情報処理学会論文誌　Vol. 50　No. 8　1926–1928 (Aug. 2009)

テクニカルノート

合意形成のための交渉回数に関する一考察

塩　村　　尊[†1]

本稿の目的は適応型合意形成モデルが不動点へと指数関数的に収束することを示すとともに，合意に達したと判断できるまでに必要とされる交渉回数には 1 つの上界が存在することを証明することにある．この上界値は許容誤差，初期選好インデックス，エージェント数，そして適応係数最小値に依存していることが示されるが，この事実から特に，同じ初期条件から交渉が始まるとき，従順な集団が頑固な集団よりも多くの交渉を経て合意に至ることはないことが主張される．このことは間接的な表現ながらも，従順な集団は頑固な集団よりもすばやく合意に達するというシミュレーション結果を理論的に裏付けることになる．

A Note on the Number of Negotiations Required for a Consensus

Takashi Shiomura[†1]

The purpose of the paper is, first, to show that an adaptive consensus formation model approaches its fixed point exponentially. Secondly, we show that there exists an upper bound with respect to the number of negotiations required for a consensus. The value depends on a tolerance, initial preferences, the number of agents, and the minimum value of adaptive coefficients. Owing to this fact, we can show, in particular, that a group with relatively large adaptive coefficients reaches a consensus faster than a group with small ones, and verify theoretically a result of simulations obtained previously.

†1 関西大学総合情報学部
Faculty of Informatics, Kansai University

1. はじめに

高橋ら[1),2)]が考察した集団的意思決定モデルは，個人が集団全体の選好を集約したマクロ情報を参照しつつ自己の選好を修正する場合における合意形成過程を記述するものである．塩村[3),4)]は，このモデルが形式的に DeGroot[5)]によるオピニオン・ダイナミクスと一致することを示し，合意形成条件，すなわち収束条件を与えるとともに，彼らのシミュレーション結果のいくつかについて理論的検討を行ったが，同じ初期条件の下，従順な集団は頑固な集団よりもすばやく合意に達するというシミュレーション結果に関しては理論的考察を行っていない．

本稿の目的は，上に述べた集団的意思決定モデルが指数関数的に収束することを示し，数値計算的に合意に達したと判断できるまでに必要とされる交渉回数には 1 つの上界が存在することを証明することにある．この上界値は許容誤差，エージェント数，初期選好インデックス，そして適応係数最小値に依存していることが示されるが，この事実から特に，同じ初期条件から交渉が始まるとき，従順な集団が頑固な集団よりも多くの交渉を経て合意に至ることはないことが主張される．このことは間接的な表現ながらも，先のシミュレーション結果を理論的に裏付けることになる．

2. 適応型合意形成モデル

以下の議論において $I \geq 2$，$J \geq 1$ とする．時刻 t における選択肢 j，$j = 1, 2, \ldots, J$ に関するエージェント i，$i = 1, 2, \ldots, I$ の選好インデックスを $x_{tj}^i > 0$ で表し，

$$\boldsymbol{x}_{tj}^T \equiv \left(x_{tj}^1, x_{tj}^2, \cdots, x_{tj}^I\right)$$

と定義する．ただし，これは $\sum_j x_{tj}^i \equiv 1$ となるように規準化されているものとする．ここで，選好インデックスとは当該選択肢に関するエージェントの評価値を表すものであり，その値が小さいほど選好順位が高いことを意味するものである．

エージェント i に関する適応係数（適応度）α^i に関して次の仮定 1 をおく．この適応係数は集団の意思決定に関するエージェントの従順さ，あるいは妥協の程度を表す指標であり，その値が 1 に近いほど従順である一方，ゼロに近いほど頑固であることを意味している．

仮定 1　任意の i に関して，$0 < \alpha^i < 1$，$i = 1, 2, \ldots, I$.

このとき，高橋ら[1),2)]の合意形成モデルは次の離散力学系と同値である（文献 4)，補題 1 参照）．

$$\boldsymbol{x}_{t+1j} = K\boldsymbol{x}_{tj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{1}$$

式 (1) 中の $K \equiv [k_{ij}]$ は第 i 行の第 i 要素を $1-\kappa\alpha^i$ とし，残り $I-1$ 個の行要素を α^i/I とするとする I 次正方行列である．ただし，$\kappa \equiv (I-1)/I < 1$ と定義する．

仮定 1 の下では K は正行列であり，任意の行について要素の和が 1 になる確率行列である．また，K は選択肢 j に依存していない．このため，各選択肢の選好インデックスの挙動の相違は初期選好インデックスベクトル $\boldsymbol{x}_{0j}$ の違いのみによる．それゆえ，記号の単純化のために以下では 1 つの選択肢に着目し，添字 j を省略して $x_t^i \equiv x_{tj}^i$，$\boldsymbol{x}_t \equiv \boldsymbol{x}_{tj}$ と略記する．

仮定 1 の下では K の極限行列 $\bar{K} \equiv \lim_{t\to\infty} K^t$ が存在し，その行は K の固有値，1 に関する規準化した左固有ベクトルによって与えられる．この左固有ベクトルは正ベクトルであり，したがって K とともに $\bar{K}$ もまた正行列，かつ確率行列になる（文献 3)，定理 1 参照）．このとき，力学系 (1) の不動点は $\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{K}\boldsymbol{x}_0$ として得られるが，そのすべての要素が共通の値になり，これが集団としての当該選択肢の選好順位を与えることになる．

3. 指数関数的収束

議論に先立ち，有限 Markov 連鎖に関係するいくつかの用語を定義しておく．一般に,（推移）確率行列を $P \equiv [p_{ij}]$ で表し，その $n \geq 1$ ステップ確率行列を $P^n \equiv \left[p_{ij}^{(n)}\right]$ で定義する．このとき，任意の i と j に関してある整数 $n_1 \geq 1$ と $n_2 \geq 1$ が存在し，$p_{ij}^{(n_1)} > 0$，かつ $p_{ji}^{(n_2)} > 0$ であるならば確率行列 P は規約であると呼ぶ．確率行列が規約であることと，文献 4) で述べられている分解不能であることは同値である（文献 6)，p.411 参照）．

一方，ある整数 $n \geq 1$ が存在して $p_{jj}^{(n)} > 0$ であるものとする．このようなすべての n の最大公約数を d_j で表したとき，これを状態 j の周期と呼び，$d_j = 1$ であるならば状態 j は非周期的と呼ぶ．もしすべての状態が非周期的であるならば確率行列 P を非周期的と呼ぶ．これらの定義から，確率行列が正行列である場合，それは規約，かつ非周期的になることに注意されたい．

ベクトル $\boldsymbol{x}^T \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_I) \in R^I$ に関して次の 3 タイプのノルムを考える．

(i)　$||\boldsymbol{x}||_1 \equiv \sum_i |x_i|$.

(ii)　$||\boldsymbol{x}||_2 \equiv \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

(iii)　$||\boldsymbol{x}||_\infty \equiv \max_i\{|x_i|\}$.

(i)，(ii)，(iii) を各々，絶対値ノルム，Euclid ノルム，および最大値ノルムと呼ぶ．

さて，一般に次の補題 1 が成立する．証明については文献 7) の定理 II.4.2 に関する証明を参照されたい．

補題 1　規約，かつ非周期的な確率行列 P を考える．また，$r \equiv \min_{i,j} p_{ij} > 0$ を仮定する．このとき P の極限行列 $\bar{P} \equiv [\bar{p}_{ij}]$ が存在し，任意の i と j に関して

$$\left|p_{ij}^{(n)} - \bar{p}_{ij}\right| \leq 2\left(1 - r^2\right)^n$$

が成立する．ただし，$\bar{p}_{ij}$ は i によらず一定値 $\bar{p}_j > 0$ を持ち，$\sum_j \bar{p}_j = 1$ である．

力学系 (1) を不動点を算出するための反復計算式と考え，十分小さな数 $\epsilon > 0$ に対して

$$||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}|| \leq \epsilon \tag{2}$$

が成立したと見なされるときに集団は当該選択肢に関して合意に達したと判断する．ここで，不等式 (2) におけるノルムは先に定義した 3 タイプのノルムのいずれかである．また，我々の関心は不動点を近似的に算出することにあるので，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の存在のみが問題となる．すでに述べたように，この点に関しては仮定 1 の下で保証されている．

以下，$r \equiv \min_i \alpha^i/I$ と再定義する．

定理 1　仮定 1 が成り立つものとする．また，$0 < \epsilon < 2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty$ とする．このとき，力学系 (1) に対して

$$||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}||_\infty \leq 2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty \left(1 - r^2\right)^t \tag{3}$$

が成り立ち，任意の $t \geq T(\epsilon)$ に対して $||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}||_\infty \leq \epsilon$ である．ただし，

$$T(\epsilon) \equiv \log\left\{\epsilon/(2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty)\right\} / \log\left(1 - r^2\right). \tag{4}$$

証明：仮定 1 の下では任意の i に対して $0 < \alpha^i/I < 1 - \kappa\alpha^i < 1$ であることに注意されたい．それゆえ，$r = \min_{i,j} k_{ij}$ であり，$0 < r < 1$ である．また，K は規約，かつ非周期的である．

$K^t \equiv \left[k_{ij}^{(t)}\right]$ と $\bar{K} \equiv \left[\bar{k}_{ij}\right]$ を定義し，$\boldsymbol{x}_t = K^t\boldsymbol{x}_0$ であることに注意すると，補題 1 より

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}||_\infty &\leq ||K^t - \bar{K}||_\infty \cdot ||\boldsymbol{x}_0||_\infty \\ &= ||\boldsymbol{x}_0||_\infty \max_i \sum_j \left|k_{ij}^{(t)} - \bar{k}_{ij}\right| \\ &\leq 2||\boldsymbol{x}_0||_\infty \max_i \sum_j \left(1 - r^2\right)^t \\ &= 2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty \left(1 - r^2\right)^t\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $A \equiv [a_{ij}]$ であるとき，最大値ノルムから誘導される行列（作用素）ノ

ルムが $||A||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ となることを用いた（文献 8)，pp.40–41 参照）． ∎

続いて Euclid ノルムと絶対値ノルムに関して考察を行うために，次の補題 2 を利用する．証明は文献 9)，pp.76–77 を参照されたい．

補題 2　任意の $\boldsymbol{x} \in R^I$ に対して，$||\boldsymbol{x}||_2 \leq ||\boldsymbol{x}||_1 \leq I||\boldsymbol{x}||_\infty$ が成立する．

定理 1 と補題 2 より次の系 1 が成り立つことが分かる．

系 1　$0 < \epsilon < 2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty$ とする．このとき，任意の $t \geq T(\epsilon/I)$ に対して

$$||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}||_2 \leq ||\boldsymbol{x}_t - \bar{\boldsymbol{x}}||_1 \leq \epsilon.$$

不等式 (3) は選好インデックスが不動点へと収束する速さが指数的であることを示している．他方で，式 (4) はたかだか $T(\epsilon)$ 回だけ反復計算を行うことにより，あらかじめ設定された許容誤差 ϵ に達することができるという意味において，合意に達したと判断できるまでに必要とされる交渉回数に関する 1 つの上界を与えている．

この上界値は許容誤差 ϵ，エージェント数 I，初期選好インデックス $\boldsymbol{x}_0$，そして r，したがって適応係数最小値に依存しているが，$0 < \epsilon < 2I||\boldsymbol{x}_0||_\infty$ の条件の下，許容誤差が大きいほど，エージェント数が少ないほど，または $||\boldsymbol{x}_0||_\infty$ が小さいほど，すなわち初期選好インデックスのエージェント間のバラツキ，あるいは意見の相違が小さいほど上界値が小さくなることは直感的にも納得できるであろう．しかしながら，適応係数最小値が大きくなるほど上界値が小さくなるという点は注目に値する．なぜならばこのことにより，同じ初期条件から交渉が始まるとき，従順な集団が頑固な集団よりも多くの交渉を経て合意に至ることはないことを主張するからである．これは間接的な表現ではあるが，文献 2)，pp.3589–3590 で述べられている高い適応度を持つ集団は，そうではない集団と比較してすばやく合意に達するというシミュレーション結果を理論的に裏付けている．

4. おわりに

高橋ら[1),2)] の適応型合意形成モデルは集団的意思決定に関する基本モデルの 1 つである．それゆえに，そのモデルの基本的性質を把握しておくことは重要な意味を持つ．本稿では文献 3)，および 4) では検討されていなかった彼らのシミュレーション結果，すなわち同じ初期条件から交渉が始まるとき，従順な集団が頑固な集団よりも多くの交渉を経て合意に至ることはないということが理論的に確認された．特に，合意に達したと判断できるまでに必要とされる交渉回数に関する 1 つの上界が得られたことは数値計算的にも意味がある．なぜならば，合意に達したと判断できるまでに必要となる交渉回数の大まかな見積りを立てることができるからである．理論的に検討するべきシミュレーション結果がこのほかにもいくつか残されているが，それは今後の課題とする．

参考文献

1) 高橋正浩，生天目章：個々の非合理性に基づくマルチエージェントの合意形成法，電子情報通信学会論文誌 D-I，Vol.J82-D-I, No.8, pp.1093–1101 (1999).
2) 高橋正浩，生天目章：適応型合意形成モデルとその諸性質，情報処理学会論文誌，Vol.40, No.9, pp.3586–3595 (1999).
3) 塩村　尊：適応型合意形成モデルの基本性質，情報処理学会論文誌，Vol.47, No.8, pp.2656–2659 (2006).
4) 塩村　尊：適応型合意形成過程の基礎理論，情報処理学会論文誌，Vol.48, No.11, pp.3501–3509 (2007).
5) DeGroot, M.H.: Reaching a consensus, *Journal of American Statistical Association*, Vol.69, No.345, pp.118–121 (1974).
6) 小山昭雄：経済数学教室 4 線形代数と位相（下），岩波書店 (1994).
7) Schinazi, R.B.: *Classical and Spatial Stochastic Processes*, Birkhaüser, Boston (1999). 今野紀雄，林　俊一（訳）：マルコフ連鎖から格子確率モデルへ，シュプリンガーフェアラーク (2001).
8) Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Acadmic Press, New York (1970).
9) 二階堂副包：現代経済学の数学的方法，岩波書店 (1960).

(平成 20 年 9 月 3 日受付)
(平成 21 年 5 月 13 日採録)

塩村　尊（正会員）

昭和 35 年生．昭和 63 年神戸大学大学院経済学研究科博士課程後期課程修了．同年香川大学商業短期大学部専任講師．平成 6 年より関西大学総合情報学部助教授．平成 13 年より関西大学総合情報学部教授．理論経済学，情報学と人文社会科学との接点に関する研究に従事．博士（経済学）．日本経済学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会各会員．