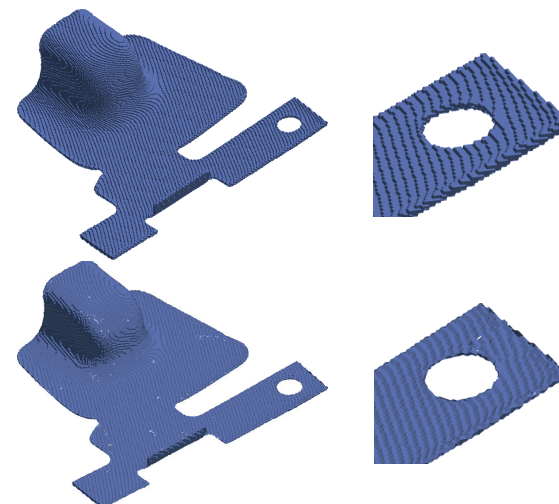


図 15 Non-maximum suppression による手法の結果 (入力データは図 14 と同じ)。上: 抽出されたスケルトン構造を表すボクセル。下: 抽出されたボクセルの中心をつないで生成した三角形メッシュ

Fig. 15 Results by non-maximum suppression (the input CT image is the same as Fig. 14). Top: extracted skeletal voxels. Bottom: a triangular mesh reconstructed by connecting the skeletal voxels.

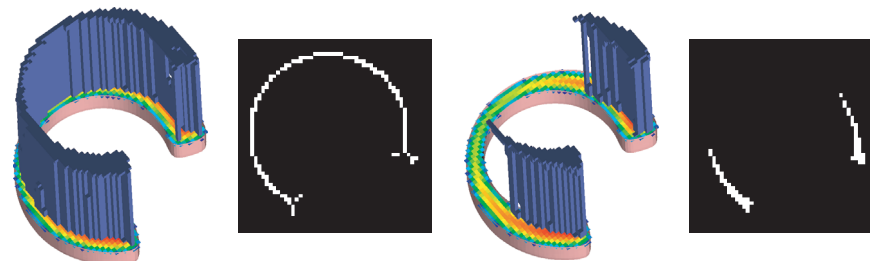


図 16 厚みが非一様な物体に対する non-maximum suppression による結果の例 (入力データは図 12 右と同じ)
Fig. 16 Skeletal voxels extracted by non-maximum suppression for a model with a non-uniform thickness (same as the right model in the right image of Fig. 12).

く手法と比較した場合の唯一の欠点である。しかし入力データの配置に関しては、画像処理に基づく手法は格子状の配置を仮定している一方、提案手法は何の仮定も必要としないため、不規則にサンプリングされた点に対しても適用できるという利点がある。

4. まとめと今後の課題

本論文で著者らは、薄板構造の X 線 CT スキャンデータから、関数近似による局所近似と適応的な四面体メッシュを用いてスケルトン構造を表す三角形メッシュを生成するアルゴリズムを提案した。近似を用いることで、薄板の縁まで延びた滑らかな面からなるスケルトン構造を得ることができた。

対象とする物体が T 字型をしている 3 次元物体の場合、T 字部分のスケルトン構造の表現に改善の余地が認められた。3 次元の非多様体部分も、理論的には本手法で扱うことが可能である。しかし実際にはそのような箇所では導関数の値が不安定になり、その結果スケルトン構造の判定がうまくいかないことが分かった。2 次元ではこのような部分は点となるので正しい結果が得られることが多い(図 3)。しかし 3 次元だと線になるため、ところによっては抽出がうまくゆかず、正しいスケルトン構造が得られない場合が多い。近似関数の導関数のスムージングなどを導入し、このような部分の判定をうまく行えるようにすることが今後の課題である。

また、スケルトン構造はその評価基準自体が確立されていないのが現状である。そこで本研究では定性的な評価基準として、現場のニーズをまとめた以下の 5 項目を面状のスケルトン構造の評価項目と定めた。

- 滑らかな曲面で構成されること
- 物体の厚みの中央を通ること
- 縁まで延びること
- 元の CAD 面と同位相である(面には穴が開かず、縁付近で枝分かれを起こさない)こと
- 三角形メッシュの三角形数が少ないこと

これらの項目、特に近似精度や縁からの距離などを定量的に評価すれば、スケルトン構造の品質に関してより客観的な評価を行うことができる。これらの定量的評価基準の確立も今後の課題である。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費補助金(基盤(B)), No.19360070 によって行われた。X 線 CT データの計測にはトヨタ自動車(株)にご協力をいただいた。

参 考 文 献

- 1) Amenta, N., Choi, S. and Kolluri, R.: The Power Crust, *Proc. 6th ACM Symposium on Solid Modeling*, pp.249–260 (2001).
- 2) Amenta, N. and Kil, Y.: Defining point-set surfaces, *ACM Trans. Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2004)*, Vol.23, No.3, pp.264–270 (2004).
- 3) Canny, J.: A Computational Approach to Edge Detection, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.8, No.6, pp.679–698 (1986).
- 4) Dey, T.K. and Zhao, W.: Approximating the Medial Axis from the Voronoi Diagram with a Convergence Guarantee, *Algorithmica*, Vol.38, pp.179–200 (2003).
- 5) Eberly, D.H.: *Ridges in Image and Data Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands (1996).
- 6) Edelsbrunner, H.: The union of balls and its dual shape, *Proc. 9th ACM Sympos. Comput. Geom.*, San Diego, California, United States, pp.218–231 (1993).
- 7) Edelsbrunner, H.: *Geometry and Topology for Mesh Generation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics)*, Cambridge University Press, New York, NY, USA (2006).
- 8) Edelsbrunner, H. and Mücke, E.P.: Simulation of simplicity: A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms, *ACM Trans. Graph.*, Vol.9, No.1, pp.66–104 (1990).
- 9) Fujimori, T., Kobayashi, Y. and Suzuki, H.: Separated Medial Surface Extraction from CT Data of Machine Parts, *Geometric Modeling and Processing – GMP 2006, Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4077, pp.313–324 (2006).
- 10) Fujimori, T., Suzuki, H., Kobayashi, Y. and Kase, K.: Contouring Medial Surface of Thin Plate Structure using Local Marching Cubes, *ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering*, Vol.5, No.2, pp.111–115 (2005).
- 11) Furst, J.D. and Pozer, S.M.: Marching Ridges, *Proc. IASTED International Conference on Signal and Image Processing*, pp.22–26 (2001).
- 12) Ju, T., Baker, M. and Chiu, W.: Computing a family of skeletons of volumetric models for shape description, *Computer-Aided Design (accepted)* (2007).
- 13) Ju, T., Losasso, F., Schaefer, S. and Warren, J.: Dual Contouring of Hermite Data, *ACM Trans. Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2002)*, Vol.21, No.3, pp.339–346 (2002).
- 14) Lindeberg, T.: Edge detection and ridge detection with automatic scale selection, *International Journal of Computer Vision*, Vol.30, No.2, pp.117–156 (1998).
- 15) Lohmann, G. (著), 鈴木宏正 (監訳): 3 次元画像処理 (Volumetric Image Analysis), ボーンデジタル (2009).
- 16) Ohtake, Y., Belyaev, A.G. and Seidel, H.-P.: Multi-scale and Adaptive CS-RBFs for Shape Reconstruction from Cloud of Points, *MINGLE Workshop on Multiresolution in Geometric Modelling*, Cambridge, UK, pp.337–348 (2003).
- 17) Ohtake, Y., Belyaev, A. and Seidel, H.-P.: Ridge-Valley Lines on Meshes via Implicit Surface Fitting, *ACM Trans. Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2004)*,

Vol.23, No.3, pp.609–612 (2004).

- 18) Ohtake, Y. and Belyaev, A.G.: Mesh Optimization for Polygonized Isosurfaces, *Computer Graphics Forum (Proc. EUROGRAPHICS 2001)*, Vol.20, No.3, pp.368–376 (2001).
- 19) Piegsl, L. and Tiller, W.: *The NURBS book (2nd ed.)*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA (1997).
- 20) Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (1993).
- 21) Prohaska, S. and Hege, H.-C.: Fast Visualization of Plane-Like Structures in Voxel Data, *Proc. Conference on Visualization*, pp.29–36 (2002).
- 22) Renka, R.J.: Multivariate Interpolation of Large Sets of Scattered Data, *ACM Trans. Mathematical Software*, Vol.14, No.2, pp.139–148 (1988).
- 23) Suzuki, H., Fujimori, T., Michikawa, T., Miwata, Y. and Sadaoka, N.: Skeleton Surface Generation from Volumetric Models of Thin Plate Structures for Industrial Applications, *Mathematics of Surfaces XII, Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4647, pp.442–464 (2007).
- 24) Wu, J. and Kobbelt, L.P.: Optimized Sub-Sampling of Point Sets for Surface Splatting, *Computer Graphics Forum (Proc. EUROGRAPHICS 2004)*, Vol.23, No.3, pp.643–652 (2004).
- 25) Yap, C.K.: A geometric consistency theorem for a symbolic perturbation scheme, *SCG '88: Proc. 4th Annual Symposium on Computational Geometry*, New York, NY, USA, ACM, pp.134–142 (1988).
- 26) Yoshizawa, S., Belyaev, A. and Seidel, H.-P.: Skeleton-based variational mesh deformations, *Computer Graphics Forum (Proc. EUROGRAPHICS 2007)*, Vol.26, No.3, pp.255–264 (2007).

(平成 21 年 8 月 11 日受付)

(平成 21 年 12 月 17 日採録)



長井 超慧 (学生会員)

2005 年お茶の水女子大学理学部情報科学科卒業, 2007 年東京大学大学院情報理工学系研究科修士課程修了, 同年工学系研究科先端学際工学専攻博士課程進学. 研究分野: 形状モデリング, コンピュータグラフィックス. 加入学会: 応用数理学会, 精密工学会.



大竹 豊

2002 年会津大学大学院博士課程修了・コンピュータ理工学博士, 2002 年マックスプランク情報科学研究所博士研究員, 2004 年理化学研究所研究員, 2007 年東京大学講師 (精密機械工学専攻). 研究分野: 形状処理, コンピュータグラフィックス. 加入学会: 精密工学会.



鈴木 宏正 (正会員)

1986 年東京大学大学院博士課程修了・工学博士, 1987 年東京大学助手 (教養学部), 1988 年同講師, 1990 年同助教授, 1994 年東京大学助教授 (精密機械工学専攻), 2003 年同教授, 2004 年より同大先端科学技術研究センター. 研究分野: 形状モデリング, デジタルエンジニアリング. 加入学会: ACM, IEEE, 日本機械学会, 精密工学会等.