

CIP スキームを用いたレベルセット法による界面捕獲の数値精度

杉野 隆三郎^{†1} 角 田 和 彦^{†2}

レベルセット法は、3DCG におけるサーフェース表現や移動物体の最適軌道同定などの界面捕獲に有効な数値計算手法とされるが、レベルセットの運動を記述する移流方程式の数値計算にコストがかかり、符号付距離関数を再初期化や解析領域をナローバンド化するなど数値技法に工夫を要する。そこで、本研究では移流方程式の数値解法として有効とされる CIP スキームを用いた新しいレベルセットアルゴリズムを開発し、その数値精度を検証した。様々な空間解像度に対して数値実験を実施した結果、本手法がレベルセット関数の数値計算に特別な工夫をしなくても他の数値解法よりもプロファイルの再現性に優れることを示す。

Numerical Accuracy of Interface Capturing by Level Set Method with CIP scheme

RYUZABURO SUGINO^{†1} and KAZUHIKO KAKUDA^{†2}

Level set method is very effective method for interface modelling in computer vision or path optimization in control planning and so on. But, this method has higher CPU cost in computing the convection equation of level set function. And, there are need of special numerical techniques, such as reinitialization of signed distance function or narrow banding of computational area. In this paper, we propose the new interface capturing algorithm of level set method in conjunction with CIP scheme. Our method has the very simple algorithm and higher conservation of interface profile. We show the numerical accuracy of the CIP - level set scheme in comparison with other numerical schemes.

1. はじめに

近年、メッシュや分割曲面によるモデリングに代わってノイズやデータ欠損に強い陰関数曲面によるモデリングの研究が盛んになってきた。距離画像から高品質の 3DCG を生成する技術は、デジタル画像処理やロボットの視覚情報処理など Visual Computing 分野で求められており、曲面再構築手法として RBF, MPU, MLS, LSM などの陰関数モデリング¹⁾が開発されてきた。LSM (Level Set Method) は、界面記述モデルとして計算幾何学で提案されたものが、数値流体力学 (CFD) における自由境界問題を解く手法として発展してきた。その後、Osher 等により動的なサーフェス再構築手法として様々な画像処理分野への応用が開始された^{2), 3)}。VC における LSM の応用としては、多視点画像からの画像再構築と物体認識などがあるが、高品質サーフェスモデルを低 CPU コストで生成することが重要であり、プリミティブや基底関数などの構

成要素に依存しない位相変化にロバストな LSM は有効な計算手法と考えられる。原画像からの点群データが有するノイズやデータ欠損を補間しサーフェスを生成を検討した研究報告⁴⁾があり、移動ロボットの軌道生成や物体追跡で発生するオクルージョン問題⁵⁾に適用した報告例がある。

LSM の基本は、界面密度関数を設定し、平均曲率流を数値計算することにある。問題は、平均曲率流の移流方程式が高い非線形性を持つため、簡単な計算スキームで解くと数値精度が著しく低下することである。CFD 分野では移流方程式の数値的困難を克服するために様々な計算スキームを開発してきた⁶⁾。VC 分野の LSM は低次スキームを用いる例が多く、アダプティブな計算グリッド生成技法、計算領域のナローバンド化や陰関数の再初期化など CPU コストの高い計算アルゴリズム²⁾を導入しないと界面を捕獲できない。

本研究では、LSM に移流問題に有効とされる CIP スキームを組み込んだ VC 向けの界面捕獲手法を構築し、符号付距離関数の計算法、CIP-LSM の定式化、セグメンテーション手法を示す。数値精度の検証として、回転速度場中の界面捕獲問題を数値実験し、他の計算スキームと比較して本手法が特別な数値技法なしに高精度でプロファイルを捕獲できることを示す。

^{†1} 阿南工業高等専門学校
Anan National College of Technology

^{†2} 日本大学生産工学部
College of Industrial Technology, Nihon University

2. レベルセット法と符号付距離関数

2.1 符号付距離関数とレベルセット方程式

陰関数で界面 $\phi(x, y) = 0$ となるレベルセット ϕ が速度場 $\mathbf{u} = (u, v)$ により運動する一般的な移流方程式と、VC 分野で多用されるレベルセット方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F|\nabla \phi| = 0 \quad (2)$$

式 (2) は、符号付距離関数の性質により式 (1) から導出される³⁾。式 (2) の第 2 項には、平均曲率流れの速度場を与えて界面の動的な駆動力となる。式 (2) は、Eikonal 方程式と同値であり、ノルム計算を伴うので数値的にも解きづらく、単純なスキームを用いると数値誤差でプロファイルの追跡が困難となる。

次に、LSM で重要な構成要素である陰関数の求め方を述べる。図 1 で示すように全体領域 $\Omega = D_- \cap D_+$ 中に物体が占める領域 D_- が存在し、その境界 ∂D を界面と見なして ∂D 上の点 \mathbf{x}_I と Ω 中の点 $\mathbf{x} = (x, y)$ との符号付距離 $d(\mathbf{x})$ を $d(\mathbf{x}) = \pm \min(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|)$ で求める。直径 1 の円が配置されたときの符号付距離関数の様相を図 2 に示す。

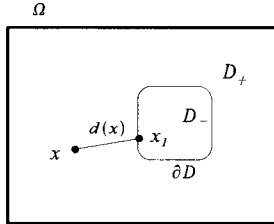


図 1 物体界面 ∂D と全領域 Ω 中の任意点 \mathbf{x} との距離 $d(\mathbf{x})$
Fig.1 Distance $d(\mathbf{x})$ from point $\mathbf{x} \in \Omega$ to interface ∂D .

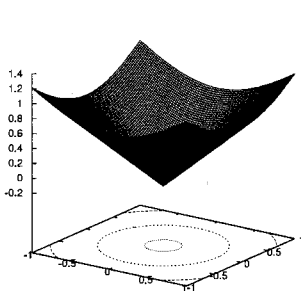


図 2 円形界面に対するレベルセット関数
Fig.2 The level set function to a circle interface.

2.2 符号付距離関数の計算アルゴリズム

計算上は各グリッド点で距離関数を離散的に求めることになり、グリッド点と界面を離散化した線分セグ

メント上の離散点との距離のうち、最も短い距離を選ぶことになる。具体的には、グリッド点を $\mathbf{x} = (x_i, y_j)$ とし、セグメント上の点座標を $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)$ とするとこの 2 点間の距離 l は $l = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_j - y_I)^2}$ となり、各セグメントの接点と中央点で距離計算を行い、最小の l を距離とする。

次に、グリッド点が界面の内側か外側かの内外判定をして距離関数の符号を決定するアルゴリズムを述べる。閉曲線に対する内外判定には、注目する点から無限遠に向けて直線を引き交差するセグメント数で判定を行うことが多いが、数値誤差のためうまくいかない場合がある。本研究では、以下に述べるガウス積分を用いた内外判定アルゴリズムを用いた。点 P が C の内側か外側かで式 (3) に示す積分量 I が決まる。

$$I = \begin{cases} \int_C \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} ds = 0 & \rightarrow P: \text{outer point} \\ \int_C \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} ds = 2\pi & \rightarrow P: \text{inner point} \end{cases} \quad (3)$$

この離散化積分も数値誤差を持っているが、ただひとつの実数に対する 2 値判定であるため適切な閾値を与えれば内外判定が破綻するようなことはなく、堅牢なアルゴリズムと言える。

3. CIP スキームによる移流方程式の数値計算

3.1 2 次元移流方程式の数値解法

ここで、式 (1),(2) で表される 2 次元の移流方程式の数値計算方法を考察する。移流方程式の離散化の考え方は、式 (1) を満足する補間近似で説明する。まず、計算グリッド点に定義されるスカラー量を 1 次補間により離散化した Up-Wind スキームが考えられるが、このスキームは大きな数値拡散誤差を持つのでプロファイルはすぐに鈍ってしまう。

ここで、移流方程式の数値解の安定性を議論するとき重要な Courant 数と呼ばれる無次元数 c を示す。 $c \leq 1$ のときに数値解が安定、 $c > 1$ のとき不安定になり解は発散する。この条件を CFL 条件と言い、2 次元速度場を $\mathbf{u} = (u, v)$ 、空間・時間の増分を $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ として次式となる。

$$c = |\mathbf{u}_{\max}| \frac{\Delta t}{\Delta x + \Delta y} \quad (4)$$

高次精度の計算手法として、2 次補間を用いた Lax-Wendroff スキームがあり、定式化が簡単でありながら物理量の保存性に優れるため CFD 分野で多用されている。しかし、分布がシャープなプロファイルを持つ場合は、激しい位相誤差が発生し元のプロファイルから遠く離れた数値解となってしまう。そこで、QUICK, KAWAMURA 等の高次補間系スキームや TVD, ENO, WENO 等の全変動保存系スキームが開発されているが、どれも複雑な計算アルゴリズム⁶⁾ となるので CPU コストは高い。

3.2 CIP スキームによる定式化

CV 分野の研究では、前節で紹介した U-W スキームを用いることが多い。それは、2.1 節で述べたレベルセット方程式を用いているからであり、Eikonal タイプの式 (2) を簡単に解くには低精度な U-W を採用せざるを得ない。その場合は、前節でも述べたように大きな数値誤差が発生するので、レベルセットの再初期化や再初期化を回避するアルゴリズムを用いてプロファイルの保存性を確保することになる。

そこで、式 (2) をやめて、移流問題に高い精度を持つ CIP スキームを用いて式 (1) をそのまま解くことを提案する。界面進展を計算するには、平均曲率流を解く必要があるので、式 (5) に示す一般化界面成長方程式を式 (1) に組み込んだ式 (6) を用いることになる。

$$\mathbf{G} = K\mathbf{n} = (K n_x, K n_y) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (6)$$

ここで、 K は界面の平均曲率になんらかの補正項を加えた一般化平均曲率、 \mathbf{n} は界面上の単位法線ベクトルを示す。CIP 法は 3 次補間を用いることで、関数値だけでなく微分量をも移流させる離散化手法をとる。補間係数を微分量から構成するため、2 点間で補間が可能であり、プロファイルの保存精度が高まる。

以下に、CIP による移流方程式 (1) の離散化を述べる。まず、用いる 2 次元 3 次補間多項式を次に示す。

$$f(x, y) = \sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^3 C_{lm} x^l y^m \quad (7)$$

導関数を $\phi_x = \partial_x \phi$ 、 $\phi_y = \partial_y \phi$ とし、グリッドにおける諸量と式 (7) を最もコンパクトにする補間を用いると、CIP による定式化が次のように導出される。

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - u \{ A + \partial_x \phi_{i,j,t} \} \Delta t - v \{ B + \partial_y \phi_{i,j,t} \} \Delta t$$

$$A = (C_{30}u + C_{21}v)u\Delta t^2 - (C_{20}u + C_{11}v)\Delta t$$

$$B = (C_{03}v + C_{12}u)v\Delta t^2 - C_{02}v\Delta t \quad (8)$$

$$\partial_x \phi_{i,j}^{n+1} = \partial_x \phi_{i,j}^n + u \{ (3C_{30}u + 2C_{21}v)\Delta t^2 - 2C_{20} \} \Delta t + v(C_{12}v\Delta t - C_{11})\Delta t \quad (9)$$

$$\partial_y \phi_{i,j}^{n+1} = \partial_y \phi_{i,j}^n + v \{ (3C_{03}v + 2C_{12}u)\Delta t^2 - 2C_{02} \} \Delta t + u(C_{21}v\Delta t - C_{11})\Delta t \quad (10)$$

4. 数値実験

4.1 対象問題の設定

本研究では、Rotating Profile 問題を設定し、正方形領域 $[x: -1, 1] \times [y: -1, 1]$ 、速度場は $\mathbf{b} = (-\omega y, \omega x)$

を与える。計算パラメータは、時間刻み $\Delta t = 0.001$ で固定、 $\omega = 2\pi$ とし、1000 ステップで正方領域内を 1 周するようにした。次に、グリッド間隔 $(\Delta x, \Delta y)$ は、サンプリング間隔 (離散分解能) に対する数値精度を比較するため表 1 のように 3 種類を設定する。

表 1 各計算メッシュにおける計算パラメータ
Table 1 Computational parameter of the each mesh.

Grids	u_{max}	Δt	$\Delta x, \Delta y$	c
21 × 21	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.1	0.04443
51 × 51	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.04	0.11107
101 × 101	$2\sqrt{2}\pi$	0.001	0.02	0.22214

4.2 矩形プロファイルの捕獲問題

初期形状として正方形を配置し、この形状が領域内を 1 周するかどうかを空間解像度を変えて数値実験したが、ここでは 101 × 101 mesh の結果を示す。

図 3 は、U-W, L-W, CIP の各計算スキームによるレベルセット関数のランドスケープをスナップショットしたものである。U-W は、拡散誤差の影響で距離関数のシャープな形状はなくなり、 $\phi = 0$ のレベルも保持できていない。L-W は、位相誤差が卓越し、振動的な分布が発生してレベルセットの分布を歪ませていることがわかる。CIP は、距離関数のシャープさと単調性を十分に保持していることがわかる。図 4 は、U-W, L-W, CIP の各計算スキームによる界面の時間発展を 100step 毎にセグメントしたプロファイルの時間変化を示めたものであり、正方形の初期形状が回転場で移流されて反時計回りに移動していくことがわかる。U-W は、プロファイルのエッジが鈍って円形化しながら縮小し約 500step で消失してしまった。L-W は、1000step まで形状を捕獲しているが、正方形の形状は保つことはできず、エッジ部分は鈍って丸くなり、形状がいびつな変化をしている。CIP は、若干エッジが丸くなっているがほぼ正方形を保ったまま 1 周分の移流が完了していることがわかる。LSM を VC 分野に応用するには、LOD (Level of Detail) が問題となり、ボクセル数から決まる空間解像度に依存しているため、空間解像度に対する計算スキームの数値精度を検証することが重要になる。図 5 で各計算スキームの空間解像度 = メッシュ分割数に対する volume 保存誤差 $\varepsilon_{vol} = (V_{init} - V_{step})/V_{init}$ の収束性を示す。L-W の収束を見ると、不規則かつ不自然なものであり位相誤差による振動的な分布が原因と考えられる。CIP は、どの時間ステップにおいても安定して 1 次収束した。

5. まとめ

本研究では、符号付距離関数を用いた LSM に CIP スキームを組み込んだ新しい界面捕獲アルゴリズムを提案し、その数値精度を明らかにした。結果、シンパ

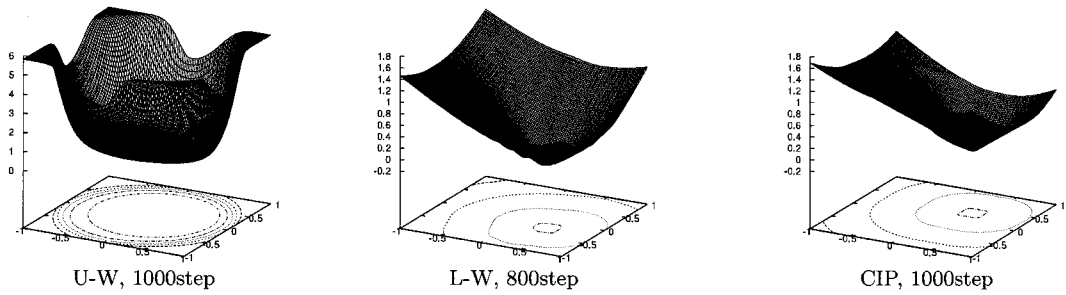


図3 正方形プロファイルの回転場移流におけるレベルセット関数の様相
 Fig.3 The landscape of ϕ by rotating convection square profile .

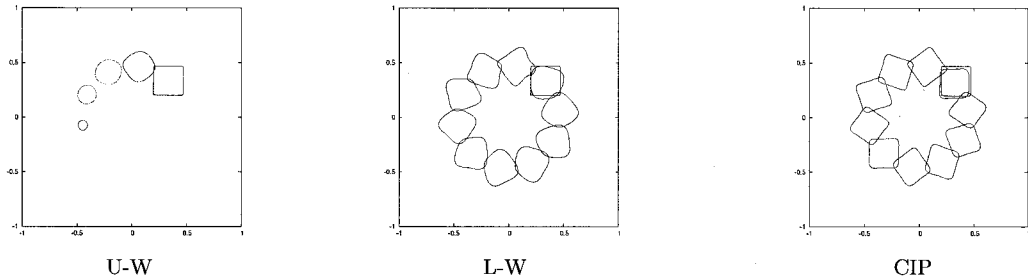


図4 捕獲された界面プロファイルの 100step 毎の変化 (101 × 101 mesh)
 Fig.4 The deformation profiles of a captured interface at every 100step (101 × 101 mesh).

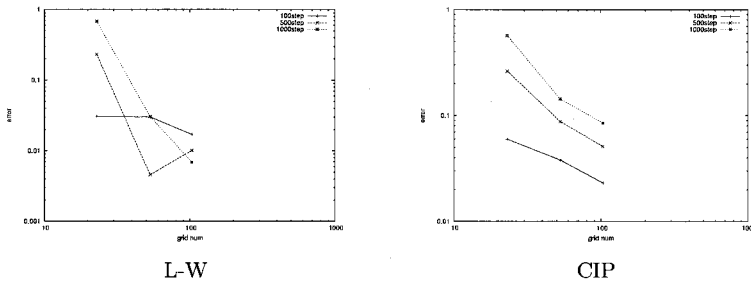


図5 L-W,CIP で捕獲された界面の空間分割数による誤差の収束 (step =100, 500,1000)
 Fig.5 The convergences of error with dividing numbers by L-W,CIP (step =100, 500,1000).

ルかつ低 CPU コストなアルゴリズムでありながら、点群データからのモデリングや画像再構築に対して十分な精度を持つ計算モデルであることが明らかになった。今後は、この定式化の実用問題への適用のため平均曲率流れに対する数値的性能を検証する予定である。

参考文献

- 1) 西田 友是 他：ビジュアルコンピューティング，画像電子学会，東京電機大学出版局 (2006)。
- 2) Sethian, J.A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge-U.Press(1999)。
- 3) Osher,S. and Fedkiw,R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Spinger(2003)。
- 4) 佐藤 善隆, 羽石 秀昭: レベルセット法を用いた医用画像セグメンテーション, 電子情報通信学会技術研究報告, MI2004-81(2005-1), pp.1-6(2005)。
- 5) 岩下 友美, 倉爪 亮, 辻 徳生, 原 健二, 長谷川 勉: Fast Level Set Method を用いた複数移動物体の三次元追跡, 日本ロボット学会誌, Vol.23, No.7, pp.813-820(2005)。
- 6) 越塚 誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館 (1997)。