I.Q Intelligent Qube の NP 完全性の証明

水 野 秀 一† 田 中 哲 朗††

I.Q はよく知られたパズルゲームであるが，その計算量の議論はこれまで行われてこなかった．本論文では，I.Q のクリアにおいて重要な概念であるターン数に着目し，決められたターンにすべてのキューブを捕獲することができるかどうかというターン数判定問題がNP 完全であることを証明した．

NP-completeness of I.Q Intelligent Qube

SHUICHI MIZUNO † and TETSURO TANAKA††

Up to now, the computational complexity of I.Q has not been discussed though it is a puzzle game known well. In this paper, we proofed NP-completeness of the turn number decision problem which is whether to catch all cube in given turns.

1. まえがき

パズルやゲームの計算量に関する研究は，古くから行われてきた．特にパズルにおいては，その NP 完全性を示すことにより，パズルゲームとしてのゲーム性の高さを評価する基準のひとつとすることができる．あるパズルを NP 完全と示せたとすると，ある入力がそのパズルの解であるかどうかは問題サイズの多項式時間で確かめられるのに対し，パズルの解である入力を発見する多項式時間アルゴリズムは見つけることができない．つまりパズルを解くことは難しいが，答えを確かめることは易しいという，ゲームとしてよい性質を持つことになる．最近では，テトリス[1] やぷよぷよ[2][3] といったリアルタイムな要素を持ったパズルゲームに関しても，その NP 完全性が示されている．

本論文では，I.Q[4] というパズルゲームを取り上げて，その NP 完全性を示す．I.Q は PlayStation や PlayStationPortable で動作するテレビゲームである．1997 年の発売以来，全世界で 100 万本以上のセールスをあげシリーズ化されて，テレビゲームを代表するパズルゲームの一つとして定着している．1997 年には，文化庁メディア芸術祭デジタルアート部門優秀賞，CESA 大賞'97 優秀賞を受賞している．このようによく知られた I.Q だが，その計算量や解法アルゴリズムに関する研究はこれまで発表されていなかった．

I.Q の問題の自動作成や，キューブを捕獲していく手順を導く solver を作る上でも，I.Q の計算量を理解することは重要なことである．またステージ上に置かれたキューブを何ターンで捕獲できるかは，I.Q をプレイする上で重要な要素である．本研究では，このターン数に主眼を置き，I.Q において，「初期盤面から，それに含まれるキューブを k ターンで捕獲することができるか」というターン数判定問題の NP 完全性を証明する．

† 東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻
The University of Tokyo Graduate School of Arts and Sciences
†† 東京大学情報基盤センター
Information Technology Center, The University of Tokyo

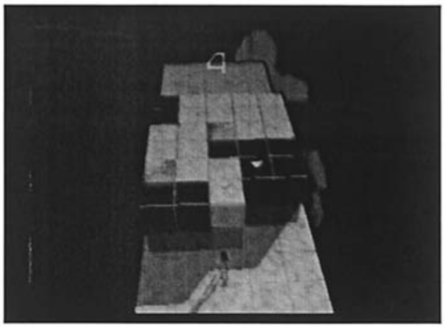

図 1 実際の I.Q の画面（I.Q REMIX+ -intelligent qube- より）

2. I.Q

2.1 I.Q のルール

ここでは I.Q のルールを説明する．

- 図 1 のようにステージは格子状の正方形のマスに区切られた奥行き方向に長い長方形である．
- 初期状態でステージにはキューブと呼ばれるブロックが配置される．配置されるブロックはステージの各マスに一つないしゼロ

である．キューブにはノーマルキューブとフォービドゥンキューブ，アドバンテージキューブの3種類がある．

- すべてのキューブは1ターンごとに手前方向に1マス移動する．
- プレイヤーはステージ上のキャラクターを動かし，キャラクターの足下にあるマスにマーキングをすることができる．そして，マーキングされたマスの上にキューブが乗ったとき，このキューブを捕獲することができる．捕獲されたキューブは消滅する．ただし，マーキングしたマスにキューブが乗ったとき，捕獲するかどうかはプレイヤーが選択することができる．(必ずしも捕獲しなくてよい．)
- キューブの捕獲とマーキングは同じターン内に行うこともできる．
- キャラクターはキューブのあるマスは通れない．
- マーキングは同時に1マスしかできない．マーキングしたマスでキューブを捕獲するか，プレイヤーが解除した場合はマーキングが解除される．
- アドバンテージキューブを捕獲した場合は，さらに捕獲したマスに隣接する8マスとそのマス自体を含めた9マス上を，マーキングした状態にでき，通常のマーキングと同様，その上に乗ったキューブを捕獲することができる．なおこのアドバンテージキューブを使った捕獲は，通常のマーキングとは別に，プレイヤーの選択したタイミングで行うことができる．
- ステージ上のノーマルキューブとアドバンテージキューブをすべて捕獲すると問題クリアとなる．
- 各問題には模範ターン数☆が与えられて，そのターン数以内で問題をクリアすると高得点が与えられる．
- フォービドゥンキューブを捕獲したり，ノーマルキューブやアドバンテージキューブをステージの端に移動するまでに捕獲できないと，ペナルティとしてステージが一列崩れてしまう．キャラクターがステージから落下するとゲームオーバーになる．

3. 証明の概要と準備

3.1 証明の概要

与えられたI.Qの初期盤面に対して，そこに含まれるノーマルキューブを決められたターン数ですべて捕獲できるか，という問題がNP完全であることを証明する．ここではNP完全問題の代表的な問題の一つである3-SAT問題がI.Qのターン数判定問題に帰着可能であることを利用する．つまり，ある3-SAT問題から変換されたI.Qの初期盤面上のキューブを想定されたターン数で捕獲するには，元の3-SAT問題を満たす解が存在することが必要で，かつ十分である，ということを証明する．

3.2 3-SAT 問題

3-SAT問題とは以下のような定義の決定問題である．

- 0-1変数 $x_i (1 \leq i \leq M)$ がある．
- 論理式 $E_j (1 \leq j \leq N)$ は3変数（ないしはその否定）の論理和．
- 論理式 $\phi = E_1 \wedge ... \wedge E_N$ を1にするような変数の0と1の割り当てがある．(このことを充足可能であるという．)

この問題は，NP完全問題であることが知られている[5]．

例として，$M = 3, N = 5$,

$E_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$E_2 = x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3$

$E_3 = \sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3$

$E_4 = x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3$

$E_5 = \sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3$

という問題を考える．ただし，$\sim x_i$ は x_i の否定である．

$E_1 \wedge ... \wedge E_5$ は充足可能である．$E_1 \wedge ... \wedge E_5$ を充足可能にする変数割り当ての集合は，以下のようになる．

$(x_1, x_2, x_3) = \{(1,0,0), (1,0,1), (0,1,0)\}$.

3.3 記法の導入

I.Qの初期盤面の表現に図2のような記法を用いる．ここで，(a) はノーマルキューブ，(b) はフォービドゥンキューブ，(c) はなにもないところ（ステージ），(d) はアドバンテージキューブ，(e) はキャラクター，▽はマーキングしたマスをそれぞれ表す．実際のI.Qは3Dで表現されているが，ここではその奥行き方向を右方向として，キューブは1ターンごとに左に移動する．

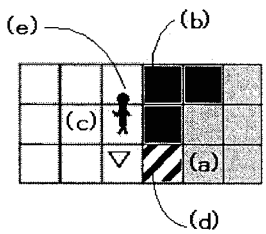

図2 記法の例

3.4 ターン数判定問題

I.Qのターン数判定問題を以下のように定義する．

入力：初期盤面 B, 正整数 k

出力:B に対して，ターン数 k で盤面のノーマルキューブとアドバンテージキューブをすべて捕獲することができるか．ただしフォービドゥンキューブを捕獲してはいけないこととする．またキャラクターの移動速度に制限はないとする．

例えば図3のような初期盤面 B で，ターン数 $k = 4$ でノーマルキューブとアドバンテージキューブをすべて捕獲することを考える．

- 0ターン目に A のマスにマーキングする．
- 1ターン目に A に乗ったアドバンテージキューブを捕獲する．(A と周囲のマス A' がマーキングされた状態になる．) B のマ

☆ I.Qのマニュアル中では「歩数」と表記されているが，誤解を招きやすいので本論文ではターン数と呼ぶ

スにマーキングする．
- ２ターン目は何もしない．
- ３ターン目にアドバンテージキューブによってできたマーキングで，ノーマルキューブ四つを捕獲する．
- ４ターン目に B のマーキングで残った一つのノーマルキューブを捕獲する．

以上の手順で４ターンですべてのノーマルキューブおよびアドバンテージキューブを捕獲できるので，このターン数判定問題は真である．

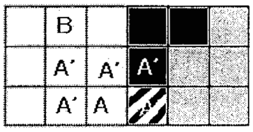

図３　ターン数判定問題の例

4. 3-SAT 問題からターン数判定問題への変換

4.1 部　　品

3-SAT 問題からターン数判定問題への変換に用いる部品として，以下の三つのものを用意する．

［部品１］まず，各変数 $x_i(1 \leq i \leq M)$ とその否定に対して，図４のような変換を割り当てる．ここに現れる二つのノーマルキューブは，それぞれ一つの変数とその否定を表す．

［部品２］次に，各式 $E_j(1 \leq j \leq N)$ に対して，図５のような変換を割り当てる．ここで三つのノーマルキューブは，各式の変数を表す．

［部品３］最後に，各変数 $x_i(1 \leq i \leq M)$ とその否定に対して，図６のような変換を割りてる．ここで二つのノーマルキューブは，それぞれ一つの変数とその否定を表す．

以上三つの部品を組み合わせて，初期盤面は構成される．

4.2 初期盤面の構成

ここでは初期盤面の構成を説明する．例として，3.2 節で挙げた 3-SAT 問題の例に対する変換を見てみよう．変数 $x_i(1 \leq i \leq 3)$，式 $E_j(1 \leq j \leq 5)$ は各部品を使って図７のように変換される．部品１を組み合わせて得られる部分を Left Section，部品２を組み合わせて得られる部分を Center Section，部品３を組み合わせて得られる部分を Right Section と呼ぶことにする．Left Section は 3-SAT 問題の変数一つに部品１が一つ割り当てられるので，変数の数 M だけ部品１が並ぶ．Center Section は式 E_j に対して，それぞれ２列が割り当てられ，式の数 N だけそれらが横方向に並ぶ．Right Section は変数の数だけ部品３が並べられ，変数が増えれば上方向に広がっていくことになる．よってすべてのキューブは変数の数 M と式の数 N を用いて，$(8M+2N+9)\times(8M+1)$ の範囲に含まれることになる．また，ターン数判定問題のターン数 k を $k = N^2+2NM+12M+4N$ とする．

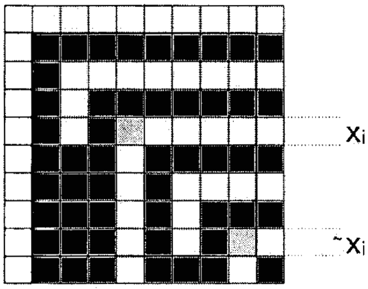

図４　［部品１］変数 x_i とその否定に対する割り当て

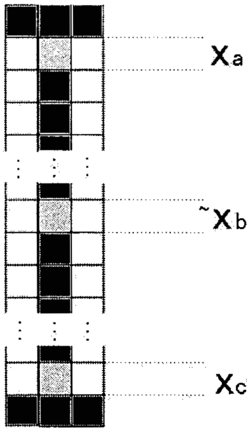

図５　［部品２］式 $E_j = x_a \vee \sim x_b \vee x_c$ に対する割り当て

5. 証　　明

プレイヤーが１ターンにできる行動は，移動する，マーキングする，捕獲するのうち高々三つの組み合わせであり，盤面上のノーマ

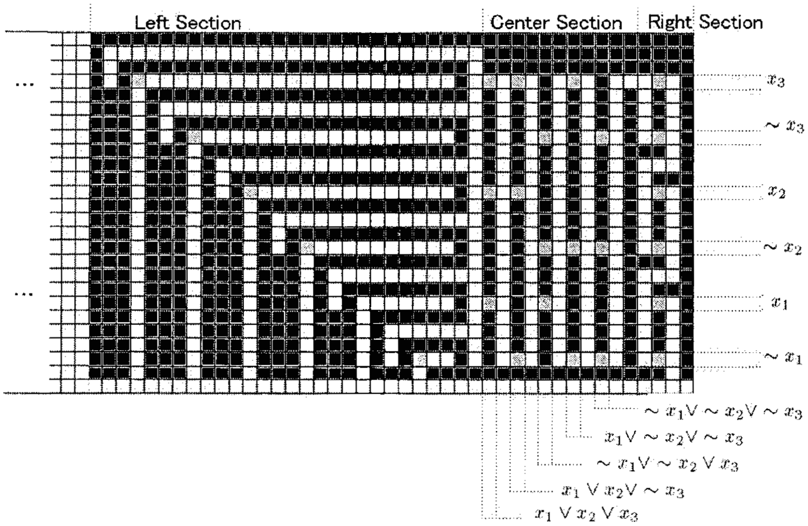

図 7 初期盤面の構成例

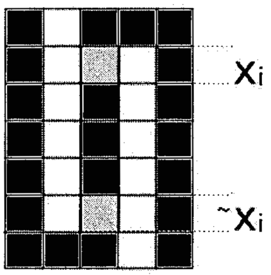

図 6 [部品 3] 変数 x_i とその否定に対する割り当て

ルキューブとアドバンテージキューブを捕獲するターン数は問題サイズの多項式時間以内である．よってターン数判定問題はクラス NP に属する．

次にターン数判定問題が NP 完全であることを証明する．ある 3-SAT 問題が与えられて，それに対応した初期盤面を構成し，初期盤面上に配置されたノーマルキューブを $k = N^2 + 2NM + 12M + 4N$ ターンで捕獲する手順を考える．あとで述べるように，このターン数は，初期盤面のノーマルキューブをすべて捕獲できるターン数のうちで最小のものである．よって初期盤面のノーマルキューブを捕獲する最小ターン数の手順を考えることにしよう．以下では Left Section, Center Section, Right Section の三つのパートについて，それぞれ必要な最小ターン数を計算してみる．

[Left Section]

Left Section の一つの部品に含まれる二つのノーマルキューブは 6 ターンで捕獲されることが期待される．(図 8)

Left Section の一つの部品だけを見て，ここに含まれる二つのノーマルキューブを捕獲するには，各々の二つ隣のマスをマーキングして，2 ターンずつで捕獲することができるから，合計 4 ターンで捕獲することができる．この場合は，各々の二つ隣のマスにキャラクターを移動させるためには，Right Section を通って行くことになるのだが，Right Section の二つのノーマルキューブのうちどちらか一つを捕獲してキャラクターの通るマスを作るには Left Section のさらに左の部分から Right Section のノーマルキューブを捕獲することになる．

ところが Left Section の一つの部品に含まれるノーマルキューブのうち，どちらか一つを四つ隣のマスをマーキングすることによって 4 ターンで捕獲し，それに対応した Right Section のノーマルキューブを Left Section の一番右から捕獲する方が，必要なターン数が少なくなることは明らかである．こうして Left Section のもう一つのノーマルキューブを Right Section から回り込んで二つ隣のマスから 2 ターンで捕獲することができるので，Left Section の一つの部品の二つのノーマルキューブを捕獲するには 6 ターンが最小のターン数であることがわかる．Left Section に部品は全部で M（変数の

数）だけあるので，全体で

$$6M \tag{1}$$

ターンで捕獲されることが期待される．

なお，理由は後述するが，二つのノーマルキューブのうち，4ターンで捕獲するのは，3-SATで'1'になる変数に対応したノーマルキューブである．

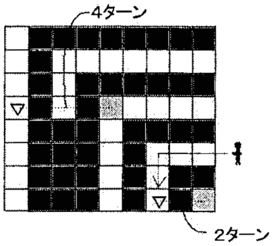

図8 Left Section の捕獲の仕方

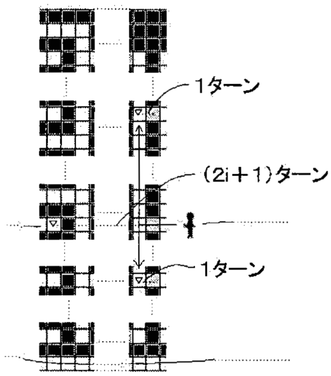

図9 Center Section の捕獲の仕方

[Center Section]

[Left Section] で述べたように，Left Section を最小ターン数で捕獲するには，Center Section の一つの部品に含まれる三つのノーマルキューブのうち最低でも一つずつを捕獲して，キャラクターの通れるマスを作ることが必要になる．その最小ターン数を考えよう．(図9)

この際，三つのノーマルキューブのうち，捕獲するのは3-SATで'1'になる変数に対応したノーマルキューブから一つずつを選べばよい．このようなノーマルキューブは，3-SATが満たされている状況下で構成された初期盤面には，各々の Center Section に必ず一つ以上存在する．これらを捕獲すれば，Right Section から Left Section へと抜ける通路を作ることができる．

この場合に必要な最小ターン数を考えよう．各 Center Section から一つずつを捕獲するのに，

$$\sum_{i=1}^{N}(2i+1) \tag{2}$$

ターン必要になる．

各 Center Section の部品に残った二つのノーマルキューブは，一つ隣のマスをマーキングすることで捕獲できるから，それぞれ1ターン，合計で2ターンで捕獲できる．Center Section は3-SATの式の数 N だけ存在するから，Center Section のノーマルキューブをすべて捕獲するには，

$$\sum_{i=1}^{N}(2i+1)+2N=N^2+4N \tag{3}$$

ターンを要することになる．

[Right Section]

[Left Section] で述べたように，Right Section の一つの部品に含まれるノーマルキューブのうちの一つは Left Section から捕獲されることになる．(図10) ここで必要なターン数は，

$$(2N+5)M \tag{4}$$

ターンである．もう一つのノーマルキューブは，各々の左側をマーキングして捕獲すればよいから，1ターンずつで捕獲できる．よって Right Section に含まれるすべてのノーマルキューブを捕獲するには，

$$(2N+5)M+M=2NM+6M \tag{5}$$

ターンが必要になる．

(1),(3),(5) より，初期盤面のノーマルキューブを捕獲するための最小ターン数は，

$$N^2+2NM+12M+4N \tag{6}$$

ターンとなり，また，これはターン数判定問題の k と一致する．

このとき，Left Section の各部品で最初に捕獲したノーマルキューブに対応した変数を'1'とすれば，それが3-SAT問題の解になる．任意の3-SAT問題は，4節の変換の仕方で I.Q の問題に変換でき，変換時間は多項式時間である．また変換後の問題のサイズは多項式時間で計算でき，また元の3-SAT問題は NP 完全であるから，I.Q のターン数判定問題は NP 完全であることがいえる．

6. 帰着の例

帰着の例として3.2で挙げた3-SAT問題の例からの変換と，$k=N^2+2NM+12M+4N$ ターンでクリアする方法を示す．(図11)

まず Left Section の各部品から一つずつノーマルキューブ（ここ

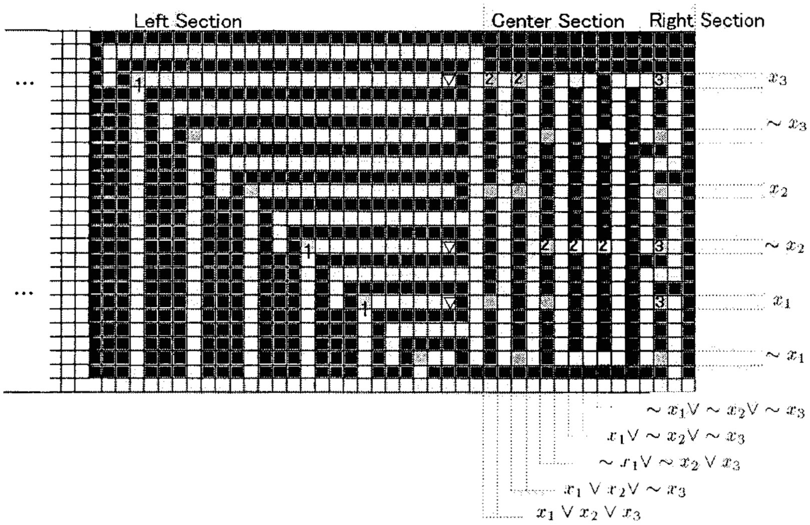

図 11　ターン数判定問題の解き方の例

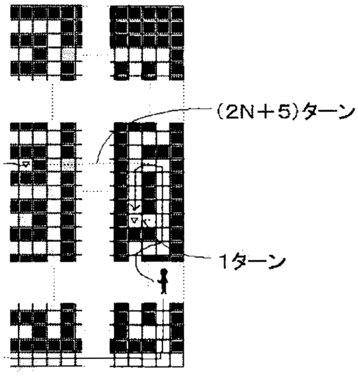

図 10　Right Section の捕獲の仕方

では図 11 の'1' と書かれたキューブ.）を選び，捕獲する．

次に，その場所から行ける最も右の場所（図 11 の▽が書かれているマス）にマーキングし，Center Section の各部品のノーマルキューブのうちの一つずつ（この例では図 11 の'2' と書かれたキューブ）を捕獲する．これで Center Section から Left Section に移動する通路ができる．

さらに同じ▽が書かれたマスから Right Section の各部品のノーマルキューブのうちの一つずつ（ここでは図 11 の'3' と書かれたキューブ）を捕獲する．これで Right Section から Center Section に移動する通路ができる．

残ったノーマルキューブは，Right Section, Center Section では 1 マス左から，Left Section では 2 マス左から捕獲すれば，最短手順 $k = N^2 + 2NM + 12M + 4N = 111$ ターンですべてのノーマルキューブを捕獲することができる．

この最短手順は元の 3-SAT 問題の充足解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ に対応している．

7. 結　　論

本論文では，I.Q のターン数判定問題が NP 完全であることを証明した．ここでの I.Q はオリジナルに存在するアドバンテージキューブがなく，パズル性を減らしたものであるが，それでも NP 完全であるということは，I.Q のパズルとしての奥の深さを物語るものであると考えられる．

これに関連して，アドバンテージキューブを含む場合や，ステージの大きさを限定（特に高さをオリジナルの I.Q に近い，9 以下に限定）した場合などに，NP 完全となるかどうかといった興味深い問題がある．

今後は今回の成果もふまえて，I.Q の問題の自動作成や解法を得るアルゴリズムに関する研究が進むことが期待される．

参 考 文 献

1) E.D.Demaine, S.Hohenberger, and D.Liben-Nowell, "Tetris is Hard, Even to Approximate," Technical Report MIT-LCS-TR-865, MIT, 2002.
2) 牟田秀俊, "ぷよぷよはNP完全," 信学技報, COMP2005-14, May 2005.
3) 松金輝久, 武永康彦, "組合せ最適化問題としてのぷよぷよの連鎖数判定問題," 電子情報通信学会論文誌 D Vol. J89-D No.3 pp.405-413, 2006.
4) I.Q. http://www.jp.playstation.com/scej/title/xib/iq.html
5) Michael Sipser 著, 渡辺治, 他訳, "計算理論の基礎," 2000.