社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2007－MPS－67 (18)
2007－BIO－11 (18)
2007／12／20

待ち行列ネットワークにおける最適成長計画問題とその解法

松村 有祐[†1,†2,†5] 川村 秀憲[†1,†2,†3,†5]
車谷 浩一[†4,†5] 大内 東[†1,†5]

近年の複雑ネットワーク研究は成長するネットワークに注目し，実社会のさまざまなネットワークがどのように生成されてきたかを明らかにした．本研究は，成長するネットワークを設計するという立場で，段階的にノード数を増やし最終的にあるノード数のネットワークを構築するとき，各段階および最終段階におけるネットワーク構造が最適となるように構造計画をする問題を提案した．また，山登り法に基づく解法を提案し，その有効性を数値実験により検証した．

Optimal Growth Planning Problem of the Queueing Networks

YUSUKE MATSUMURA,[†1,†2,†5] HIDENORI KAWAMURATRN,[†3,†2,†5]
KOICHI KURUMATANI[†4] and AZUMA OHUCHI[†1,†5]

The complex network research in recent years revealed that growth process of real-world networks paying attention to growing networks. This paper proposes a phased network structure design problem in the standpoint of designing the growing network and a solving method based on the hill-climbing method. Effectiveness of the solving method was verified by a numerical experiment.

1. はじめに

たとえば，高速道路網が全くない国に新規に 100 ノード（都市）を結ぶ高速道路網を設置する場合，毎年 1 ノードずつ延伸し未完成のネットワークを供用しながらネットワークを成長させるという戦略がとられる．本研究は，このように成長がある，すなわち逐次的に連結グラフを拡張するタイプのネットワークの構造設計問題とその解法について考える．

ところで，ネットワークの構造設計の際はいつくかの評価指標のもと，構造の最適性に注目する．例えば，人・車・パケット等からなるフローの効率性や，一部ノードの破壊に対するネットワークの機能の継続性，すなわち頑強性などがある．これまで，数学・工学の様々な分野で，それらの評価指標に基づいたネットワーク構造の最適化の手法が研究されてきた．また，高速道路網やインターネットなどさまざまな実社会のネットワークにおいて，それぞれをどのように評価すべきかについても研究されてきた[2),5)]．

ネットワークの成長に関しては，近年の複雑ネットワーク研究の分野について研究が盛んである．複雑ネットワーク研究は 1990 年代後半の Watts や Barabási らの研究成果に端を発して盛んになり，これまでに現存するさまざまなネットワークの構造とその生成過程を分析してきた[2)]．

そこで本研究は，あるノード数・リンク数のネットワークを最適化する従来の構造最適化問題について，新たにノード・リンクが逐次的に追加される要素を取り入れ，構造の最適成長計画問題として定式化し，その解法を提案する．構造の最適性を議論するとき何らかの評価指標が必要となるので，本論文ではネットワークのフロー効率性をその一例として取り上げる．フロー効率性を理論的に評価するために，本論文では待ち行列ネットワークでネットワークをモデル化する[6)]．ネットワークの成長モデルについては，複雑ネットワーク研究で提案されているものを基礎として考える．複雑ネットワーク研究における成長モデルは，

†1 北海道大学 大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University
†2 日本学術振興会, JSPS
CREST, Japan Society for the Promotion of Science
†3 ミシガン大学, The University of Michigan
†4 産業技術総合研究所, AIST
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology
†5 科学技術振興機構, CREST
CREST, Japan Science and Technology Agency

ノード・リンクがどのように逐次的に生成されるかをも組み入れたものであるが，本研究ではリンクを最適化の手法で生成するため，リンクの逐次的生成に関する要素を取り除いたモデルとして利用する[1)].

2. 待ち行列ネットワークにおける最適成長計画問題

以下に，ネットワークを待ち行列ネットワークでモデル化する．待ち行列ネットワークの構造はグラフ $G=\{V,E\}$ で示す．V,E はそれぞれノード集合およびリンク集合を示す．$V=\{1,2,\cdots,N\}$ であり，各ノードが 1 つの待ち行列システムに対応する．ここでは，あるノードで発生した人・車・パケット等のトラフィックが，ある別のノードに到達するまでに，いくつかのノードにおいてトラフィックの中継が必要となるモデルを考える．ここで，ノードは人流・車両流においては交差点・ジャンクション等，パケット流においては中継ルータに対応する．トラフィックを中継する際は，トラフィックの集積度に応じて待ち時間が生ずる．ここでは，サービスを，トラフィックを中継することとし，待ち行列システムに流入したトラフィックを先入順にシステム出口に導き隣接する待ち行列システムに流入可能な状態にすることを中継とする．待ち行列ネットワークは，このような待ち行列システムが網状に接続されたものであり，隣接するノード対で，一方の待ち行列システムのトラフィックの出口が，他方の入り口となっている．

各トラフィックはあるノードでランダムな生起分布で発生し，各ノードで中継され，到着ノードに到着し，その出口で消滅することとする．各ノード i からは各ノード j に向けて単位時間当たり q_{ij} の量のトラフィックが発生していることとし，各トラフィックに経路 r_{ijk} が与えられれば，ネットワーク全体のトラフィックフローが一意に決まる．ここで，

$$r_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{経路 }(i,j)\text{ がノード }k\text{ を含む}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とする．

各待ち行列システムは，1 つのサービス窓口と，サービス待ちのトラフィックからなる待ち行列で構成される．各ノード i では，単位時間当たり λ_i の量のトラフィックがランダムな到着分布で流入し，サービス窓口で単位時間当たり μ_i の量が中継され，システム外に流出する．λ_i,μ_i はそれぞれ到着率およびサービス率と呼ばれる．待ち行列システムにおいて，待ち時間はトラフィックの到着率に対して指数的に増加するという統計的性質があり，ここでもそれに倣う．このとき，各待ち行列システムは M/M/1 でモデル化される．

2.1 成長する待ち行列ネットワークへの拡張

前節で定義されたネットワークについて，本論文が考える成長の要素を組み入れる．そのために，まず複雑ネットワーク研究で提案された BA モデルの成長規則を示す．ここでまず，ステップの記号 t と，あるステップ t において G に含まれるある部分グラフに関する記号 $G_c(t)=\{V_c(t),E_c(t)\}$ を用意する．BA モデルは

(1) ステップ $t=0$ において n_0 個のノードを含む完全グラフを生成．ここで，$V_c(0)=\{1,2,\cdots,n_0\}$ とする．

(2) $t>0$ の各ステップ t において，t を $t+1$ とし $v=n_0+t$ を $V_c(t-1)$ に組み入れ，$V_c(t)$ とする．

(3) v より m_0 本のリンクを $V_c(t-1)$ に含まれる m_0 個のノードに対して生成する．ここで，ノード $i\in V_c(t-1)$ に対してリンクが生成される確率 $P(i)$ は，k_i を i の次数としたとき $P_i=k_i/\sum_{j=1}^{n_0+t-1}k_j$ である．

(4) $|V_c(t)|=n$ であれば終了．

生成されたネットワーク G の構造は連結グラフの性質を持つ．

本論文における成長は BA モデルに習うこととするが，(3) を実施しない．これは，最適化の手法によってリンクを生成するためである．ただし，G に関する隣接行列 A の要素 a_{ij} について

$$a_{ij}=a_{ji}=\begin{cases}1 & (i,j)\text{ 間にリンクがある}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

としたとき，$\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}=m_0\quad(m_0<i\le N)$ なる制約を守ることとする．この制約を守るとき，$|E|=n_0(n_0-1)/2+m_0(N-n_0)$ および $|E_c(t)|=n_0(n_0-1)/2+m_0\cdot t\quad(0<t\le(N-N_0))$ である．

2.2 最小待ち時間待ち行列ネットワークの構造決定問題

ここで，待ち行列ネットワークの最適成長計画問題について，ネットワークが未完成すなわち V に含まれるすべてのノードが 1 つの連結グラフをなさない状態においても，ネットワークが供用されることを考慮し，各ステップ t における部分ネットワーク $G_c(t)$ の評価値 $f(t)$ の和を最適化する E すなわち A を決定する問題として定式化する．具体的には，N,n_0,m_0,μ_i,q_{ij} が与えられたとき，$\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}=m_0\quad(m_0<i\le N)$ の制約下で評価値の和 $\sum_t f(t)$ を最小化する問題とし

て次式に定式化される．

$$\min_{A} \sum_{t=0}^{N-n_0} f(t) \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n_0} a_{ij} = n_0 - 1 \quad (1 \leq i \leq n_0) \tag{2}$$

$$a_{ii} = 0 \quad (1 \leq i \leq N) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = m_0 \quad (n_0 < i \leq N) \tag{4}$$

$$m_0 \leq n_0 \tag{5}$$

目的関数はネットワーク最適化の目的によってさまざまに考えられるが，ここでは具体的な現実問題を解くのではないため，目的関数 $f(t)$ を待ち行列ネットワークの全体的パフォーマンスを調べるための代表的な指標である平均待ち時間で与えることとした．$f(t)$ は以下に示される．

$$f(t) = \frac{1}{Q} \sum_{i \in V_c(t)} \sum_{j \in V_c(t), j \neq i} w_{ij} q_{ij} \tag{6}$$

ここで，Q はネットワーク全体で単位時間当たりに発生するトラフィックの総数であり，次式で示される．

$$Q = \sum_{i \in V_c(t)} \sum_{j \in V_c(t), j \neq i} q_{ij} \tag{7}$$

w_{ij} は，ノード i で発生しノード j に到着する 1 トラフィックあたりの合計待ち時間であり，各ノードにおいて中継を受ける際にかかる待ち時間を合計する．

$$w_{ij} = \sum_{k \in V_c(t), k \neq i} r_{ijk} \tau_k \tag{8}$$

τ_i はノード i における 1 トラヒック当たりの平均滞在時間である．τ_i は μ_i と λ_i から計算される．λ_i は q_{ij} と r_{ijk} から計算される．各トラフィックの経路が決定されると，次式によって各ノード i の待ち行列システムおける到着率 λ_i が計算できる．

$$\lambda_i = \sum_{j \in V_c(t), j \neq i} \sum_{k \in V_c(t), k \neq j} r_{jki} q_{jk} \tag{9}$$

ただし，ここで r_{ijk} は与えられていないことに注意されたい．r_{ijk} のとり方によって平均待ち時間は異なる．ここでは，各トラフィックをなるべく最小の待ち時間で目的ノードに到着させるために，待ち行列ネットワークにおける待ち時間解析の際に一般的に用いられるフロー偏差法[3),4)] によって f を準最小にする r_{ijk} を手順的に決定する．

μ_i と λ_i から平均待ち行列長 ρ_i が計算される．M/M/1 の平均待ち行列長は次式で示される．[6)]

$$\rho_i = \begin{cases} \lambda_i/(\mu_i - \lambda_i) & \mu_i - \lambda_i > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

ρ_i と τ_i の関係は，次式に示すリトルの公式で示される[6)~8)]．

$$\rho_i = \lambda_i \tau_i \tag{11}$$

ここで，式 (10) および 式 (11) より，

$$\tau_i = \begin{cases} 1/(\mu_i - \lambda_i) & \mu_i - \lambda_i > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{12}$$

が導かれる．

3. 山登り法による解法

山登り法による解法を示す．

まず，解表現として解 E の隣接行列 A を用いることとした．ただし，A は対象行列であるため，以下 A の i 行目の対して操作をするとき i 列目についても同様の操作をすることとする．山登り法探索は次のように実施する．

(1) 式 (2) から 式 (5) の制約を守る A をランダムに 1 つ生成する．
(2) A の近傍解を H_n 個作成する．ただし，近傍解のうち 1 つは A のコピーとし，最良解を保存する．
(3) 近傍解のうち最も評価値が高いものを A として置き換える．
(4) (2)〜(3) を繰り返す．ただし，H_g 回にわたり解評価が改善しなければ終了する．

近傍解は次の手順で作成する．

(1) $n_0 < u \leq N$ なる u をランダムに H_m 個選択し，それぞれを $u_1, u_2, \ldots, u_m$ とする．
(2) u_1 について，A の u_1 行目の要素をすべて 0 とする．
(3) u_1 について，$a_{u_1 v}$ をランダムに m_0 個重複なく選択し，$a_{u_1 v} = 1$ とする．
(4) (2)〜(3) を，$u_2, \ldots, u_m$ についても同様に実施する．

4. 実　　験

4.1 実験設定

待ち行列ネットワークにおける最適成長計画問題において，問題が可解であることと，前章の解法の有効性を検証するために以下の実験を実施する．

最適成長計画問題における，各パラメータを以下のように与えた．まず，$N = 50, n_0 = 10$ とし，$m_0 = 2$ の場合について実験する．

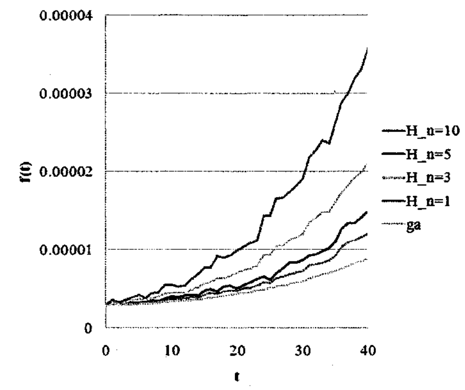

図1　$m_0 = 2$，各 H_m の条件下で最適化された構造における $f(t)$

全ノード対のトラヒック量を一定 $(q_{ij} = 1, i \in V, j \in V, i \neq j)$ とし，サービス率は，正規分布乱数で与えることとした．また，サービス率の平均値は500とした．

山登り法による解法の有効性を次のように検証する．最適成長計画問題を解くことで得られれる解の評価値を，式(5)の制約がない場合における準最適構造の評価値と比較し，前章で提案した解法の有効性を検討する．著者らは問題について遺伝的アルゴリズムによる構造最適化を従来研究で実施しており，式(5)の制約がない場合における準最適構造の探索はそれにならうこととする[9]．

実験において，山登り法の近傍解数 $H_n = 30$，終了条件 $H_g = 100$，同時操作行数 $H_m = 1, 3, 5$ とした．

4.2 実験結果

前節に示した条件下で，構造を最適化し，評価値を比較したのでその結果を示す．各実験結果で示される数値は20回試行の平均値である．

図1 に各 H_m の条件下で最適化された構造における $f(t)$ を示す．GA で示される系列は式(5)の制約がない場合に遺伝的アルゴリズムによって最適化された解の評価値を示す．横軸は t，縦軸は $f(t)$ を示す．ここで，ある t におけるノード数は $t + n_0$ である．評価値は待ち時間であり，小さいほどよい．

4.3 考　　察

まず，提案した問題は可解といえる．ここで，図1に示される評価値 $f(t)$ について検討する．全体的な傾向として t が大であれば $f(t)$ も大である．これは，t が大であるほどネットワーク全体のトラフィックが多くなるためと考えられる．また，指数関数的に増加するのは，M/M/1モデルが，待ち時間が待ち行列長に対し指数関数的に増加する性質を組み入れたモデルであるためと考えられる．いずれの場合も遺伝的アルゴリズムにおける $f(t)$ が最も小さいが，これは式(5)に示される制約がない，すなわち問題が異なるためであり，遺伝的アルゴリズムが山登り法より優れているということではない．提案した山登り法で得られた解に関しては，これは，H_m が小のとき，局所解からの脱出が困難であるからと考えられる．

5. 結　　論

著者らは，ネットワークの構造設計問題に関して，成長すなわちノード・リンクが逐次的に追加される要素を盛り込み最適成長計画問題として提案した．提案した山登り法を用いた構造探索の手法に関しては，問題特有の性質を考慮し近傍解の作成方法を設計し，局所解からの脱出性をパラメータで設定可能にした．

提案した解法の有効性を検討するために，従来研究でさまざまに研究されているネットワーク構造の最適化問題を取り上げ，数値実験でそれぞれの問題における解について比較した．その結果，提案した解法の有効性が示唆された．

参　考　文　献

1) Albert, R. and Barabási, A.-L.: Statistical mechanizm of complex network, *Review of Modern Physics*, Vol.74 (2002).
2) Barabási, A.-L.: *LINKED: The New Science of Networks*, Perseus Publishing (2002).
3) Fratta, L., Gerla, M. and Kleinrock, L.: The Flow Deviation Method: An Approach to Store-and-forward Network Design, *Networks*, Vol.3, pp.97–133 (1973).
4) Katou, J., Arakawa, S. and Murata, M.: A Design Method of Logical Topology with Stable Packet Routing in IP over WDM Network, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* (2001).
5) Kenyon, T.: *High-performance data network disign: design techniques and tools*, Butterworth-Heinemann (2002).
6) Kleinrock, L.: *Queueing systems*, Vol. 1, Wiley-Interscience (1975).
7) Little, J.: A proof of the queueing formula L = λW, *Operetions Resesearch*, Vol.9 (1961).
8) Whitt, W.: A review of $L = \lambda W$ and extensions, *Queueing Systems*, Vol.9, No.3 (1991).
9) 松村有祐，川村秀憲，大内　東：待ち行列ネットワークにおける待ち時間を最小化する構造設計，情報処理学会論文誌，Vol.48, No.6, pp.2097–2105 (2007).