

## 超精度最小二乗法とその応用

金谷 健一<sup>†1</sup> プラサンナ・ランガラヤン<sup>†2</sup> 菅谷 保之<sup>†3</sup> 新妻 弘崇<sup>†1</sup>

コンピュータビジョン応用によく現れる幾何学的当てはめ問題の反復を用いずに高精度の解を計算する超精度最小二乗法の理論をまとめる。これは高次の誤差解析によって偏差を誤差の2次の項まで消去するように最適化の重み行列を選ぶものである。本文ではこれを楕円当てはめ、基礎行列の計算、射影変換の計算に対して適用し、解の挙動の相違をまとめる。そして結論として、通常の最小二乗法の精度は低く、最尤推定が最も高精度であるが、必ずしも反復が収束しないこと、超精度最小二乗法は反復なしに最尤推定に匹敵する精度を与えることを示す。また Taubin 近似の問題依存性を指摘する。

### Hyperaccurate Least Squares and Its Applications

KENICHI KANATANI,<sup>†1</sup> PRASANNA RANGARAJAN,<sup>†2</sup>  
YASUYUKI SUGAYA<sup>†3</sup> and HIROTAKA NIITSUMA<sup>†1</sup>

We describe the theoretical background of hyperaccurate least squares (LS) methods, which solves, without iterations, geometric fitting problems that frequently appear in computer vision applications. They are obtained by choosing the optimization weight so that the bias is eliminated up to second order noise terms using high order error analysis. We apply our technique to ellipse fitting, fundamental matrix computation, and homography computation and observe the difference in the behavior of the solution. We conclude: 1) The standard LS performs poorly. 2) Maximum likelihood (ML) is the highest in accuracy but its iterations may not always converge. 3) The hyperaccurate LS yields a high accuracy solution compatible to ML without iterations. We also point out the problem-dependence of the Taubin approximation.

<sup>†1</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科

Department of Computer Science, Okayama University, Japan

<sup>†2</sup> 米国南メソジスト大学電気工学科

Department of Electrical Engineering, Southern Methodist University, U.S.A.

<sup>†3</sup> 豊橋技術科学大学情報工学系

Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

### 1. ま え が き

コンピュータビジョンの最も重要な基礎技術の一つは、幾何学的拘束条件を利用して誤差のある観測データから対象の2次元および3次元形状を正確に計算することである。多くの問題では次のように定式化される。誤差を含む  $N$  個の観測データベクトル  $x_1, \dots, x_N$  が得られているとする。これらの誤差がない真値  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$  はどれもある  $L$  個の方程式 (拘束条件)

$$F^{(k)}(x; \theta) = 0, \quad k = 1, \dots, L \quad (1)$$

を満たすとする。ただし、 $\theta$  は未知パラメータベクトルであり、これを精密に推定したい。この  $\theta$  が対象の2次元、3次元形状を記述したり、その2次元、3次元位置を指定したり、2次元的、3次元的運動を表したりする。

このような  $\theta$  を精度よく求める研究は1980年代から筆者らを含む多くの研究者によって精力的に研究され、誤差の統計的挙動をモデル化し、最尤推定に基づくさまざまな方法が確立されている<sup>3),6),9)</sup>。しかし、そのような方法のほとんどすべては反復解法であり、反復を開始するための初期値が必要である。また、誤差が非常に大きいとき、反復に時間がかかったり、あるいは収束しないことがある。そのような状況に対処するには反復を要しない代数的解法が必要である。

式(1)中の  $F^{(k)}(x; \theta)$  は一般に  $x$  の複雑な非線形関数であるが、実用的な多くの問題では未知パラメータ  $\theta$  に関しては線形であったり、パラメータをつけ直して線形に表せたりすることが多い。そのような場合は式(1)が次の形に表せる。

$$(\xi^{(k)}(x), \theta) = 0, \quad k = 1, \dots, L \quad (2)$$

ただし、以下ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く。ベクトル  $\xi^{(k)}(x)$  の各要素  $\xi_i^{(k)}(x)$  はパラメータ  $\theta_i$  のかかっている  $x$  の (非線形) 項をまとめたものである。式(1)にパラメータのかかっていない  $x$  の項が足されている場合も、形式的に未知数がかかっていると見なして、それを  $\theta$  の最終成分とする。このような状況のもとで最もよく知られた代数的解法は最小二乗法であり、「代数的距離」

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L (\xi^{(k)}(x_\alpha), \theta)^2 \quad (3)$$

を最小にする  $\theta$  を計算する方法である。上式は  $\theta$  の2次形式であり、これを最小にする解は

固有値問題を解いて得られる。しかし、この方法は統計的な偏差が大きく、精度が低いことが知られている<sup>3),6)</sup>。それに対して、式(1)が一つの拘束条件( $L=1$ )のときは、Taubin<sup>14)</sup>によって高精度な代数的解法が提案されている。これを上回る代数的解法は長く知られていなかった。

これに対して最近、点列へ円を当てはめる問題において Al-Sharadqah ら<sup>1)</sup> と Rangarajan ら<sup>12)</sup> が Taubin 法を上回る代数的解法を提案し、「超精度最小二乗法」と呼んだ。この手法は岩元ら<sup>4)</sup>によって楕円の当てはめに応用され、Taubin 法を上回り、最尤推定に近い精度を達成することが実証された。一方、新妻ら<sup>11)</sup>はこれを射影変換の推定に適用し、Taubin 法に相当する高精度の代数的解法が存在することを示した。

本論文ではこの超精度最小二乗法を一般的な形に整理し、例題として楕円の当てはめ、基礎行列の計算、および射影変換の計算を用いて、超精度最小二乗法の理論的な構造とその適用法、および応用対象に特有な性質の影響をまとめる。

## 2. 幾何学的当てはめの変数変換

式(1)の形の非線形拘束条件が式(2)の形に変換される代表的な例を示す。

【例1】(楕円の当てはめ)与えられた点 $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ に楕円

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (4)$$

を当てはめる問題を考える。 $\xi(x, y)$ ,  $\theta$ を

$$\xi = (x^2 \ 2xy \ y^2 \ 2x \ 2y \ 1)^\top, \quad \theta = (A \ B \ C \ D \ E \ F)^\top \quad (5)$$

と定義すると、式(4)は式(2)の形になる( $L=1$ )<sup>15)</sup>。

【例2】(基礎行列の計算)同一シーンを異なる位置から撮影した2画像において、第1画像の点 $(x, y)$ が第2画像の点 $(x', y')$ に対応しているとき、両者は次の「エピ極線方程式」を満たす<sup>3)</sup>。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

ただし、 $F$ はそれぞれの画像を撮影したカメラの相対位置や内部パラメータに依存する(シーンや各点の位置にはよらない)ランク2の行列であり、「基礎行列」と呼ばれる。これを画像中の対応点から計算することにより、カメラ位置やシーンの3次元形状を計算することが

できる<sup>16)</sup>。このとき、

$$\xi = (xx' \ xy' \ xy' \ yy' \ yx' \ y'1)^\top, \quad \theta = (F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33})^\top \quad (7)$$

と定義すると、式(6)は式(2)の形になる( $L=1$ )<sup>13)</sup>。

【例3】(射影変換の計算)平面あるいは無限遠方のシーンを2台のカメラで撮影すると、第1画像の点 $(x, y)$ が第2画像の点 $(x', y')$ に対応しているとき、両者は次の「射影変換」で結ばれる<sup>3)</sup>。

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \quad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \quad (8)$$

これは次のように書き直せる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $\simeq$ は両辺が零でない定数倍を除いて等しいことを表す。これは両辺のベクトルが平行であることを表すので、次のようにも書ける。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

この3成分を取り出すと次のように式(2)の形に書ける( $L=3$ )<sup>10)</sup>。

$$(\xi^{(1)}, \theta) = 0, \quad (\xi^{(2)}, \theta) = 0, \quad (\xi^{(3)}, \theta) = 0 \quad (11)$$

ただし、次のように置いた。

$$\theta = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32} \ h_{33})^\top, \quad \xi^{(1)} = (0 \ 0 \ 0 \ -x \ -y \ -1 \ xy' \ yy' \ y')^\top,$$

$$\xi^{(2)} = (xy \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -xx' \ -yx' \ -x')^\top, \quad \xi^{(3)} = (-xy' \ -yy' \ -y' \ xx' \ yx' \ x' \ 0 \ 0 \ 0)^\top \quad (12)$$

式(11)の3式は線形従属であり、独立な式は2個である。

## 3. 代数的解法

$\alpha$ 番目のデータ $x_\alpha$ を変換した $\xi^{(k)}(x_\alpha)$ を単に $\xi_\alpha^{(k)}$ と書くと、式(3)の代数的距離は次のように書き直せる。

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L (\xi_\alpha^{(k)}, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L \theta^\top \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(k)\top} \theta = (\theta, M\theta) \quad (13)$$

ただし、行列 $M$ を次のように置いた。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L \xi_{\alpha}^{(k)} \xi_{\alpha}^{(k)\top} \quad (14)$$

式 (13) を最小化するには  $\theta$  に何らかのスケールの正規化が必要である．そうでないと式 (13) は明らかに  $\theta = 0$  で最小値 0 をとる．最も普通に行われるのは  $\|\theta\| = 1$  と正規化することであり，以下これを「(標準) 最小二乗法」と呼ぶ．しかし，これ以外にもいろいろな正規化が考えられる．ここで問題となるのはどの正規化を用いるかによって解が異なることである．これに対してこの余分な自由度を利用して，Al-Sharadqah ら<sup>1)</sup> や Rangarajan ら<sup>12)</sup> は円の当てはめにおいて，岩元ら<sup>4)</sup> は楕円当てはめにおいて，新妻ら<sup>11)</sup> は射影変換の計算において，それぞれ金谷<sup>8)</sup> の高次誤差解析を用いて式 (13) の最小化解の精度が最も高くなるような正規化を導出した．本論文ではその一般論を述べる．

正規化の形として，ある対称行列  $N$  を用いた次の形を考える<sup>1),4),11),12)</sup>．

$$(\theta, N\theta) = (\text{一定}) \quad (15)$$

通常は  $N$  として正値または半正値対称行列であり，このときは式 (15) の右辺は正である (0 の場合は考慮しなくてよい)．したがって，式 (15) の右辺を 1 と置いても一般性は失わない．しかし，本論文では  $N$  を正値または半正値に限定せず，一般の対称行列を候補とする<sup>1),4),11),12)</sup>．そして，得られる解が高い精度を持つような  $N$  を求める．そのような  $N$  が得られれば，式 (15) のもとで式 (13) を最小化するにはよく知られているように，一般固有値問題

$$M\theta = \lambda N\theta \quad (16)$$

を解けばよい． $N$  が正値または半正値なら  $\lambda$  は正であり，解は最小一般固有値  $\lambda$  に対する一般固有ベクトル  $\theta$  であるが， $N$  が一般の場合は  $\lambda$  は正とは限らない．以下では  $M\theta \approx 0$  と仮定し， $\lambda$  を微小量とする金谷<sup>8)</sup> の摂動解析を用いるので，解は式 (16) の絶対値最小の一般固有値  $\lambda$  に対する一般固有ベクトル  $\theta$  となる．一般固有ベクトル  $\theta$  のノルムは不定であるから，任意に正規化してよい．すなわち，式 (13) の最小化の拘束としての正規化 (15) と同じである必要はない．そこで式 (16) の解を単位ベクトル ( $\|\theta\| = 1$ ) に正規化する．

#### 4. 誤差解析

各データ  $x_{\alpha}$  はその真の値  $\bar{x}_{\alpha}$  はその真の値に期待値 0，共分散行列  $V[x_{\alpha}]$  の独立な正規分布に従う誤差  $\Delta x_{\alpha}$  が加わると仮定する．変換した  $\xi_{\alpha}^{(k)}$  は次のように書ける．

$$\xi_{\alpha}^{(k)} = \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} + \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} + \Delta_2 \xi_{\alpha}^{(k)} + \dots \quad (17)$$

ただし， $\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}$  は誤差がないときの値であり， $\Delta_i \xi_{\alpha}^{(k)}$  はそれぞれ誤差に関して  $i$  次の項を表す．そして 3 次以上の項は微小量とみなして無視する． $\xi_{\alpha}^{(k)}(x)$  のヤコビ行列  $T_{\alpha}^{(k)}$  を用いると，1 次の誤差項は  $x_{\alpha}$  の誤差  $\Delta x_{\alpha}$  を用いて次のように書ける．

$$\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} = T_{\alpha}^{(k)} \Delta x_{\alpha}, \quad T_{\alpha}^{(k)} \equiv \left. \frac{\partial \xi_{\alpha}^{(k)}(x_{\alpha})}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_{\alpha}} \quad (18)$$

$\xi_{\alpha}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, L$  の共分散行列を次のように定義する ( $E[\cdot]$  は期待値を表す)．

$$V^{(kl)}[\xi_{\alpha}] \equiv E[\Delta \xi_{\alpha}^{(k)} \Delta \xi_{\alpha}^{(l)\top}] = T_{\alpha}^{(k)} E[\Delta x_{\alpha} \Delta x_{\alpha}^{\top}] T_{\alpha}^{(l)\top} = T_{\alpha}^{(k)} V[x_{\alpha}] T_{\alpha}^{(l)\top} \quad (19)$$

【例 4】 (楕円の当てはめ) 例 1 の楕円の当てはめでは 1 次の誤差  $\Delta_1 \xi_{\alpha}$  は次のように書ける．

$$\Delta_1 \xi_{\alpha} = T_{\alpha} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha} = 2 \begin{pmatrix} \bar{x}_{\alpha} & \bar{y}_{\alpha} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_{\alpha} & \bar{y}_{\alpha} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} \quad (20)$$

各点の誤差が期待値 0，標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布であれば  $\xi_{\alpha}$  の共分散行列は次のようになる．

$$V[\xi_{\alpha}] = 4\sigma^2 T_{\alpha} T_{\alpha}^{\top} \quad (21)$$

2 次の誤差  $\Delta_2 \xi_{\alpha}$  は次のようになる．

$$\Delta_2 \xi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha}^2 & 2\Delta x_{\alpha} \Delta y_{\alpha} & \Delta y_{\alpha}^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\top} \quad (22)$$

【例 5】 (基礎行列の計算) 例 2 の基礎行列の計算では 1 次の誤差  $\Delta_1 \xi_{\alpha}$  は次のように書ける．

$$\Delta_1 \xi_{\alpha} = T_{\alpha} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \\ x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{x}'_{\alpha} & \bar{y}'_{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}'_{\alpha} & \bar{y}'_{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ \bar{x}_{\alpha} & 0 & 0 & \bar{y}_{\alpha} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_{\alpha} & 0 & 0 & \bar{y}_{\alpha} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \quad (23)$$

各点の誤差が期待値 0，標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布であれば  $\xi_{\alpha}$  の共分散行列は次のようになる．

$$V[\xi_{\alpha}] = \sigma^2 T_{\alpha} T_{\alpha}^{\top} \quad (24)$$

2 次の誤差  $\Delta_2 \xi_{\alpha}$  は次のようになる．

$$\Delta_2 \xi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha} \Delta x'_{\alpha} & \Delta x_{\alpha} \Delta y'_{\alpha} & 0 & \Delta y_{\alpha} \Delta x'_{\alpha} & \Delta y_{\alpha} \Delta y'_{\alpha} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\top} \quad (25)$$

【例 6】(射影変換の計算) 例 3 の射影変換の計算では 1 次の誤差  $\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)}$  は次のように書ける .

$$\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} = T_\alpha^{(k)} \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \\ \bar{y}_\alpha \\ \bar{x}'_\alpha \\ \bar{y}'_\alpha \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \bar{y}'_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{x}_\alpha & \bar{y}_\alpha & 1 \end{pmatrix}^\top$$

$$T_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}'_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}'_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_\alpha & -\bar{y}_\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad T_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -\bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & \bar{x}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & \bar{x}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_\alpha & \bar{y}_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{x}_\alpha & -\bar{y}_\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (26)$$

各点の誤差が期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布であれば  $\xi_\alpha^{(k)}$  の共分散行列は次のようになる .

$$V^{(kl)}[\xi_\alpha] = \sigma^2 T_\alpha^{(k)} T_\alpha^{(l)\top} \quad (27)$$

2 次の誤差  $\Delta_2 \xi_\alpha$  は次のようになる .

$$\Delta_2 \xi_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_\alpha \Delta y'_\alpha & \Delta y_\alpha \Delta y'_\alpha & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$\Delta_2 \xi_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha & -\Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$\Delta_2 \xi_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -\Delta y'_\alpha \Delta x_\alpha & -\Delta y'_\alpha \Delta y_\alpha & 0 & \Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (28)$$

## 5. 摂動解析

式 (17) を式 (14) に代入すると次のようになる .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}) (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)})^\top$$

$$= \bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_2 M + \dots \quad (29)$$

ただし,  $\dots$  は誤差の 3 次以上の項であり,  $\bar{M}$ ,  $\Delta_1 M$ ,  $\Delta_2 M$  をそれぞれ次のように定義する .

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top} \quad (30)$$

$$\Delta_1 M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top}) \quad (31)$$

$$\Delta_2 M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top}) \quad (32)$$

そして, 式 (16) の解  $\theta, \lambda$  を次のように展開する .

$$\theta = \bar{\theta} + \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta + \dots, \quad \lambda = \bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots \quad (33)$$

いずれもバーがついたものは誤差がないときの値であり,  $\Delta_1, \Delta_2$  は誤差の 1 次および 2 次の項を表す . 式 (32), (33) を式 (16) に代入すると次のようになる .

$$(\bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_2 M + \dots)(\bar{\theta} + \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta + \dots)$$

$$= (\bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots) N (\bar{\theta} + \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta + \dots) \quad (34)$$

両辺を展開して誤差の 0 次, 1 次, 2 次の項を等値すると次式を得る .

$$\bar{M} \bar{\theta} = \bar{\lambda} N \bar{\theta}, \quad (35)$$

$$\bar{M} \Delta_1 \theta + \Delta_1 M \bar{\theta} = \bar{\lambda} N \Delta_1 \theta + \Delta_1 \lambda N \bar{\theta}, \quad (36)$$

$$\bar{M} \Delta_2 \theta + \Delta_1 M \Delta_1 \theta + \Delta_2 M \bar{\theta} = \bar{\lambda} N \Delta_2 \theta + \Delta_1 \lambda N \Delta_1 \theta + \Delta_2 \lambda N \bar{\theta} \quad (37)$$

誤差がないとき ( $\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{\theta}$ ) = 0 であるから, 式 (30) より  $\bar{M} \bar{\theta} = 0$  である . したがって式 (35) より  $\bar{\lambda} = 0$  である . また, 式 (31) より  $(\bar{\theta}, \Delta_1 M \bar{\theta}) = 0$  であるから, 式 (36) の両辺と  $\bar{\theta}$  との内積をとると,  $\Delta_1 \lambda = 0$  となる . そして式 (36) の左から一般逆行列  $\bar{M}^-$  を掛けると次式が得られる .

$$\Delta_1 \theta = -\bar{M}^- \Delta_1 M \bar{\theta} \quad (38)$$

ここで  $\bar{M} \bar{\theta} = 0$  より一般逆行列の定義から  $\bar{M}^- \bar{M} (\equiv P_{\bar{\theta}})$  が  $\bar{\theta}$  に直交する方向への射影行列になること, および  $\|\bar{\theta} + \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta + \dots\|^2 = 1$  を展開して誤差 1 次の項を比較して  $(\bar{\theta}, \Delta_1 \theta) = 0$ , すなわち  $\Delta_1 \theta$  が  $\bar{\theta}$  に直交していることを用いた . 式 (38) を式 (27) に代入して, 両辺と  $\bar{\theta}$  との内積をとると

$$\Delta_2 \lambda = \frac{(\bar{\theta}, \Delta_2 M \bar{\theta}) - (\bar{\theta}, \Delta_1 M \bar{M}^- \Delta_1 M \bar{\theta})}{(\bar{\theta}, N \bar{\theta})} = \frac{(\bar{\theta}, T \bar{\theta})}{(\bar{\theta}, N \bar{\theta})} \quad (39)$$

が得られる . ただし, 次のように置いた .

$$T = \Delta_2 M - \Delta_1 M \bar{M}^- \Delta_1 M \quad (40)$$

次に 2 次の誤差  $\Delta_2 \theta$  を考える .  $\theta$  は正規化されて伸縮しないから, 誤差として関心があるのは  $\bar{\theta}$  に直交する成分である . そこで  $\Delta_2 \theta$  の  $\bar{\theta}$  に直交する成分を次のように置く .

$$\Delta_2^\perp \theta = P_{\bar{\theta}}^\perp \Delta_2 \theta (= \bar{M}^- \bar{M} \Delta_2 \theta) \quad (41)$$

式 (37) の両辺に左から  $\bar{M}^-$  を掛けて式 (38) を代入すると次の結果を得る .

$$\begin{aligned}\Delta_2^{\perp}\theta &= \Delta_2\lambda\bar{M}^{-1}N\bar{\theta} + \bar{M}^{-1}\Delta_1M\bar{M}^{-1}\Delta_1M\bar{\theta} - \bar{M}^{-1}\Delta_2M\bar{\theta} \\ &= \frac{(\bar{\theta}, T\bar{\theta})}{(\bar{\theta}, N\bar{\theta})}\bar{M}^{-1}N\bar{\theta} - \bar{M}^{-1}T\bar{\theta}\end{aligned}\quad (42)$$

## 6. 解の共分散と偏差

式 (38) より, 解  $\theta$  の変動を評価する共分散行列の主要項が次のようになる.

$$\begin{aligned}V[\theta] &= E[\Delta_1\theta\Delta_1\theta^{\top}] = \frac{1}{N^2}\bar{M}^{-1}E[(\Delta_1M\theta)(\Delta_1M\theta)^{\top}]\bar{M}^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2}\bar{M}^{-1}E\left[\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k=1}^L(\Delta\xi_{\alpha}^{(k)}, \theta)\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\sum_{\beta=1}^N\sum_{l=1}^L(\Delta\xi_{\beta}^{(l)}, \theta)\bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top}\right]\bar{M}^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2}\bar{M}^{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^N\sum_{k,l=1}^L(\theta, E[\Delta\xi_{\alpha}^{(k)}\Delta\xi_{\beta}^{(l)\top}]\theta)\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top}\bar{M}^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2}\bar{M}^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L(\theta, V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]\theta)\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top}\right)\bar{M}^{-1} = \frac{1}{N}\bar{M}^{-1}\bar{M}'\bar{M}^{-1}\end{aligned}\quad (43)$$

ただし  $\bar{M}'$  を次のように定義する.

$$\bar{M}' = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L(\theta, V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]\theta)\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top}\quad (44)$$

式 (44) の導出では  $\xi_{\alpha}$  の誤差が各  $\alpha$  ごとに独立であり,  $E[\Delta_1\xi_{\alpha}^{(k)}\Delta_1\xi_{\beta}^{(l)\top}] = \delta_{\alpha\beta}V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]$  ( $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカーのデルタ) となることを用いた.

式 (44) から, 共分散行列  $V[\theta]$  が正規化の重み  $N$  に依存しないこと, したがってどの代数的解法も同一の共分散行列  $V[\theta]$  を持つことが分かる. このため,  $N$  を調節して  $V[\theta]$  を減らすことはできない. そこで解の偏差に着目する. 1 次の偏差項は  $E[\Delta_1\theta] = 0$  であるから, 2 次の誤差項  $E[\Delta_2^{\perp}\theta]$  を評価する. そのために, 式 (40) の  $T$  の期待値を計算する. 式 (32) より  $E[\Delta_2M]$  は次のようになる.

$$\begin{aligned}E[\Delta_2M] &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k=1}^L\left(\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}E[\Delta_2\xi_{\alpha}^{(k)\top}] + E[\Delta_1\xi_{\alpha}^{(k)}\Delta_1\xi_{\alpha}^{(k)\top}] + E[\Delta_2\xi_{\alpha}^{(k)}]\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)\top}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k=1}^L\left(V^{(kk)}[\xi_{\alpha}] + 2S[\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}e_{\alpha}^{(k)\top}]\right)\end{aligned}\quad (45)$$

ただし,  $S[\cdot]$  は対称化作用素であり ( $S[A] = (A + A^{\top})/2$ ),  $e_{\alpha}^{(k)}$  を次のように定義した.

$$e_{\alpha}^{(k)} = E[\Delta_2\xi_{\alpha}^{(k)}]\quad (46)$$

一方,  $E[\Delta_1M\bar{M}^{-1}\Delta_1M]$  は次のようになる (導出省略, 文献 4), (11) 参照).

$$\begin{aligned}E[\Delta_1M\bar{M}^{-1}\Delta_1M] &= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L\left(\text{tr}[\bar{M}^{-1}V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]]\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)})V^{(kl)}[\xi_{\alpha}] + 2S[V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]\bar{M}^{-1}\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top}]\right)\end{aligned}\quad (47)$$

ただし  $\text{tr}[\cdot]$  は行列のトレースである. 式 (45), (47) より式 (40) の  $T$  の期待値が次のように書ける.

$$\begin{aligned}E[T] &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k=1}^L\left(V^{(kk)}[\xi_{\alpha}] + 2S[\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}e_{\alpha}^{(k)\top}]\right) - \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L\left(\text{tr}[\bar{M}^{-1}V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]]\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)})V^{(kl)}[\xi_{\alpha}] + 2S[V^{(kl)}[\xi_{\alpha}]\bar{M}^{-1}\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}\bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top}]\right)\end{aligned}\quad (48)$$

これを用いると, 式 (33) の  $\Delta_2^{\perp}\theta$  の期待値は次のようになる.

$$E[\Delta_2^{\perp}\theta] = \bar{M}^{-1}\left(\frac{(\bar{\theta}, E[T]\bar{\theta})}{(\bar{\theta}, N\bar{\theta})}N\bar{\theta} - E[T]\bar{\theta}\right)\quad (49)$$

## 7. 超精度最小二乗法とその Taubin 近似

Rangarajan ら<sup>12)</sup> の円の当てはめ, 岩元ら<sup>4)</sup> の楕円当てはめ, 新妻ら<sup>11)</sup> の射影変換の計算を一般化すると, 超精度最小二乗法とは正規化の重み  $N$  を次のように選ぶことである.

$$N = E[T]\quad (50)$$

こうすると式 (49) は次のようになる.

$$E[\Delta_2^{\perp}\theta] = \bar{M}^{-1}\left(\frac{(\bar{\theta}, N\bar{\theta})}{(\bar{\theta}, N\bar{\theta})}N - N\right)\bar{\theta} = 0\quad (51)$$

式 (48) の  $E[T]$  は真の値  $\bar{\xi}_{\alpha}$ ,  $\bar{M}$  を含んでいるが, それらの定義式の中の真の位置 ( $\bar{x}_{\alpha}$ ,  $\bar{y}_{\alpha}$ ) をデータ ( $x_{\alpha}$ ,  $y_{\alpha}$ ) で代用する. これによって式 (48) の括弧中に誤差が生じて, 誤差の奇数次の項の期待値は 0 であるから, 全体で  $E[\Delta_2^{\perp}\theta]$  は 4 次の誤差項であり, 2 次の偏差は厳密に 0 になる.

式 (16) の一般固有値問題を解く通常のライブラリツールでは右辺の  $N$  が正値対称行列と仮定されているが, 式 (50) のように定義した  $N$  は必ずしも正値対称行列ではない. しかし, 式 (16) は次のように書き直せる.

$$N\theta = \frac{1}{\lambda}M\theta\quad (52)$$

式 (14) の行列  $M$  は誤差のあるデータに対しては正値対称行列であるから (誤差がないときのみ最小固有値が 0 となる), これを解くことによって一般固有ベクトル  $\theta$  が求まる.

式 (48) の右辺第 2 項は  $O(1/N)$  であり,  $N$  が大きくなるにつれて小さくなる. そこでこれを省略して

$$N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^L \left( V^{(kk)} [\xi_{\alpha}] + 2S[\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} e_{\alpha}^{(k)\top}] \right) \quad (53)$$

と置くものを, Taubin 法<sup>14)</sup> との類推で「Taubin 近似」と呼ぶことにする.

【例 7】 (楕円の当てはめ) 楕円の当てはめでは式 (22) より式 (46) の  $e_{\alpha}$  ( $= e^{(1)}$ ) は次のようになる.

$$e_{\alpha} = \sigma^2 \left( 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^{\top} \quad (54)$$

したがって Taubin 近似が次のようになる.

$$N = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} 6x_{\alpha}^2 & 6x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 & 6x_{\alpha} & 2y_{\alpha} & 1 \\ 6x_{\alpha}y_{\alpha} & 4(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) & 6x_{\alpha}y_{\alpha} & 4y_{\alpha} & 4x_{\alpha} & 0 \\ x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 & 6x_{\alpha}y_{\alpha} & 6y_{\alpha}^2 & 2x_{\alpha} & 6y_{\alpha} & 1 \\ 6x_{\alpha} & 4y_{\alpha} & 2x_{\alpha} & 4 & 0 & 0 \\ 2y_{\alpha} & 4x_{\alpha} & 6y_{\alpha} & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

ここで  $e_{\alpha} = 0$  と置くと次のようになり, 従来の Taubin 法<sup>14)</sup> となる.

$$N = \frac{4\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_{\alpha}^2 & x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & x_{\alpha} & 0 & 0 \\ x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 & x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha} & x_{\alpha} & 0 \\ 0 & x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 & 0 & y_{\alpha} & 0 \\ x_{\alpha} & y_{\alpha} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{\alpha} & y_{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

式 (55), (56) 中の  $\sigma^2$  は未知であるが, 式 (16), (52) の  $N$  には定数倍の不定性がある.  $N$  を  $\sigma^2$  倍すれば一般固有値  $\lambda$  が  $1/\sigma^2$  になるだけで, 一般固有値ベクトル  $\theta$  は不変である. したがって, 上式の実際の計算では  $\sigma^2 = 1$  とすればよい.

【例 8】 (基礎行列の計算) 基礎行列の計算では 2 画像の誤差は独立と仮定するため, 式 (25) より式 (46) の  $e_{\alpha}$  ( $= e^{(1)}$ ) は 0 となる. したがって Taubin 近似が次のようになり, 従来の Taubin 法<sup>14)</sup> 法に一致する. 楕円当てはめの場合と同様に実際の計算では  $\sigma^2 = 1$  としてよい.

$$N = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 & x'_{\alpha}y'_{\alpha} & x'_{\alpha} & x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & 0 & x_{\alpha} & 0 & 0 \\ x'_{\alpha}y'_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 & y'_{\alpha} & 0 & x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & 0 & x_{\alpha} & 0 \\ x'_{\alpha} & y'_{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & 0 & y_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 & x'_{\alpha}y'_{\alpha} & x'_{\alpha} & y_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & x'_{\alpha}y'_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + y'_{\alpha}{}^2 & y'_{\alpha} & 0 & y_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_{\alpha} & y'_{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{\alpha} & 0 & 0 & y_{\alpha} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{\alpha} & 0 & 0 & y_{\alpha} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

【例 9】 (射影変換の計算)

射影変換の計算でも 2 画像の誤差は独立と仮定するため, 式 (28) より式 (46) の  $e^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$  はすべて 0 になる. したがって Taubin 近似が次のようになる.

$$N = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_{\alpha}^2 + y'_{\alpha}{}^2 + 1 & x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha} & -x'_{\alpha}y'_{\alpha} & 0 & 0 & -x'_{\alpha} & 0 & 0 \\ x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + y'_{\alpha}{}^2 + 1 & y_{\alpha} & 0 & -x'_{\alpha}y'_{\alpha} & 0 & 0 & -x'_{\alpha} & 0 \\ x_{\alpha} & y_{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x'_{\alpha}y'_{\alpha} & 0 & 0 & x_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 + 1 & x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha} & -y'_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -x'_{\alpha}y'_{\alpha} & 0 & x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 + 1 & y_{\alpha} & 0 & -y'_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{\alpha} & y_{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x'_{\alpha} & 0 & 0 & -y'_{\alpha} & 0 & 0 & x_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 + y_{\alpha}^2 & 2x_{\alpha}y_{\alpha} & 2x_{\alpha} \\ 0 & -x'_{\alpha} & 0 & 0 & -x'_{\alpha} & 0 & 2x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + x'_{\alpha}{}^2 + y'_{\alpha}{}^2 & 2y_{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_{\alpha} & 2y_{\alpha} & 2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

射影変換のような複数の拘束式に対しては Taubin 法が存在しなかったが, これによって Taubin 法が多拘束への拡張されることを発見したのは新妻ら<sup>10)</sup> である. 楕円, 基礎行列の場合と同様に  $\sigma^2 = 1$  としてよい.

## 8. 実験

次のシミュレーションを行う.

- (1) 長軸半径, 短軸半径がそれぞれ 100 画素, 50 画素と想定した楕円上に等間隔に 31 点をとる (図 1). 各点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加えて楕円を当てはめる.
- (2) 曲面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 (図 2) の各格子点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加えて基礎行列を計算する.
- (3) 平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 (図 3) の各格子点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加えて射影変換を計算する.

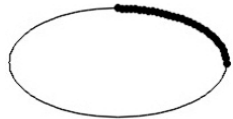


図 1 楕円上の 31 点 .

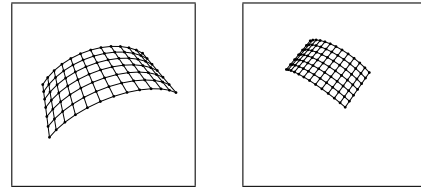


図 2 曲面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 .

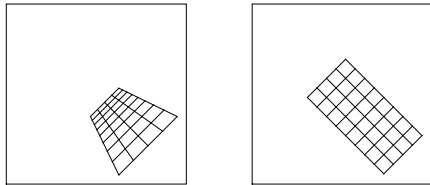


図 3 平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 .

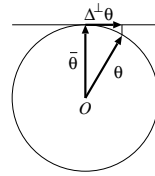


図 4 計算値  $\hat{\theta}$  の真の値  $\bar{\theta}$  に垂直な成分  $\Delta^\perp\theta$  .

各例について超精度最小二乗法および Taubin 近似を従来の (標準) 最小二乗法, Taubin 法, および最尤推定を比較する. 最尤推定は楕円と基礎行列に対しては Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法を, 射影変換に対しては新妻ら<sup>10)</sup> の多拘束 FNS 法を用いる. そして, 未知パラメータ  $\theta$  の真の値を  $\bar{\theta}$ , 計算値を  $\hat{\theta}$  とし, 次の誤差を考える.

$$\Delta^\perp\theta = P_{\bar{\theta}}\hat{\theta}, \quad P_{\bar{\theta}} \equiv I - \bar{\theta}\bar{\theta}^\top \quad (59)$$

$P_{\bar{\theta}}$  は  $\bar{\theta}$  に直交する方向に射影した成分を得る射影行列である. 式 (58) は,  $\hat{\theta}$  が単位ベクトルであって単位球面上に真値  $\bar{\theta}$  の周りに分布することから, 誤差を評価するには  $\bar{\theta}$  に垂直な方向, すなわち球面上の  $\theta$  における接平面上で評価すればよいという意味である (図 4). これに対する精度の理論限界を表す「KCR 下界<sup>5)-7)</sup>」は次のようになる.

$$E[\Delta^\perp\theta\Delta^\perp\theta^\top] \succ \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l} \bar{W}_\alpha^{(kl)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top} \right)^- \left( \equiv V_{\text{KCR}}[\theta] \right) \quad (60)$$

ただし  $\succ$  は左辺引く右辺が半正値対称行列であることを表し,  $(\cdot)^-$  は一般逆行列を表す (誤差がないときはかっこ内の最小固有値が 0).  $W_\alpha^{(kl)}$  は,  $(kl)$  要素が  $(\theta, V^{(kl)}[\theta])$  の行

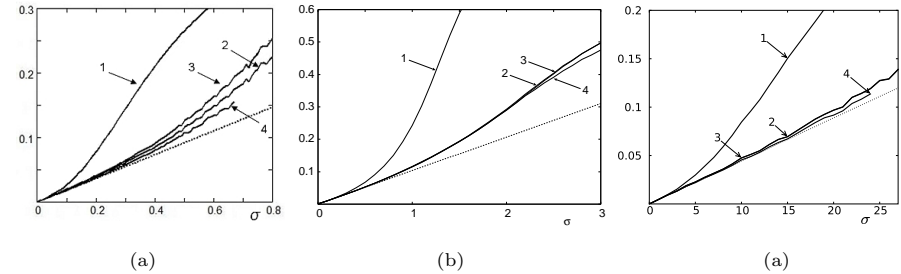


図 5 計算値の RMS 誤差. 横軸は加えた誤差の標準偏差  $\sigma$ . (a) 楕円当てはめ. (b) 基礎行列の計算. (c) 射影変換の計算. いずれもプロットは 1. 最小二乗法, 2. 超精度最小二乗法, 3. Taubin 近似, 4. 最尤推定. 最尤推定のプロットが途切れているのは, それ以上の誤差では収束しなかったことを示す. 点線は KCR 下界.

列のランク  $r$  の一般逆行列である. これを次のように略記する.

$$\left( \bar{W}_\alpha^{(kl)} \right)^- = \left( (\theta, V^{(kl)}[\theta]) \right)^- \quad (61)$$

ただし  $r$  は式 (2) の  $L$  個の拘束式の中の線形独立なもの個数である (楕円と基礎行列では  $r = 1$ , 射影変換では  $r = 2$ ). そして, 異なる乱数誤差により  $M$  回試行し, その RMS (平方二乗平均) 誤差を次のように評価する (楕円と基礎行列では  $M = 10000$ , 射影変換では  $M = 1000$  とした).

$$E = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{a=1}^M \|\Delta^\perp\theta^{(a)}\|^2} \quad (62)$$

ただし  $\Delta^\perp\theta^{(a)}$  は誤差  $\Delta\theta$  の  $a$  回目の試行の値である. これに対する下界が式 (60) の両辺のトレースの平方根をとって得られる.

$$\sqrt{E[\|\Delta^\perp\theta\|^2]} \geq \sqrt{\text{tr}V_{\text{KCR}}[\theta]} \quad (63)$$

各手法に対する式 (62) の RMS 誤差と式 (63) の KCR 下界を横軸に  $\sigma$  をとってプロットしたものが図 5 である. 次のことが分かる.

- (1) 楕円当てはめでは最小二乗法の精度は低く, 最適性が保証された最尤推定が最も高精度であり, ほぼ KCR 下界に到達している. しかし, 最尤推定は誤差が大きくなると反復が収束しなくなる. それに対して超精度最小二乗法は反復なしに最尤推定に匹敵する精度を与える. その Taubin 近似は従来の Taubin 法とほぼ等価であり, 超精度最小二乗法に比べるとやや精度が劣化する.

- (2) 基礎行列の計算でも楕円当てはめでは最小二乗法の精度は低く、最尤推定が最も高精度である。そして超精度最小二乗法もほぼ同等の精度を与える。この場合は Taubin 近似 (= 従来 of Taubin 法) もほぼ同じ精度である。なお、基礎行列はランクが 2 であるという拘束があり、実際の応用ではこのランク拘束を満たすように補正する必要があるが、ここではその補正の前段階での精度の比較を行っている。
- (3) 射影変換の計算でもやはり最小二乗法の精度は低く、最尤推定が最も高精度であるが、誤差が大きくなると反復が収束しなくなる。それに対して超精度最小二乗法は最尤推定に匹敵する精度を与える。その Taubin 近似もほぼ同じ精度である。

いずれの例も最小二乗法の精度は低く、最尤推定が最も高精度であるが、楕円と基礎行列では収束しないことがあるという欠点がある。それに対して超精度最小二乗法は反復なしに最尤推定に匹敵する精度を与える。また、基礎行列と射影変換に対しては Taubin 近似を行っても精度が低下しないが、楕円では Taubin 近似を行うと精度が低下する。この違いは楕円では式 (5) の  $\xi$  が  $x, y$  の 2 次式であるのに対して、式 (7) の基礎行列の  $\xi$  と式 (12) の射影変換の  $\xi^{(k)}$  が  $x, y, x', y'$  の双 1 次式であり、したがって式 (46) の  $e_{\alpha}^{(k)}$  が 0 となることに起因すると考えられる。

## 9. ま と め

本論文ではコンピュータビジョンの最も重要な基礎技術の一つの幾何学的当てはめ問題の実際問題によく生じる形 (データに関して非線形, 未知パラメータに関して線形) に対して反復を用いない代数的解法の精度を向上させる超精度最小二乗法の理論をまとめた。これは金谷<sup>8)</sup> の高次の誤差解析によって偏差を誤差の 2 次の項まで消去するように最適化の重み行列を選ぶものである。これは円および楕円の当てはめや射影変換の計算に対して Al-Sharadqah ら<sup>1)</sup>, Rangarajan ら<sup>12)</sup>, 岩元<sup>4)</sup>, 新妻<sup>11)</sup> によって個別に提唱されたものであり、本文ではそれを一般化し、楕円当てはめ、基礎行列の計算、射影変換の計算に対して適用法と解の挙動の相違をまとめた。そして結論として、最小二乗法の精度は低く、最尤推定が最も高精度であるが、必ずしも反復が収束しないことがあるという欠点があり、それに対して超精度最小二乗法は反復なしに最尤推定に匹敵する精度を与えることが示された。一方、その計算を簡略化する Taubin 近似の精度は問題に依存することが分かった。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった。

## 参 考 文 献

- 1) A. Al-Sharadqah and N. Chernov, Error analysis for circle fitting algorithms, *Electronic J. Statistics*, **3** (2009-8), 886–911.
- 2) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000), 1294–1303.
- 3) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- 4) 岩元祐輝, P. Rangarajan, 金谷 健一, 楕円当てはめの超精度最小二乗法, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-168-14 (2009-9), 1–8.
- 5) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-88 (1995-8), 1865–1873.
- 6) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- 7) 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- 8) 金谷 健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.
- 9) 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, 情報処理学会論文誌: CVIM, **2**-1 (2009-3), 53–62.
- 10) 新妻 弘崇, 金谷 健一, 最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-169-37 (2009-11), 1–8.
- 11) 新妻弘崇, プラサンナ・ランガラヤン, 金谷 健一, 反復を要しない射影変換の高精度解法, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-170-57 (2010-1), 1–8.
- 12) P. Rangarajan and K. Kanatani, Improved algebraic methods for circle fitting, *Elec. J. Stat.*, **3** (2009-9), 1075–1082.
- 13) 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.
- 14) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-11 (1991-11), 1115–1138.
- 15) 山田純平, 金谷健一, 菅谷保之, 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36, (2006-5) 339–346.
- 16) 山田健人, 金澤靖, 金谷健一, 菅谷保之, 画像からの 3 次元復元の最新アルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-168-15, (2009-8/9), 1–8.