講 座

最近のグラフ理論とその応用（1）†

大 附 辰 夫††

1. まえがき

直観的にいえば，**グラフ**とは，いくつかの**点**とそれらの点の対を両端とする**線**とによって表わされる図形のことである．この際，点と枝とがお互いにどのような“つながり方”をしているかだけが問題で，点の位置とか枝の長さや，曲がり方などは問題にしない．グラフと類似した概念として，**ネットワーク**という言葉があるが，これはグラフの点や線と具体的な物との対応とか，点や線に割り当てられた物理量までを含んだ概念である．本講座の意図するところは，グラフ理論だけでなくその応用についても論ずることであるので，ネットワークの理論についてもグラフ理論と関連付けて解説する．

グラフ理論の研究の歴史は古く Euler (1707-1783) の時代までさかのぼるが，電気回路，輸送問題，日程計画などの工学的応用と関連して広く研究されるようになったのは，1960 年代になってからである．グラフ理論は最近，種々の応用分野に関連して幅広く研究されているが，未だに“定説”と言えるような理論体系が確立されていないのが現状である．ちなみに，同一の概念を表わす用語が人によってまちまちであったり，また同一の用語が人によって異なる概念を指していたりする．したがって本講座において解説するグラフ理論も筆者が主観的に体系化したものに過ぎないことをおことわりしておく．

グラフ（ネットワーク）の理論を扱った参考書として代表的なものをいくつか挙げておく[1)~15)]．これらの本を併読すれば，グラフ理論の体系の未統一な現状が，あらためて認識されるであろう．

グラフ理論の地位は，その兄弟分ともいえる**組合せ数学**とともに，すこぶる不安定のように見える．位相幾何学の言葉でいうと，グラフとは“一次元複体”と呼ばれる極めて特殊で簡単な場合に過ぎないため，正統的な数学の体系からは疎外されている．しかし，理論的に“特殊な場合”，“簡単な場合”というのは，応用の立場からみると，“一般の場合”より有用であることがある．何となれば，より具体的で詳細な議論が可能になり，能率の良い問題処理技法が確立できるかもしれないからである．かつては，直観的な記述だけでグラフの理論や手法をかたづけていたが，“十分大きな規模の問題では，どの程度の大きさの記憶装置とどの程度の処理時間を要するか？”という問題意識のもとで解法の“良さ”を厳しく追求するというのが最近の研究の一つの方向となっている．このような応用的観点から，最近多くの有効な研究成果が出されているのは，グラフ特有の“特殊性”，“単純性”によるところが大きい．

本講座（4 回の連載とする）では，最近の研究成果を盛り込みながら，下記の項目に関して，順を追って解説する．

- グラフの理論の基礎
- グラフの代数的構造
- ネットワーク理論の基礎
- グラフの問題の計算機による処理技法
- グラフ理論の応用

2. グラフ理論の基礎

2.1 グラフの定義と表現法

形式的な表現を用いると，グラフ $\boldsymbol{G}$ は二つの集合 V, E および写像

$$\theta:\ E\rightarrow\{(u,v)\,|\,u,v\in V\} \tag{2·1}$$

から成る複合概念であり，$\boldsymbol{G}=(V,E,\theta)$ と表現される．本講座においては，V の元，E の元をそれぞれ**節点** (node)，**枝** (branch) と呼ぶことにする*．また写像 θ のことを**接続関係** (incident relation) と呼ぶ．

† Recent Development in Graph Theory and Its Applications (1) by Tatsuo OHTSUKI (Central Research Laboratories, Nippon Electric Co., Ltd.).

†† 日本電気(株)中央研究所

* 節点と枝がそれぞれ図形表現における“点”と“線”に相当する概念であるが，この他にこれらをそれぞれ**頂点** (vertex)，**辺** (edge) と呼ぶ流儀もある．また方向を持った枝を**弧** (arc) と呼んで区別する場合もある．

グラフには，図-1(a)のように枝の方向を考えないもの——無向グラフと呼ぶ——．と図-1(b)のように枝の方向を考慮するもの——有向グラフと呼ぶ——がある．式(2.1)における (u, v) は，無向グラフにおいては節点の順序を考えない対を，有向グラフにおいては節点の順序対を表わすものとする．本講座においては，無向グラフと有向グラフの区別をしないで単に"グラフ"ということがある．これは無向グラフの性質あるいは有向グラフの枝の方向性と無関係な性質を論じていることを意味する．

一つの枝 e に対して $\theta(e)=(u, v)$ あるいは $\theta(e)=(v, u)$ であるとき，u, v を e の端点という．有向グラフにおいて $\theta(e)=(u, v)$ ならば，u, v をそれぞれ e の始点，終点と呼ぶ．特に $u=v$ ならば，枝 e は自己閉路と呼ばれる．また二つ以上の枝が同一の節点対を端点として持つとき，これらを並列枝という．並列枝を持たないグラフを扱うときは，枝集合 E は節点対の全体 $V\times V$ の部分集合とみなせるので，グラフを $G=(V, E)$ と表現してもよい．この場合 $\theta(e)=(u, v)$ という表現も簡略化して，単に $e=(u, v)$ と表現してもよい．

一つの節点 v に対して枝 e が v を端点として持つとき，e は v に接続しているという．また，ある節点に接続している枝の数をその節点の次数 (degree) という（自己閉路は二重に数える）．特に次数が0の節点を孤立節点という．二つの節点 u, v の間に枝が存在するとき，u, v は互いに隣接しているという．

例えば図-1(a)のグラフにおいて，e_2 と e_3 は並列枝，枝 e_5 は自己閉路，節点 v_5 は孤立節点である．節点 v_1 に着目すれば，これに接続している枝は e_4, e_5, e_6 である．但し e_5 は自己閉路であるので，v_1 の次数は4である．また v_3 に隣接している節点は v_2 と v_4 である．

二つのグラフが"同じ"であるか否かという問題は，通常，節点と枝に付けられた名前とか番号とかを意識せずに論じられる．この概念を形式的に定義すると次のようになる．「グラフ G_1 と G_2 が同数個の節点と同数個の枝を有し，両者の節点の集合の間，枝の

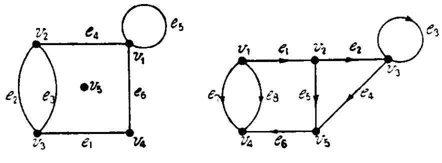


図-1　無向グラフ（a）と有向グラフ（b）

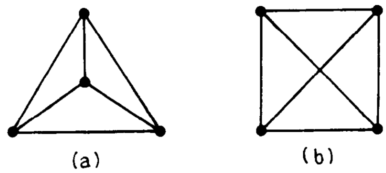


図-2　同じグラフの異なった描き方

集合の間に適当な1対1対応が存在して，その対応のもとで両者の接続関係が等しくなるとき，G_1 と G_2 は同形 (isomorphic) であるという．例えば図-2の二つのグラフは描き方は違っても同じもの，すなわち同形である．

節点の集合 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ と枝の集合 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ から成る有向グラフ $G=(V, E)$ に対して，

$$d_{ij}=\begin{cases}1: & \text{節点 } v_i \text{ が枝 } e_j \text{ の始点であって終点でない}\\ -1: & \text{節点 } v_i \text{ が枝 } e_j \text{ の終点であって始点でない}\\ 0: & \text{上記以外}\end{cases} \tag{2.2}$$

で定義される $n\times m$ の行列 $D=\{d_{ij}\}$ をグラフ G の接続行列 (incidence matrix) という．また

$$a_{ij}=\begin{cases}1: & v_i \text{ を始点，} v_j \text{ を終点とする枝が存在する}\\ 0: & \text{上記以外}\end{cases} \tag{2.3}$$

で定義される n 次の正方行列 $A=\{a_{ij}\}$ を G の隣接行列という．例えば図-1（b）の有向グラフの接続行列，隣接行列は下記のようになる．

$D=$

v_i \ e_j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	1	1
2	−1	1	0	0	1	0	0	0
3	0	−1	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
5	0	0	0	−1	−1	1	0	0

$A=$

v_i \ v_j	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0

無向グラフの接続行列は，枝に勝手に向きを指定して得られる有向グラフの接続行列の中の"−1"を"1"で置き代えたものである．また隣接行列は，各々の枝を互いに向きの異なる有向枝の並列接続で置き代えることによって得られる有向グラフの隣接行列と等価で

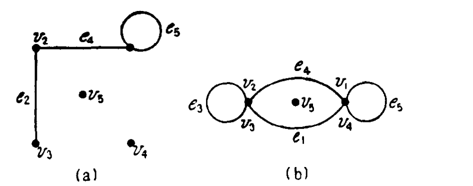


図-3 図-1(a)のグラフの $\{e_1, e_3, e_6\}$ を開放除去した結果(a)と $\{e_2, e_6\}$ を短絡除去した結果(b)

ある．よって無向グラフの隣接行列は対称である．

グラフ G の枝 $e \in E$ を**開放除去** (open) するというのは，枝 e を取り去ることによって枝の数が一つ少ないグラフ G' を得る操作のことである．また枝 $e \in E$ を**短絡除去** (short) するというのは，e の両端点を一つにまとめた後に枝 e を取り除いて，節点と枝の数が一つずつ少ないグラフ G' を得る操作のことである．枝の開放除去，短絡除去の操作を一つずつ複数個の枝について行った結果が，除去していく順序に依存しないことはいうまでもない．例えば図-1(a)のグラフの枝 $\{e_1, e_3, e_6\}$ を開放除去，$\{e_2, e_6\}$ を短絡除去すれば，それぞれ**図-3**(a)，(b)に示すグラフが得られる．

与えられたグラフ G からいくつかの枝を開放除去することによって得られるグラフ G' あるいは G' からいくつかの孤立節点を取り除いて得られるグラフ G'' を G の**部分グラフ** (subgraph) という．応用上は G' と G'' を区別する必要がないことが多い．

2.2 グラフの連結性

グラフ $G=(V, E, \theta)$ の相異なる枝の順序列 $e_1, e_2, \cdots, e_l$; $l \leqq |E|$ および（重複を許した）節点の順序列 $v_0, v_1, \cdots, v_l$ に対して，

$$\theta(e_i)=(v_{i-1}, v_i) \text{ or } (v_i, v_{i-1})\,;\ i=1\sim l \qquad (2.4)$$

が成立し，かつ $v_0 \neq v_l$ ならば，$P=\{e_1, e_2, \cdots, e_l\}$ を長さ l の**道** (path) と呼び，v_0 と v_l を P の端点と呼ぶ．また $v_0=v_l$ ならば P を長さ l の**閉路** (circuit あるいは loob) と呼ぶ．特に $v_0, v_1, \cdots, v_l$ がすべて異なるような道あるいは閉路は**単純** (simple) であるといわれる．G が有向グラフである場合，特に枝の方向のそろった道あるいは閉路，すなわち

$$\theta(e_i)=(v_{i-1}, v_i)\,;\ i=1, 2, \cdots, l \qquad (2.4)'$$

が成立するものを，それぞれ**有向道**，**有向閉路**と呼んで区別する．

グラフのすべての枝を含むような閉路のことを**オイラー閉路** (Euler circuit) という．オイラー閉路に沿って筆を運んでいくと，途中でとぎれずにグラフが描けることから，オイラー閉路を有するグラフは**一筆書き可能** (unicursal) であるともいわれる．グラフのすべての節点を含む単純な閉路のことを**ハミルトン閉路** (Hamilton circuit) という．

グラフの一筆書き可能性は，下記の定理によって，単に節点の次数を調べることにより判定できる．

〔**定理 2.1**〕 連結グラフにオイラー閉路が存在するための必要十分条件はすべての節点の次数が偶数であることである．

上記の条件を満たすグラフに対して，実際にオイラー閉路を作図するには，**図-4** に示すように，枝を共有しない単純な閉路の系列を順次生成し，これらを合成すればよい．ハミルトン閉路は，オイラー閉路と一見似たような概念であるが，その存在条件や作図法について有効なことは何も知られていない．

"道"の概念を用いて，グラフの連結性を議論することができる．任意の節点の対に対して，それを両端点

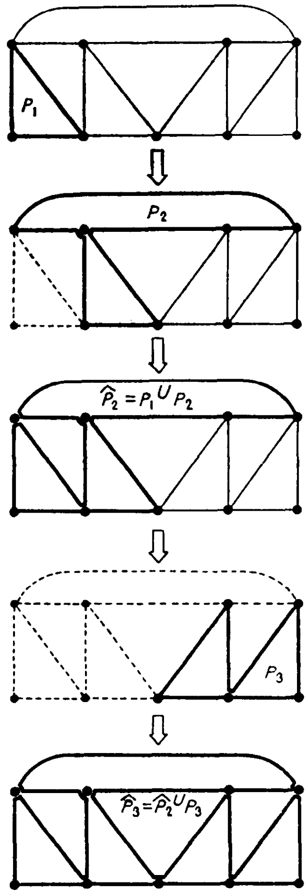


図-4 オイラー閉路の作図

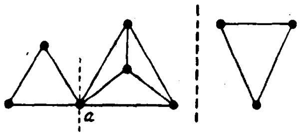


図-5　連結成分と非可分成分

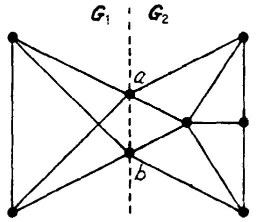


図-6　2端子部分グラフ

とする道が存在するようなグラフは**連結** (connected) であるといわれる．グラフGにおいて，その極大な連結部分グラフの各々をGの**連結成分** (connected component) という．連結グラフ $G=(V, E)$ の枝の集合EをE_1とE_2に分割 ($E_1 \cap E_2=\phi$, $E_1 \cup E_2=E$) したときのE_1の端点の集合をV_1, E_2の端点の集合をV_2とする．もし $V_1 \cap V_2$ が唯一の節点から成るような E のE_1とE_2への分割が可能なとき，Gは**可分** (separable) であるといわれる．またこのような唯一の節点を**関節点** (articulation point) と呼ぶ．連結グラフGにおける極大な非可分部分グラフの各々を**非可分成分** (non-separable component) という．例えば，図-5のグラフは2個の連結成分に分解され，更に左側の連結成分は関節点aによって2個の非可分成分に分解される．非可分グラフにおいては，任意の節点対 (u, v) に対して，共通の節点を通らないようなuとvを結ぶ二つの道が存在することから，**2重連結** (2-connected) グラフとも呼ばれる．

非可分グラフ $G=(V, E)$ の枝の集合EをE_1とE_2に分割したときのE_1の端点の集合をV_1, E_2の端点の集合をV_2とする．もし$V_1 \cap V_2$がただ2節点から成るようなEのE_1とE_2への分割が存在するとき，$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ の各々を，**2端子部分グラフ**という．2個以上の枝あるいは3個以上の節点から成り，かつ2端子部分グラフを含まないような非可分グラフは**3重連結** (3-connected) であるといわれる．例えば図-6のグラフは2節点 a, b によって二つの2端子部分グラフに分割される．

有向グラフGの任意の節点の順序対 (u, v) に対して，uからvに至る有向道が存在するとき，Gは**強連結** (strongly connected) であるといわれる．また強連結な極大部分グラフの各々をGの**強連結成分**という．有向グラフを強連結成分に分解したとき，節点はどれかの強連結成分に含まれるのに対して，枝は強連結成分に含まれるものと，異なる二つの成分の間を結ぶものの二通りがある．後者の枝は強連結成分相互の半順序関係を定めている．例えば図-7のグラフは(a)に示すように4個の強連結成分に分割され，それらは(b)に示される半順序関係で結ばれている．

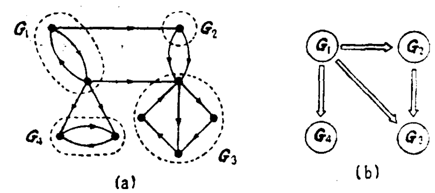


図-7　有向グラフの強連結成分(a)とそれらの間の半準序関係(b)

2.3　カットセットとタイセット

グラフGの節点の集合Vを二つの部分V_1, V_2に分割したとき，一方の端点はV_1に，他方はV_2に属するような枝の集合QをGの**カットセット** (cutset) という．一つの節点に接続している枝（自己閉路は無視する）の集合はカットセットの特別な場合とみなせる．真部分集合としてカットセットを含まないカットセットは**単純** (simple) であるといわれる．

いくつかの互いに素な（単純な）閉路の和集合を**タイセット** (tieset) と呼ぶ．一つのグラフのカットセットの全体，タイセットの全体は，次の定理に示すように，演算⊕の意味でそれぞれ閉じた系を形成する．ここで⊕は排他的論理和 ($F_1 \oplus F_2=F_1 \cup F_2-F_1 \cap F_2$) を表わす．

〔定理 2.2〕 グラフの二つの枝集合 F_1, F_2 の両方がカットセット（タイセット）ならば $F=F_1 \oplus F_2$ もカットセット（タイセット）である．

詳しいことは後で述べるが，「カットセットとタイセットは互いに双対 (dual) な概念である」といわれている．このことを念頭において，2.1 節において導入した“並列枝”および“自己閉路”と対になる概念を導入しよう．例えば図-8(a)の3個の枝 e_1, e_2, e_3 は互いに並列である．一方「それら自身でタイセット（閉路）を構成する二つの枝は互いに並列である」と定義しても，「両端点を共有する」ことと等価である．そこで“タイセット（閉路）”を双対な概念“カットセット”で置き代えて，「それら自身でカットセットを

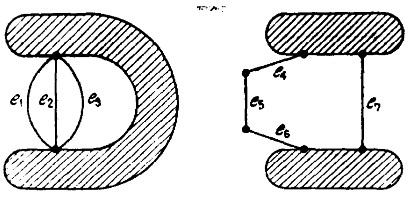


図-8 並列（a）と直列（b）

構成する二つの枝は互いに**直列** (seriel) である[16]」と定義する．この定義によれば，図-8（b）の4個の枝 e_4, e_5, e_6, e_7 は互いに直列である．上記と同様にして，自己閉路は「それ自身で閉路になっている枝」であるので，「それ自身でカットセットになっている枝」を**自己カットセット**と呼ぶ．例えば，図-3(a)のグラフの枝 e_2, e_4 は自己カットセットである．

カットセットやタイセットの構造に注目していただけでは区別することができないような二つのグラフは互いに**2同形** (2-isomorphic) であるといわれる．例えば図-9（b）のグラフ G_1 と同図（c）のグラフ G_2 は接続関係が異なるので，互いに同形という関係では結ばれない．しかし，カットセットの全体あるいはタイセットの全体の構造に着目しても差異がないことは視察によって確認できる．厳密に定義すると，二つのグラフが**2同形**であるとは，「両者の枝の集合の間に一対一対応が存在し，その対応のもとで，一方のカットセット（タイセット）が他方のカットセット（タイセット）に対応する」ことである．2同形性の判定法として，理論的に意義の大きい定理として，Whitney[17] によって示された下記の事実を挙げておく．

〔**定理 2.3**〕 二つのグラフが2同形であるための必要十分条件は，下記のⅰ)，ⅱ)，ⅲ）の操作を適当な順で繰り返し施すことによって一方から他方が得られることである．

ⅰ）孤立節点を除去，あるいは追加する．

ⅱ）可分な連結成分を関節点で切断して二つの連結成分にする．あるいは，逆に二つの連結成分から一つずつ節点を選び，それら2節点を一まとめにすることによって一つの連結成分として結合する．

ⅲ）2端子部分グラフをその両端子のところで残りの部分から切り離し，それを反転してつなぎ直す．

二つのグラフ G と G^* の枝の集合の間に一対一対応が存在し，その対応のもとで，G のカットセット（タイセット）と G^* のタイセット（カットセット）が対応するとき，G と G^* は互いに**双対** (dual) であるといわれる．2同形の定義から明らかなように，G_1 と G^* が双対で G_2 と G_1 が2同形なら G_2 と G^* も双対である．また，G と G_1 および G と G_2^* が双対なら，G_1 と G_2 は2同形である．よって次の定理がある．

〔**定理 2.4**〕 グラフ G の双対グラフ G^* が存在するならば，G^* は2同形の範囲内で一意に定まる．

例えば図-9（a）のグラフ G と双対なグラフとして，同図（b）の G_1，同図（c）の G_2 などがある．もちろん G_1 と G_2 は2同形である．

2.4 木と補木

グラフ $G=(V, E)$ の枝の部分集合 $F \subseteq E$ に対して，F に含まれる枝だけを用いたのでは閉路を作れないとき，F を**無閉路集合**という．また F に含まれる枝だけではカットセットを作れないとき，F を**無カットセット集合**という．特に F が極大な無閉路集合，無カットセット集合，すなわち F に任意の一つの枝を付加するとその性質を満たさないとき，F をそれぞれ**木** (tree)，**補木** (cotree) と呼ぶ．グラフ $G=(V, E)$ が k 個の非可分成分 $G_i=(V_i, E_i)$；$i=1, 2, \cdots, k$ から成っているとすれば，「$F \subseteq E$ が G の木（補木）であるとき，しかもそのときに限り，各々の $F \cap E_i$ が G の木（補木）となる」ことは明らかである．

グラフ $G=(V, E)$ の枝の数，節点の数，連結成分の数をそれぞれ m, n, k としたとき

$$\rho = n - k \qquad (2.5)$$

$$\mu = m - \rho = m - n + k \qquad (2.6)$$

で与えられる整数をそれぞれ G の**階数** (rank)，**零度** (nullity) という．

グラフの木（補木）の定義の仕方には色々ある．例えば下記の定理のⅰ）あるいはⅱ）を木（補木）の定義として，本講座で与えた定義をその性質とみなしても良い．

〔**定理 2.5**〕 下記のⅰ)，ⅱ）は $F \subseteq E$ がグラフ $G=(V, E)$ の木（補木）であることと等価である．

ⅰ）F が $\rho(\mu)$ 個の枝から成る無閉路集合（無カットセット集合）である．

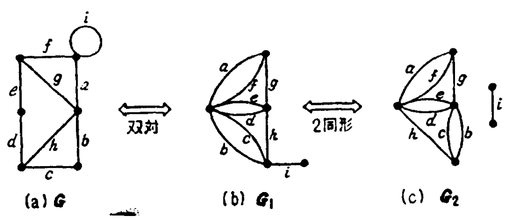


図-9 2同形と双対

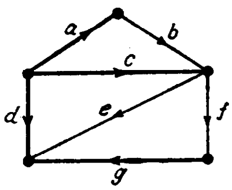


図-10 木と補木

ii) $(E-F)$ が補木 (木) である.

木 (補木) の概念と前節に述べた2同形グラフおよび双対グラフとの間には密接な関係がある. すなわち, 二つのグラフが2同形ならば一方の木 (補木) の集合と他方の木 (補木) の集合の間に一対一対応が存在する. また, 二つのグラフが双対ならば, 一方の木 (補木) の集合と他方の補木 (木) の集合の間に一対一対応が存在する.

グラフ $G=(V, E)$ の一つの木を T, それに含まれない枝, すなわち補木 $(E-T)$ の枝の一つを c とする. T は極大無用閉路集合であるので, T に c を付加すると, c 以外には補木の枝を含まない閉路が形成され, しかもそれは一意に定まる. 一方, 木 T の枝の一つを b とすれば, b 以外に木の枝を含まないカットセットも一意に定まる. このようにして定められる ρ 個のカットセット, μ 個の閉路の組をそれぞれ, **カットセットの基本系**, **閉路の基本系**という. またこれらを構成する各々のカットセット, 閉路をそれぞれ, 木 T に基づく**基本カットセット**, **基本閉路**という.

例えば図-10のグラフにおいて, 太線の枝集合 $T=\{a, c, d, g\}$ は木であり, その補集合 $(E-T)=\{b, e, f\}$ は補木である. T に基づくカットセットの基本系は $\{a, b\}, \{c, b, e, f\}, \{d, e, f\}, \{g, f\}$ であり, 閉路の基本系は $\{b, a, c\}, \{e, c, d\}, \{f, c, d, g\}$ である.

2.5 平面グラフ

平面上(あるいは球面上)に枝を交差させることなく描くことができるグラフを**平面グラフ** (planar graph) という. ここで, 平面グラフというのは平面に"描かれた"グラフではなく, 平面上に"描き得る"グラフであることに注意されたい. 例えば, 図-2(b)のグラフは枝が交差するように描かれているが, 平面グラフである. グラフ G がいくつかの非可分成分に分解される場合, その各々が平面グラフであるとき, しかもそのときに限り, G は平面グラフである. そこでグラフの平面性を論ずる際には, それが非可分であるという前提をおいても一般性を失わない.

平面グラフを平面に描いた状態をその**平面マップ**

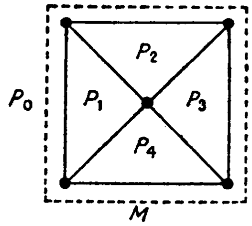


図-11 平面マップ

(planar map) という. 非可分グラフ G の平面マップ M において, 各々の単純な閉路 P は平面を内部領域と外部領域に分ける. 特に G の枝のすべてが P の外部領域の上に描かれているとき, P を M に対する**有限面** (finite face) と呼ぶ. また枝のすべてが P の内部領域の上に描かれているとき, P を M に対する**無限面** (infinite face) という. 各々の平面マップに対して, 無限面は唯一個存在し, 有限面の数はグラフの零度 μ に等しい. 例えば図-11の平面マップ M において, 無限面が P_0, 有限面が P_1, P_2, P_3, P_4 である.

図-12の二つのグラフを比べると, 節点数も枝数も等しくないので互いに同形ではないし, また2同形でもない. しかしグラフが"平面上に描けるか否か?"を論ずる際には両者を区別する必要はない. このように「2節点 a, b を両端点とする単純な道が2端子部分グラフを形成していたら, それを a, b を両端とする一つの枝で置き代える」という操作, あるいはその逆の操作の繰り返しによって一方から他方へ移れるとき, この二つのグラフは互いに**同相** (homeomorphic) であると言われる.

平面上に描けないグラフの中で最も単純な構造を持つものとして, 図-13に示す二つのグラフ——**クラトウスキーグラフ** (Kuratowski graphs) と呼ばれる——

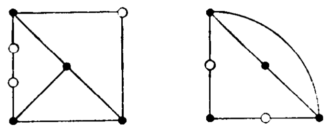
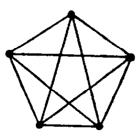
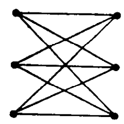


図-12 同相な二つのグラフ



(a)



(b)

図-13 クラトウスキーグラフ

は基本的に重要である．図-13(a)，(b)のグラフは，非平面グラフの中で，それぞれ節点数(=5)，枝数(=9)が最小のものである．

与えられたグラフが平面グラフであるための必要十分条件というのがいくつか知られているが，代表的なものを挙げておこう．

〔**定理 2.6**〕 非可分グラフ G において下記の i)〜v)は互いに等価である．

i) G が平（球）面上に枝の交差なしに描ける．

ii) G の双対グラフが存在する．

iii) $(\mu+1)$ 個の単純な閉路の集合 P を適当に選ぶと，G のどの枝も P の丁度2個の閉路に含まれる．

iv) G の部分グラフの中に，クラトウスキーグラフと同相なものが存在しない．

v) G の何個かの枝を開放除去，短絡除去することによって，クラトウスキーグラフと同形なものが得られない．

上記の定理の証明は相当厄介である[3),6),7),18)~22)]．なお条件 i)から ii)が出ること，すなわち"i)⇒ii)"は図-14の作図法から明らかである．"i)⇒iii)"は P を1個の無限面と μ 個の有限面から成る集合とみなせば，容易に導かれる．また"i)⇒iv)，v)"，"ii)⇒iv)，v)"および"v)⇒iv)"は定義から明らかである．

2.6 クリーク数と彩色数

自己閉路を含まず，かつ任意の異なる2節点を両端点とする枝がちょうど一個存在するようなグラフを**完全グラフ** (complete graph) という．例えば図-13(a)のグラフは節点数5の完全グラフである．グラフ $G=(V, E)$ の節点の部分集合 $A \subseteq V$ および両端点が A に属している枝の集合 $E(A)$ で決まる G の部分グラフ $G(A)=(A, E(A))$ が完全グラフであるとき，A を G の**クリーク** (clique) という．グラフ G の含む最大なクリークの大きさ（節点数）を G の**クリーク数** (clique number) と称し，$\omega(G)$ と記す．

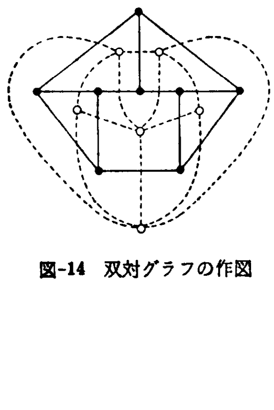


図-14 双対グラフの作図

グラフ G の節点の集合を γ 個の部分に分割し，同一の部分の中の節点が隣接していないようにできる γ の最小値を G の**節点彩色数**あるいは単に**彩色数** (chromatic number) と称し，$\gamma(G)$ と記す．これは隣接節点が異なる色で塗られるように節点を色分けする際に必要な色の最小数と解釈される．「平面グラフの彩色数は4である」ことが昔から予想されているが，未だに説得力のある証明は与えられていないし，また反例も発見されていない．

定義から明らかなように，任意のグラフの彩色数はクリーク数より小さくない．特に彩色数とクリーク数が等しいようなグラフのクラスとして興味深い概念が導入されており[23)]，最近は応用上最も注目されている（後述）．長さ4以上の閉路において連続していない二つの節点の対を結ぶ枝をこの閉路の**弦** (chord) という．任意の長さ4以上の閉路が少なくとも一つの弦を含むようなグラフを**三角化グラフ** (triangulated graph) という．これに関して次の事実が知られている．

〔**定理 2.7**〕 三角化グラフの彩色数とクリーク数は等しい．

グラフ G の節点の集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ と実直線上の区間の集合 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ の間に一対一対応が存在して，任意の2節点 v_i, v_j を両端点とする枝が存在するとき，しかもそのときに限り，$I_i \cap I_j \neq \phi$ という性質を持つならば，G は**区間グラフ** (interval graph) と呼ばれる．例えば図-15(a)のグラフは同図(b)の区間の集合に対応するので，区間グラフである．弦を持たない長さ4の閉路を持つグラフは区間の集合に対応させることはできない．よって次の定理を得る．

〔**定理 2.8**〕 区間グラフは三角化グラフである．

ただし，この定理の逆は成立しない．例えば図-16のグラフは三角化グラフであるが，区間グラフではな

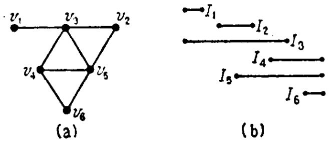


図-15 区間グラフ(a)と対応する区間の集合(b)

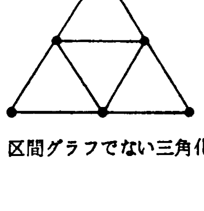


図-16 区間グラフでない三角化グラフ

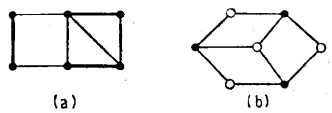


図-17 最小枝被覆（a）と最小節点被覆（b）

いことが容易に確かめられる．

2.7 被覆とマッチング

グラフ $G=(V, E)$ の枝の部分集合 $F \subseteq E$ において，各々の節点が F のどれかの枝の端点となるとき，F を G の**枝被覆** (branch cover) という．特に $|F|$ を最小にするものを**最小枝被覆**という．例えば図-17（a）のグラフにおける太線の枝の集合は最小枝覆である．一方節点の部分集合 $W \subseteq V$ において，各々の枝が少なくとも一つの W の節点に接続しているとき，W を G の**節点被覆** (node cover) という．特に $|W|$ を最小にするものを**最小節点被覆**という．例えば図-17（b）のグラフにおける●印の節点の集合は最小節点被覆である．また○印の節点の集合は被覆であるが，最小ではない．

グラフ $G=(V, E)$ の節点の集合 V を適当に二つの部分 V_1, V_2 に分割 ($V_1 \cap V_2=\phi, V_1 \cup V_2=V$) したとき，すべての枝 $e \in E$ の端点の一方が V_1 に他方が V_2 に属する，という性質を持つグラフを**2部グラフ** (bipartite graph) という，図-13（b）のグラフはその一例である．

2部グラフの枝の部分集合 $F \subseteq E$ において，F のどの二つの枝も共通端点を持たないとき，F を G の**マッチング**という．マッチング $F \subseteq E$ の中で $|F|$ が最大となるものを**最大マッチング**，すべての節点が F のどれかの枝の端点であるものを**完全マッチング**という．$F \subseteq E$ がマッチングなら

$$|F| \leqq \min \{|V_1|, |V_2|\} \tag{2.7}$$

である．また G が完全マッチングを持つなら，それは最大マッチングであり，かつ $|V_1|=|V_2|$ でなければならない．図-18 のグラフの太線の枝の集合は完全マッチングの例である．

最大マッチングと最小節点被覆の間には次のような重要な関係 (**König-Egerváry の定理**) がある．

〔**定理 2.9**〕 2部グラフの最大マッチングの大きさ（枝の数）は最小節点被覆の大きさ（節点の数）に等しい．

完全マッチングが存在するための条件としては，次に掲げる **Hall の定理**が基本的に重要である．

〔**定理 2.10**〕 2部グラフ $G=(V_1 \subset V_2, E)$；$E \subseteq V_1 \times V_2$ において，V_1 のどの節点も $F \subseteq E$ のどれかの枝の端点になっているようなマッチング F が存在するための必要十分条件は，任意の $V_1' \subseteq V$ に対して

$$|\Gamma(V_1')| \geqq |V_1'| \tag{2.8}$$

が成立することである．ここで $\Gamma(V_1') \subseteq V_2$ は V_1' の節点に隣接している節点の集合を表わす．（特に，$|V_1|=|V_2|$ とおけば，完全マッチングが存在するための必要十分条件となる）

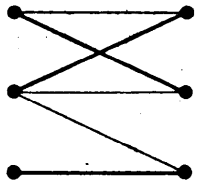


図-18 2部グラフの完全（最大）マッチング

定理 2.9 および **2.10** は4節で述べる最大フローの理論を用いると容易に証明できる[5]．

2.8 グラフ理論における双対性

グラフ理論には，定義や定理などいろいろな“文章”が現われる．そこで，理論とはそのような文章の集りであるとみなそう．それらの文章全体をよくみると，次のような現象がひん繁におこることが認められるであろう．ある文章をとり上げて，その中にグラフ特有の術語で表-1に含まれているものが現われるごとに，それを表-1で対にされているもう一つの術語で置き代えることによって作られる文章が他の場所にも見い出される．このような現象をグラフ理論における**双対性** (duality) という[24]．但し，“カットセット”と対になる術語は“タイセット”であるが，“単純なカットセット”に限定しても一般性を失わない文章に対しては，“タイセット”を“閉路”に置き代えても差しつかえないものとする．

たとえば，“木の枝の数は階数に等しい”という文章は“補木の枝の数は零度に等しい”という文章と双対対応をしている．また，“木の補集合は補木である”という文章は自分自身に双対的に対応する．このように双対対応が存在する文章は“枝”にだけ関係し，“節

表-1 概念の双対対応

枝	⟷	枝
カットセット	⟷	タイセット（閉路）
木	⟷	補木
（グラフの）階数	⟷	（グラフの）零度
並列	⟷	直列
開放除去	⟷	短絡除去

点”には関係しないものばかりである.

3節ではグラフの代数的構造に関する議論を展開するが，上記の意味での双対性が背景になっていることを念頭においてほしい.

参 考 文 献

1) Sesku, S. and Reed, M.: Linear Graph and Electrical Networks, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1961).
2) Ore, O.: Theory of Graphs, Colloquium Publications **38**, American Mathematical Society, Providence (1962).
3) Berge, C.: The Theory of Graphs and Its Applications (trans. by A. Doig), Methuen, London (1962).
4) Kim, W. and Chen, R.: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia Univ. Press, New York (1962).
5) Ford, L. and Fulkerson, D.: Flows in Networks, Princeton Univ. Press, Princeton (1962).
6) Busacker, R. and Saaty, T.: Finite Graphs and Networks —An Introduction with Applications, McGraw- Hill, New York (1965).
7) Harary, F.: Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
8) Iri, M.: Network Flow, Transportation and Scheduling—Theory and Algorithms, Academic Press, New York (1969).
9) Hu, T.: Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, Reading, Mass, (1969).
10) Frank, H. and Frish, I.: Communication, Transmission and Transportation Networks, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
11) 尾崎 弘，白川 功：グラフとネットワークの理論，コロナ社 (1973).
12) 服部嘉雄，小澤孝夫：グラフ理論解説，昭晃堂 (1974).
13) Deo, N.: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1974).
14) 尾崎 弘，白川 功，翁長健治：グラフ理論，コロナ社 (1975).
15) 前田 渡，伊東正安：現代グラフ理論の基礎，オーム社 (1978).
16) Duffin, R.: Topology of Series-Parallel Networks, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 10, p. 303 (1965).
17) Whitney, H.: 2-isomorphic Graphs, Am. J. Math., Vol. 55, p. 245 (1933).
18) Kuratowski, C.: Sur le Problème des Courbes Gauches en Topologie, Fund. Math., Vol. 15, p. 271 (1930).
19) Whitney, H.: Planar Graphs, ibid., Vol. 21, p. 73 (1933).
20) MacLane, S.: A Structual Characterization of Planar Combinatorial Graphs, Duke Math. J., Vol. 3, p. 340 (1937).
21) Tutte, W.: Matroids and Graphs, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 90, p. 527 (1961).
22) Harary, F. and Tutte, W.: A Dual Form of Kuratowski's Theorem, Canadian Math. Bull., Vol. 8, p. 17 (1965).
23) Harary, F. Ed.: Graph Theory and Theoretical Physics, pp. 155-166, Academic Press, New York (1967).
24) Iri, M.: Metatheoretical Considerations on Duality, RAAG Research Notes, 3rd Series, No. 124 (1968).

(昭和54年6月11日受付)