Vol.2010-MPS-77 No.5
2010/3/4

# 極値独立変換と独立極値分布の畳み込みによる多変量 VaR 推定

小 西 宗 樹[†1]　藤 本 康 孝[†1]

極値理論を用いた金融の市場リスク指標 Value at Risk(VaR) の推定法は単変量モデルに基づくものが多い．しかし金融のリスク管理においてはリスクファクターの相互の依存を適切に考慮することが望ましく，そのために VaR 推定は多変量モデルに基づく必要がある．そこで本研究は極値独立変換法と極値分布の畳み込みを用いた多変量モデルに基づく VaR 推定法を提案する．また実際の収益率データを用いてその有効性を検証した結果を示す．

# Estimation of Multivariate VaR by Using Independent Transformation and Convolution of Independent Extreme Value Distributions.

Muneki Konishi[†1] and Yasutaka Fujimoto[†1]

Value at Risk(VaR) is a market risk in finance, and most of methods estimating VaR based on Extreme Value Theory(EVT) adopt univariate models. But in financial risk management, VaR has been expected to consider mutual dependence of risk-factors. It is expected that VaR is estimated by using multivariate models. Then we propose estimation of multivariate VaR based on EVT by using independent transformation and convolution of independent distributions on extreme value. This paper presents numerical results that verify the effectiveness of proposed method.

†1 横浜国立大学
Yokohama National University

## 1. はじめに

Value-at-Risk(VaR) は現在の金融市場において最も広く利用されているリスク指標である．VaR とはある一定の確率で起こりうる将来の損失額の最大値を意味する．この VaR を正確に推定することは市場リスク分析の研究における大きな課題のひとつである．

従来の VaR 推定法には収益率分布を正規分布で近似することで導出するデルタ法などのパラメトリックな手法と，過去のヒストリカルデータから直接推定するヒストリカル法や，乱数シミュレーションを用いるモンテカルロ法などのノンパラメトリックな手法が存在する．パラメトリックな手法については，実際の収益率分布が fat-tail や歪度を有しているために正規分布近似による VaR 推定値は過小評価されている可能性が高い[1)2)]．またノンパラメトリックな手法であるモンテカルロ法は計算コストが大きく，ヒストリカル法は実務において使用を避けられることが多いといわれている[3)]．そこで近年，裾野分布をモデル化する極値理論 (EVT) による VaR 推定法に注目が集まっている．

極値とは確率変数の中で中心から大きく外れたもので，EVT はその振る舞いに関する理論である．EVT による VaR 推定の研究は広く行われており有用性が実証されている[1)]．ある金融資産の価格変動が他の金融資産の価格に影響することはよくあることで，その依存関係を考慮するために多変量モデルによる推定が望ましい．しかし従来の EVT に基づく VaR 推定法は 2 変量に関する議論はあるが[4)5)]，一般に EVT によるリスク推定の多変量化は数学的に複雑になるので極めて限定的であるとされ[1)] あまり研究されていない．そこで本研究は効果的な多変量化手法として，極値独立変換と独立な極値分布の畳み込みによる VaR 推定法を提案する．

## 2. VaR の定義と EVT による VaR 推定

金融商品の価格変動で損失を被るリスクである市場リスクを一貫的に数値化したものが VaR である．VaR は数値化により投資戦略のリスクの大小を比較できるだけでなく，投資戦略を実行するために必要な備えを具体的に示すものである．その推定法の中で EVT に基づく手法はそれほど大きくない計算負荷と高い推定精度を有する優れた手法である[6)]．ここでは VaR の一般的な定義と EVT に基づく従来の単変量推定法について説明する．

### 2.1 VaR の定義

VaR は金融資産の収益率分布の下位 $q \times 100\%$ と上位 $(1-q) \times 100\%$ の分位点のことである．なおこの $(1-q) \times 100\%$ を信頼水準，$q$ を損失確率と呼ぶ．VaR は収益率分布から



© 2010 Information Processing Society of Japan

直接導出するために収益率分布の推定が非常に重要になる．

### 2.2 EVT に基づく単変量 VaR

極値とは分布の中心から大きく外れた確率変数のことで，一般的には十分大きい閾値を超過するもののことを言う．またここでは収益率分布のうち，極値が従う箇所を裾野と呼ぶ．EVT はこの極値の振る舞いに関する理論であり，つまりは裾野のモデリング手法である．

EVT によれば裾野の分布は一般化パレート分布 (GPD) に収束する．GPD の確率密度関数は次式で表される．

$$g(x;\sigma,k) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{kx}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{k}-1}, & \text{if} : k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma}), & \text{if} : k = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\sigma$ はスケールパラメータで正の値となる．また $k$ はシェイプパラメータと呼ばれる裾野の形状を決定するパラメータである．一般パレート分布は $k$ の値が大きいほど裾は厚く，つまり 0 への収束が遅くなる．$x$ の範囲は $k<0$ の時 $0 \leq x < -k/\sigma$ で，$k \geq 0$ の時 $0 \leq x < \infty$ である．

単変量 EVT による VaR 推定は全サンプル数を $N$，裾野に属するサンプルの数を $N_e$ とすると GPD に基づくある確率変数と $Y$ 以下の収益が発生する確率 $q$ は閾値と $Y$ の距離 $X$ に対して

$$q = \frac{N_e}{N}\int_{-\infty}^{X} g(x;\sigma,k)dx = \frac{N_e}{N}\left(1+\frac{kX}{\sigma}\right)^{-1/k} \tag{2}$$

となり，これを $X$ について解いて閾値 $u$ を加えたものが信頼水準 $(1-q)\times 100\%$ の VaR となる[7]．

$$\mathrm{VaR} = -\frac{\sigma}{k}\left[1-\left(\frac{qN}{N_e}\right)^{-k}\right]+u \tag{3}$$

なお具体的な式 (1) のパラメータ推定法についてはエントロピー最大化による手法を用いた[9]．$k \neq 0$ の時，一般パレート分布のパラメータ $\sigma$, $k$ の最大エントロピー法による推定値 $\tilde{\sigma}$, $\tilde{k}$ は次式を満たす．

$$\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\ln(1+\frac{\tilde{k}x_i}{\tilde{\sigma}}) = \tilde{k} \tag{4}$$

$$\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{1+\tilde{k}x_i/\tilde{\sigma}} = \frac{1}{1+\tilde{k}} \tag{5}$$

ここで $\tilde{\xi} = \tilde{k}/\tilde{\sigma}$ とおくと式 (4)，式 (5) は次式となる．

$$\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\ln(1+\tilde{\xi}x_i) = \tilde{k} \tag{6}$$

$$\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{1+\tilde{\xi}x_i} = \frac{1}{1+\tilde{k}} \tag{7}$$

式 (6) を式 (7) に代入すると

$$\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{1+\tilde{\xi}x_i} = \frac{1}{1+\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\ln(1+\tilde{\xi}x_i)} \tag{8}$$

を得る．ここで

$$d := \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{1+\tilde{\xi}x_i} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_e}\ln(1+\tilde{\xi}x_i)} \tag{9}$$

とする．ある十分小さな $\epsilon$ に対し $|d|<\epsilon$ を満たす $\tilde{\xi}$ を求め，この $\tilde{\xi}$ を式 (6) に代入して $\tilde{k}$ を得る．ただし閾値 $\tilde{u}$ については参考文献 8) に従い正規分布の 5%点とした．

## 3. 提案手法による多変量 VaR 推定

リスク管理においては金融資産同士の相互依存を考慮することが望ましい．しかし EVT によるリスク測定手法の多変量化は数学的に複雑なるといわれており効果的な手法が存在しない[1]．そこで本論文は極値独立変換と独立分布の畳み込みにより多変量化を実現した．ここではその手法について説明する．

### 3.1 提案手法概要

本研究の目的は EVT による VaR 推定の多変量化である．多変量化においてはブラインドな各要因の相互の依存構造をいかに複雑にせずに精度よくモデリングしていくか，つまり効率のよい依存構造モデリングが重要になる．特にそれが式 (1) の GPD に適用可能どうかに留意しなけらばならない．

そこで本研究は独立成分分析 (ICA) に代表される独立変換の適用を検討した．ここでの独立変換はある複数の時系列が共通の相互に独立な系列群または確率変数群の加重平均で表され，時系列ごとにその混合割合が異なるという仮定のもと，その独立な系列と混合割合を求める手法である[10]．独立変換によって金融資産の収益率時系列が独立な系列な線形和


© 2010 Information Processing Society of Japan

で表せれば，独立な系列には単変量分布を適用すればよく，収益率系列はその畳み込みで表現できる．つまり本提案手法は独立変換による線形混合と単変量分布の畳み込みにより相互依存構造を表現する．ただし ICA を含む従来の独立変換手法は尖り度や微分エントロピーなど分布の中心付近に焦点をあてたものが多く[10)11)]，極値を重視する VaR 推定には不向きである．

そこで本研究では極値に焦点をあてた独立変換手法を構築して適用する．そして独立変換された極値に単変量極値分布を適用して，その畳み込みから収益率の VaR を推定する．

### 3.2 独立変換における想定モデル

ICA に代表される独立変換は一般にすべての時系列は共通の独立成分系列群の線形混合で構成され，その混合割合が異なるという仮定をおいており，本研究の極値独立変換も同様の仮定をおく．この仮定から想定モデルは次式で表される．

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1M}s_M \\ x_2 &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2M}s_M \\ &\vdots \\ x_M &= a_{M1}s_1 + a_{M2}s_2 + \ldots + a_{MM}s_M \end{aligned}$$

ここで $x_i$ は観測値，$s_i$ は独立成分であり $\{a_{ij}|i,j=1,\cdots,M\}$ は実数の定数である．この式は $M$ 個の観測値 $\{x_1,\cdots,x_M\}$ が $M$ 個の独立成分 $\{s_1,\cdots,s_M\}$ の線型結合で表されることを意味する．また $s_j$ と $a_{ij}$ は直接観測不可能であり，観測値 $x_i$ からこの両方を推定する必要がある．一般にはベクトル表記で

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} \tag{10}$$

と表される．

### 3.3 独立変換の前処理としての白色化

ICA など従来の独立変換は白色化を事前に適用しており，本提案手法においても適用する．白色化の適用によって相関や共分散を考慮する必要がなくなるので極値独立変換においても推定すべきパラメータは回転角度のみになる．

白色化の目的は観測値系列群を相互に無相関でそれぞれの分散が 1 になるように変換することである．具体的にはサンプル系列群 $\boldsymbol{x}$ の線形混合

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \tag{11}$$

が白色となるような $\boldsymbol{V}$ を求めることである．白色化の手法はいくつかあるが，$\boldsymbol{x}$ の分散共分散行列 $\mathrm{C}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}$ の固有ベクトルを列にもつ正規直交行列を $\boldsymbol{E}$，$\mathrm{C}_{\boldsymbol{x}}$ の固有値からなる対角行列を $\boldsymbol{D}$ とし，白色化行列 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{C}_{\boldsymbol{x}}^{-1/2} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{E}^T \tag{12}$$

とすると，$\boldsymbol{z}$ の分散共分散行列は

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T\} = \boldsymbol{V}\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}\boldsymbol{V}^T = \mathrm{C}_{\boldsymbol{x}}^{-1/2}\mathrm{C}_{\boldsymbol{x}}(\mathrm{C}_{\boldsymbol{x}}^{-1/2})^T = \boldsymbol{I} \tag{13}$$

となり白色化が達成される．

### 3.4 極値独立変換

EVT によれば極値は式 (1) の GPD に従う．また独立な確率変数の和の分布はそれぞれの分布の畳み込みになる．このことからある線型混合された系列の和が GPD の畳み込みの尤度を最大にするとき，その系列は独立でその線型混合が独立変換となる．ただし GPD は畳み込みがシンボリックに求まらないので本研究ではシェイプパラメータ $k$ を 0 に拘束したした GPD，つまり指数分布

$$g(x;\sigma) = \exp(-x/\sigma)/\sigma \tag{14}$$

で近似した．ここで $\sigma$ は極値系列の標準偏差である．

参考文献 11) によればすべての確率変数の対の組合せにおいて対の確率変数どうしが独立であるとき，すべての確率変数は独立である．この考えを用いると全体の変換は二次元変換の組合せでよく，事前に直交化ないし白色化を適用していれば最大化する尤度関数はそれぞれ単一のパラメータによって規定される，つまり各確率変数対において回転角度もしくはそれに準ずるパラメータを一つ求めればよいことになる．あとはサンプル系列の数 $M$ に対して，対の数と同数の $M(M-1)/2$ 個のパラメータを推定する作業を収束するまで繰り返せばよい．そのため以降は基本的に 2 変量の独立化について考えればよい．

白色化を適用した系列 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を独立化するには回転行列

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

を用いると回転角度 $\theta$ を求めるだけでよい．また $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の分散は 1 なので式 (15) により変換された系列 $\boldsymbol{x}' = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}' = -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}$ の分散は常に 1 となる．分散は常に 1 のとき指数分布の畳み込みは Erlang 分布

$$f(z;\sigma) = \int_0^z g(x)g(z-x)dx = \frac{z\exp(-z/\sigma)}{\sigma^2} \tag{16}$$


© 2010 Information Processing Society of Japan

Vol.2010-MPS-77 No.5
2010/3/4

で表され，$\sigma = 1$ の指数分布に従う確率変数 $x_i$，$y_i$ の和 $z_i = x_i +_i y$ が従う分布となる．系列 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を白色化された極値系列とすると，和 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$ に対する対数尤度関数 $l(\theta)$ は

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \log f(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \log\bigl(z_i \exp(-z_i)\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log z_i + \sum_{i=1}^{n} \log \exp(-z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log\bigl(a(\theta)x_i + b(\theta)y_i\bigr) - N_e a(\theta)\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\} - N_e b(\theta)\mathrm{E}\{\boldsymbol{y}\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{where :}\ a(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$
$$b(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$$

となり，これを最大にする $\theta$ を求めればよい．式 (17) を最大化する $\theta$ を黄金分割法により求めた．求めた $\theta$ と式 (15) の回転行列によって $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を変換した系列 $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}'$ が独立極値となる．

### 3.5 独立極値分布の畳み込みと VaR 推定

ある時系列が独立な系列の和で表されるとき，その時系列が従う分布は独立な系列が従う分布の畳み込みになる．極値独立変換により独立化された極値が極値分布に従うとき収益率極値分布はその畳み込み分布に従う．極値独立変換と同様 GPD がシンボリックに畳み込めないので指数分布で近似する．ただし極値独立変換と異なり，式 (10) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ を用いた線型混合

$$\boldsymbol{x_i} = a_{i1}\boldsymbol{s_1} + a_{i2}\boldsymbol{s_2} + \ldots + a_{ij}\boldsymbol{s_j} + \ldots + a_{iM}\boldsymbol{s_M}$$

の畳み込みを行うので分散は 1 ではなく，畳み込みは Erlang 分布にはならない．パラメータ $\sigma_{ij} = \mathrm{sd}\{a_{ij}\boldsymbol{s}_j\}$ の異なる 2 つの指数分布の確率密度関数の畳み込みは

$$\begin{aligned} (g_{i1} * g_{i2})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{i1}(x')g_{i2}(x-x')dx' \\ &= \frac{1}{\sigma_{i1}\sigma_{i2}} \int_0^x \exp(-\frac{x'}{\sigma_{i1}})\exp(-\frac{x-x'}{\sigma_{i2}})dx' \\ &= \frac{\exp(-\frac{x}{\sigma_{i1}}) - \exp(-\frac{x}{\sigma_{i2}})}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} g_{i1}(x) - \frac{\sigma_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} g_{i2}(x) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{where :}\ g_{ij}(x) = \exp(-x/\sigma_{ij})/\sigma_{ij}$$

であり 3 次以降も同様に再帰的に求めることができる．指数分布の分布関数 $G_{ij}(x)$

$$G_{ij}(x) = \int_0^x g_{ij}(x)dx = 1 - \exp(-x/\sigma_{ij}) \tag{19}$$

を用いると 2 つの独立な指数分布に従う系列の和が従う確率分布関数 $G_{i(1,2)}(x)$ は

$$\begin{aligned} G_{i(1,2)}(x) &= \int_0^x (g_{i1} * g_{i2})(x)dx \\ &= \frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} \int_0^x g_{i1}(x)dx - \frac{\sigma_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} \int_0^x g_{i2}(x)dx \\ &= \frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} G_{i1}(x) - \frac{\sigma_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} G_{i2}(x) \end{aligned} \tag{20}$$

となり，$M$ 次の確率分布関数 $G_{i(1,2,\cdots,M)}(x)$ は $(g_{i1} * g_{i2} * \cdots * g_{iM})(x)$ と式 (19) から求まる．よって収益率 $\boldsymbol{y}_i$ に対する信頼水準が $(1-q) \times 100\%$ の単一資産 $\mathrm{VaR}_i$ は

$$\mathrm{VaR}_i = G^{-1}_{i(1,2,\cdots,M)}\left(1 - \frac{N}{N_e}q\right) + u_i \tag{21}$$

となる．ここで $u_i$ は閾値，$N$ は全サンプル数で $N_e$ は極値のサンプル数である．なお閾値 $u_i$ は単変量 EVT と同様に正規分布の 5%点とした．

また，多資産 $\mathrm{VaR}^M$ の導出は

$$\sigma_j = \mathrm{sd}\left\{\left(\sum_i^M a_{ij}\right)\boldsymbol{s}_j\right\} \tag{22}$$

とし，$u_i$ を正規分布の 5%点とした場合は閾値 $u$ を

$$u = \sqrt{\sum_i^M u_i^2 + 2\sum_i^M \sum_j^i \gamma_{ij}u_i u_j} \tag{23}$$

とすることで

$$\mathrm{VaR}^M = G^{-1}_{(1,2,\cdots,M)}\left(1 - \frac{N}{N_e}q\right) + u \tag{24}$$

より求まる．ただし $\gamma_{ij}$ は収益率 $y_i$，$y_j$ の相関係数である．

### 3.6 提案手法による VaR 推定アルゴリズム

以上より提案手法による VaR 推定の流れは以下のようになる．

**(a)** サンプル系列数 $M$，各サンプル数 $N$ のサンプル $\boldsymbol{y}$ に対し，各サンプル系列 $\boldsymbol{y}_i$ において正規分布近似した際の 5%点を閾値 $u_i$ とし，閾値以下のサンプルと閾値との距離を極値として極値系列 $\boldsymbol{x}_i$ を定める．また極値系列サンプル数を $N_e$ とする．



© 2010 Information Processing Society of Japan

**(b)** 極値独立変換を極値系列に適用する．

**(b-1)** 極値系列に白色化 $\boldsymbol{Vx}$ を適用し，相互に無相関でそれぞれ分散が 1 になる系列 $\boldsymbol{z}$ に変換する．また式 (10) における係数行列 $\boldsymbol{A}$ の初期値を $\boldsymbol{V}$ とする．

**(b-2)** 全サンプル系列数が $m$ のとき，$i \leq m$，$j < i$ を満たす $(i,j)$ の $m(m-1)/2$ 個の組合せ全てに対し掃き出していく．

（1） $\boldsymbol{A}$ の $(j,j)$，$(j,i)$，$(i,j)$，$(i,i)$ の要素を並べた正方行列を $\boldsymbol{A}_{ij}$ とする．

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{jj} & a_{ji} \\ a_{ij} & a_{ii} \end{bmatrix}$$

（2） $i$，$j$ 番目の極値系列 $\boldsymbol{z}_i$，$\boldsymbol{z}_j$ を並べた行列を $\boldsymbol{z}_{ij} = [\boldsymbol{z}_j,\ \boldsymbol{z}_i]^T$ とし，$\boldsymbol{z}_{ij}$ に対して式 (17) を最大化する $\theta$ を，例えば黄金分割法などで求める．

（3） 回転行列 $\boldsymbol{Q}$ を用いて $\boldsymbol{A}_{ij} := \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{Q}$ に更新する．

（4） $\boldsymbol{z}_{ij} := \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_{ij}$ に更新する．

以上の手順を収束するまで繰り返す．

**(c)** 単資産の場合は式 (21)，多資産の場合は式 (24) を用いて VaR を導出する．

## 4. 有効性の検証法と検証結果

提案モデルの有効性をバックテストにより検証する．バックテストとはモデルで計測したリスク量の妥当性を事後的に検証する方法である[6]．望ましい VaR の第一条件は正確な確率点に基づいていることである．今回はバックテストのために信頼水準 99% の VaR を求めたが，統計的にこれはは 99%と 1%のブレークポイントであるので理想上では観測期間のうち 99%が VaR 以上で 1%が VaR を下回ることが望ましい．以下に具体的なバックテスト内容と検証結果を示す．

### 4.1 単一資産 VaR に対する両側二項検定に基づくバックテスト

前述のとおり理想上では観測期間のうち 99%が VaR 以上で 1%が VaR を下回り，例えば検証期間を 1000 日としたとき信頼水準 99%の理想 VaR は内 990 日が VaR 以上で残り 10 日が VaR を下回るとことが尤もらしい．実務上においてもこの下回る比率が損失確率に一致することが望ましいとされている[12]．統計的に信頼水準 99%の理想 VaR を 1000 日中何日下回ることがあり得るかは二項分布

$$_{1000}\mathrm{C}_n (0.01)^n (0.99)^{1000-n} \tag{25}$$

で求めることができる．バックテストにおいてはこの式 (25) の有意確率を 99%分位点，すなわち VaR の尤もらしさと考えられる．そのためバイオレーション数を求めて式 (25) に基づく有意確率を比較することで VaR の精度を比較することが出来きる．検証は以下の 3 つの条件に対して行った．

**表 1** バイオレーション数と有意確率: 単一資産 VaR
Table 1 Violation time and p-value: Single asset VaR.

| | 正規分布近似 | 単変量 EVT | 提案手法 |
|---|---|---|---|
| TOPIX | 13 回 (7.3%) | 13 回 (7.3%) | 12 回 (9.5%) |
| JASDAQ | 20 回 (1.8%) | 20 回 (1.8%) | 12 回 (9.5%) |
| USD-JPY | 21 回 (0.0%) | 16 回 (2.1%) | 7 回 (9.0%) |
| EUR-JPY | 21 回 (0.0%) | 14 回 (5.2%) | 8 回 (11.3%) |
| GBP-JPY | 27 回 (0.0%) | 16 回 (2.1%) | 8 回 (11.3%) |
| AUD-JPY | 21 回 (0.0%) | 16 回 (2.1%) | 9 回 (12.6%) |
| DOW | 17 回 (1.3%) | 10 回 (12.6%) | 6 回 (6.3%) |
| FTSE100 | 27 回 (0.0%) | 21 回 (0.0%) | 11 回 (11.4%) |
| DAX | 25 回 (0.0%) | 14 回 (5.2%) | 6 回 (6.3%) |
| CAC40 | 23 回 (0.0%) | 13 回 (7.3%) | 6 回 (6.3%) |
| 全体平均 | 22 回 (0.0%) | 15 回 (3.5%) | 9 回 (12.6%) |
| 標準偏差 | 4.35 | 3.30 | 2.42 |

**国内市場** 検証する市場は国内の TOPIX，JASDAQ で検証期間は 2003 年 9 月 3 日から 2007 年 12 月 10 日までの 1000 日間として，求める VaR は信頼水準 99%で保有期間は 1 日，観測期間はその直近 1000 日とする．また対立手法は正規分布近似，単変量 EVT とする．なお提案手法はすべての市場のデータからそれぞれの市場の VaR を求めている．

**外国為替** 同様の方法で検証する市場を米ドル-円為替，ユーロ-円為替，英ポンド-円為替，豪ドル-円為替に変え，検証期間を 2004 年 6 月 17 日から 2008 年 7 月 14 日として検証した．

**国際市場** 同様の方法で検証する市場を海外のダウ平均株価 (DOW)，イギリス FTSE100 種総合株価，ドイツ株価指数 (DAX)，フランス CAC40 に変え，検証期間は 2000 年 1 月 13 日から 2004 年 1 月 7 日までの 1000 日間として検証を行った．ただし欠損日については線型補間されている．

それぞれのバイオレーション数および有意確率は表 1 のようになった．

表 1 より提案手法は全体を通して有意確率が高い水準にあり，全体の平均バイオレーション数も 9 回で標準偏差も 2.42 と最も小さく，安定して高い統計的精度をもつことがわかる．従来の単変量 EVT による VaR はリスクをやや過小評価しがちであり，特に JASDAQ や



© 2010 Information Processing Society of Japan

**表 2** バイオレーション数と有意確率: 多資産 VaR
Table 2 Violation time and p-value: Multiple assets VaR.

| | 正規分布近似 | 提案手法 |
|---|---|---|
| 国内市場 | 17 回 (1.3%) | 10 回 (12.6%) |
| 外国為替 | 30 回 (0.0%) | 8 回 (11.3%) |
| 外国市場 | 30 回 (0.0%) | 7 回 (9.0%) |

FTSE100 においてバイオレーション数過多となっており信頼性に欠ける可能性がある．また正規分布近似による手法は全体を通して明らかにリスクを過小評価している．

### 4.2 多資産 VaR に対する両側二項検定に基づくバックテスト

4.1 項の各条件内で，それぞれの金融資産に 1 単位ずつ投資した際の全体 VaR を提案手法および正規分布近似により導出し，比較検討した．なお正規分布近似による多資産 $\mathrm{VaR}^M$ は単一資産 $\mathrm{VaR}_i$ から

$$\mathrm{VaR}^M = \sqrt{\sum_i^M \mathrm{VaR}_i^2 + 2\sum_i^M \sum_j^i \gamma_{ij}\mathrm{VaR}_i\mathrm{VaR}_j} \tag{26}$$

として相関を考慮して導出した[3)]．導出した信頼水準 99%の VaR のバイオレーション数および有意確率は表 2 のようになった．

表 2 より正規分布近似による手法はバイオレーション数が非常に多く，リスクを過小評価していることが分かる．それに対して提案手法による VaR は統計精度が優れていることが分かる．

### 4.3 考　　察

単一資産に対する VaR の検証の結果，信頼性や統計的精度という点で提案手法が単変量 EVT による手法に勝る結果となったといえる．また単変量 EVT による手法は多資産 VaR を導出する理論的な手法が存在しないが，提案手法は単一資産 VaR と同様に導出でき，導出した VaR は推定精度が優れていた．

ただし，実務上の観点において問題がある．国際決済銀行 (BIS) 規制や金融監督庁の公的規制により金融機関は VaR を開示し，それに相当する自己資産を保有することが義務付けられており，そのため導出した VaR が大きいと経営を圧迫する．一般的には有意確率 1%以上と定められており，これを提案手法と FTSE100 以外の単変量 EVT による VaR は満たしているが，今回，提案手法により導出した VaR は単変量 EVT により導出した VaR よりも全てにおいて大きくなっており，この会計上の観点からすると単変量 EVT による VaR の方が望ましいとも判断できる．ただしあくまで会計上の都合であり投資戦略の検討とは異なる目的の議論である[3)]．

一方でバイオレーション数が少ない方がよしとする保守性の原則も存在しており，参考文献[12)] は統計精度を第一としていること，多資産 VaR の導出が可能であることなどから一般的には提案手法は正規近似や単変量 EVT よりも優れた手法であると判断できる．

## 5. 結　　論

本稿は新しい市場リスク指標 VaR の推定法として従来の単変量 EVT に基づく手法を多変量に拡張する，極値独立変換と独立極値分布の畳み込みによる VaR 推定法を提案した．

実際の収益率データを用いて提案法と単変量 EVT による従来法，正規分布近似による推定法とを単一資産の信頼水準 99%の VaR を導出して比較した結果，単変量 EVT による手法によって導出した VaR はリスクを過小評価することがあり信頼性に欠けることがわかった．それに対して提案手法はリスクを過小評価することもなく優れた統計精度を有しており，リスク指標として高い信頼性を持つことがわかった．会計上の観点からは単変量 EVT の方が望ましいと判断できることもあるが，信頼性や統計精度を重視する投資戦略を目的とした場合や多資産 VaR を導出する場合には本提案手法がより優れた手法と判断できる．

## 参 考 文 献

1) ジョン ダニエルソン, 森本祐司: 市場リスクの予測について–EVT と GARCH モデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析, 金融研究, vol.19 別冊, no.2, pp1-27, 日本銀行金融研究所 (2000).
2) W. D. Read, Goldman Sachs & Co.(著), 藤井健司 (訳): 総解説・金融リスクマネジメント, 日本経済新聞社 (1999).
3) 山下智志: 市場リスクの計量化と VaR, 朝倉書店 (2006).
4) S-H. Poon, M. Rockinger, J. Tawn: Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications, *Rev. Financial Studies*, vol.17, no.2, pp.581-610 (2004).
5) 山井康浩, 吉羽要直: 市場ストレス時におけるバリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較: 多変量極値分布のもとでの比較分析, 金融研究, vol.21, 別冊 no.2, 日本銀行金融研究所 (2002).
6) 藤原賢一, 小西宗樹, 藤本康孝: ウェーブレット解析を用いた EVT とトレンドによる VaR 推定, 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J91-A, no.12, pp.1190-1202 (2008).
7) S. N. Neftci: Value at Risk calculations, extreme eents, and tail estimation, *J. Derivatives*, vol.7, no.3, pp.23-37 (2000).


© 2010 Information Processing Society of Japan

8) C.Brooks, A.D.Clare, J.W.D. Molle and G.Persand: A comparison of extreme value theory approaches for determining value at risk, *J. Empirical Finance*, vol.12, pp.339-352 (2005).
9) 河村敏彦, 岩瀬晃盛: 一般化パレート分布の最大エントロピー法による特徴付けに基づく推定量の構成, 統計数理, vol.52, no.1, pp.89-92 (2004).
10) A. Hyvärinen, J. Karhunen, E. Oja(著), 根本 幾, 川勝真喜 (訳): 詳解 独立成分分析 信号解析の新しい世界, 東京電機大学出版局 (2005)
11) P. Comon: Independent component analysis, A new concept?, *Signal Processing*, vol.36, pp.287-314 (1994).
12) 安藤美孝: ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測, 金融研究, vol.23 別冊, no.2, pp1-39, 日本銀行金融研究所 (nov.2004).



© 2010 Information Processing Society of Japan