

# ピアノ音の物理シミュレーション — 弦・駒・響板の連成解析をめざして —

橋本 智樹<sup>1)</sup>

梅谷 征雄<sup>2)</sup>

- 1) 静岡大学大学院理工学研究科計算機工学専攻
- 2) 静岡大学情報学部情報科学科

**内容概要** 本研究では高精度・高品質の楽音合成方式を求めべく、弦・駒・響板の物理シミュレーションモデルを用いてピアノ音の再現を試みている。微分方程式でモデル化し、それをコンピュータでシミュレートして、それぞれの実測に基づく定数を入れて計算した。今回はこのモデルにおいての駒と響板の関係について、弦の振動を加味しながら調査した。

## Numerical Simulation of Piano Sounds - Toward the Combined Analysis of Strings, Bridge and Soundboard -

Tomoki HASHIMOTO<sup>1)</sup>

Yukio UMETANI<sup>2)</sup>

- 1) Department of Computer Sciences, Faculty of Science and Engineering, Shizuoka University
- 2) Department of Information Sciences, Faculty of Information, Shizuoka University

The generation of piano sound is tried using the coupled model of string-bridge and soundboard. The model is implemented as a computer program by discretizing differential equations, and numerical results are obtained using realistic parameter values. Based on these results, the coupling effect of the bridge and the soundboard is investigated.

### 1 はじめに

楽器の発音機構解明のため、または音合成の1つの手段として、計算機を用いての楽器の物理シミュレーションは行なわれてきた。楽器の振動特性を物理法則を基に微分方程式などでのモデル化を行ない数値解析することは、設計における個々のパラメータの影響を評価するのに役立つものとなる。また、合成音の生成においても、数値解析において計算された値を直接手に入れて波形化することができ、物理モデルの質によることにはなるが、高い音質を再現することも可能となる。

そのなかで、ピアノの物理モデルの研究には弦とハンマーに関するものと響板に関するものとに2分されている。弦とハンマーとの相互作用については、1自由度の非線形バネ-質量モデルがよく使われている。弦のモデル化については、弦についての偏微分

方程式が用いられるが、弾性項と周波数依存の減衰項を考慮したモデル[1]や空間を2次元で解析しているモデル[2]も存在する。

響板については、平板の曲げにおける基礎方程式が一般的であるが、響板に響棒を加えたモデル[3]の研究もされている。また、これら弦・ハンマー部と響板部の2つのモデルを用いたものも発表されている[4]。

しかし駒の部分のモデル化については、困難を極めているのが現状である。駒の解析についてはいくつか発表されているが、詳細に駒を加えてピアノをモデル化したものはなかなか見かけない。

本稿では駒を2次元弾性体の応力の釣り合い方程式によりモデル化し、弦・ハンマーのモデルと響板のモデルとの間の振動伝達をするものとして加え、その振る舞いを調査した。

## 2 モデル化

ピアノをシミュレートするにあたり、それぞれが持っている役割ごとに4つのモデルに分割した。(図1)

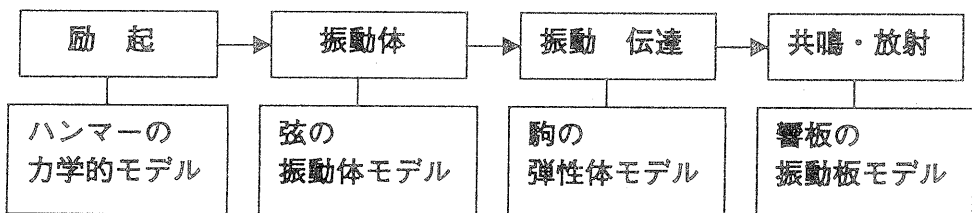


図1 モデル構成

### 2. 1 弦の振動体モデルとハンマーの力学的モデル

剛性をもつ弦の1次振動の微分方程式とハンマーの方程式との関係は以下のように知られている[1]。(各パラメータは後述)

#### ・弦の振動体モデル

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\kappa^2 ES}{\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2b_1 \frac{\partial u}{\partial t} + 2b_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + f(x, x_0, t)$$

#### ・ハンマーの力学的モデル

$$F_H(t) = \begin{cases} K|\eta(t) - u(x_0, t)|^p & \eta(t) \geq u(x_0, t) \\ 0 & \eta(t) < u(x_0, t) \end{cases}$$

$$M_H \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -F_H(t) \quad f(x, x_0, t) = \frac{F_H(t)g(x, x_0)}{\sigma \int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} g(x, x_0) dx}$$

また上式を解くための条件として、弦の両端を支持と考え次式で与えた。

#### ・境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

## 2. 2 響板の振動板モデル

異方性平板の曲げ振動の方程式は次式で与えられる[3]。

### ・響板の2次元振動板モデル

$$\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -D_x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - (D_x \nu_y + D_y \nu_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - D_y \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} - R \frac{\partial z}{\partial t} + F$$

$$D_x = \frac{h^3 E_x}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad D_y = \frac{h^3 E_y}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad D_{xy} = \frac{h^3 G_{xy}}{12}$$

また境界条件としては全辺支持されていると考え次式で与えた。

### ・境界条件

$$z(0, y, t) = z(L_x, y, t) = z(x, 0, t) = z(x, L_y, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, y, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(L_x, y, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, L_y, t) = 0$$

## 2. 3 駒の弾性体モデル

2次元弾性体の応力の釣り合い方程式は次式で与えられる[5]。

### ・駒の2次元弾性体モデル

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial t} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial t} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases}$$

また、応力・ひずみ・変位の関係式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

境界条件は響板との結合部に変位境界条件を用い、それ以外を応力境界条件で与える。

### ・変位境界条件

結合上で  $v = z \quad u = -\frac{h}{2} \frac{\partial z}{\partial x}$

### ・応力境界条件

境界上で  $\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} = T_x \\ n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} = T_y \end{cases}$

$(n_x, n_y)$  は境界上の任意の点での外むき単位法線ベクトル

弦と駒の接点では  $T_y = T \frac{\partial u_{\text{string}}}{\partial x}$  とし、それ以外は0とおく。

### 3 計算機上への実現

数値解法としては差分方程式を導出し、有限差分法を用いる[1][3][6]。

### 4 響板における駒の影響についてのシミュレーション

この2次元弾性体駒モデルの響板への影響について調べるために、駒を付加した時としない時にわけてシミュレートをした。その方法として、Sin関数を外力として加え響板の1点のデータをとり、波形と周波数スペクトル成分を比較した。駒があるときは駒に外力を加え、駒がない時は直接響板に加えた。(それぞれのパラメータは後述)。取得するデータは駒がないときの響板の外力を加える点とし、駒があるときもその点を用いる。

周波数262Hzを加えたときの開始時から0.01秒後の結果は次のようになった(図2)。

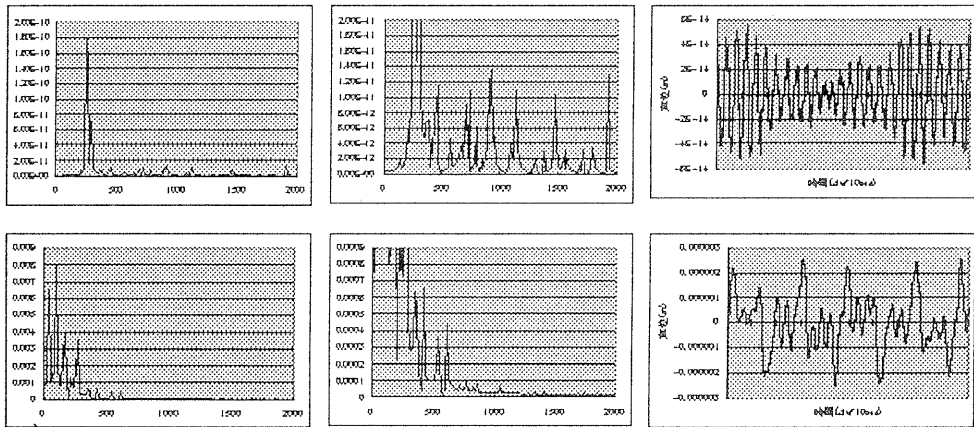


図2 駒あり(上)と駒なし(下)の周波数スペクトルグラフ(左、中)と変位波形グラフ(右)  
周波数スペクトルグラフの横軸は周波数(HZ)、縦軸はパワースペクトル密度  
真ん中のグラフは左のグラフにおいて縦軸を10倍に拡大したものである

駒があるときとないときの周波数成分には大きな違いが見られた。駒がないときは外力として加えた周波数の262Hzより小さい周波数が表れ、駒があるときは262Hzよりも大きな周波数が表れる結果となった。また、変位波形グラフからも駒があるときとないときの振動の細かさの違いに、そのことを見てとることが出来る。

駒があることでより高い周波数を含むことができると考えることができるが、このことは次の弦のモデルを加えた実験の結果で、その重要性を認めることができた。

### 5 弦・ハンマー・駒・響板一体化モデルのシミュレーション

一体化モデルにおける駒の役割を調べるために、駒ありの一体化モデルと駒なしの一体化モデル、そして実際のピアノ音の波形を比べることにした。一体化モデルにおいては、条件は先程の実験の値を用い、異なるのは外力のみで、これは弦・ハンマーモデルで生成されることになる。今回の実験では弦への駒・響板からのフィードバックは考えていない。生成される音は262Hzを基本音とするC4の音であり、これを実際のピアノから録音したC4の音と成分を比較する。

打弦時から0.1秒後の結果は次のようになった。(図3)。

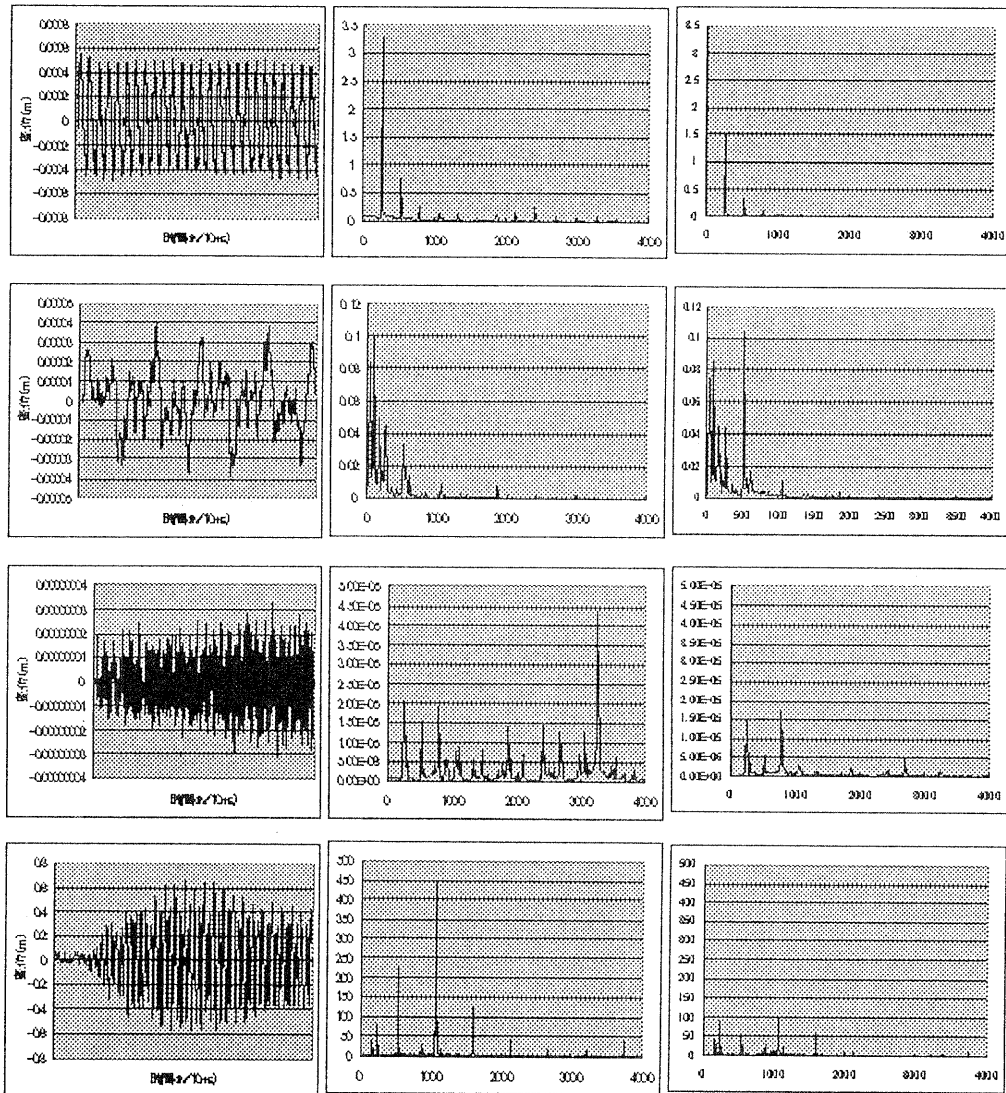


図3 上から弦・ハンマー部、駒なし、駒あり、実音で、  
左が打弦時の変位波形グラフ、中が打弦時、右が1秒後の周波数スペクトルグラフ  
周波数スペクトルグラフの横軸は周波数(HZ)、縦軸はパワースペクトル密度

弦・ハンマーモデルを加えたときも、先程と同様の結果になった。実音にくらべ駒があるときのスペクトルはかなり多くの倍音を含んでいる。しかし、3000Hzあたりの飛び出した周波数を除けば、実音の特徴(倍音を含むということ)をとらえているといえるのではないだろうか。実際に、高い周波数のものは減衰が速いため時間と共にかなり実音のスペクトル波形に近づくものとなった。また逆に駒がないときは、基本周波数より低いものが目立っている。時間が経過しても同じようなスペクトル波形をしめす結果となり、実音とは遠いものとなってしまった。

## 6 おわりに

ピアノ音の基本周波数に対して倍音を含むという特性を再現するための手段として駒モデルを加えることは、有益なことだともわれる。今後さらに高い音質をめざすためには、なぜ高域周波数を含むことになるのか解明していく必要があり、減衰に関する項と駒のパラメータの見直しをしていく予定である。

## 謝辞

研究を開始するにあたり、NTT基礎研究所の引地孝文氏には分野・文献の紹介等適切なガイダンスをいただき感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] 引地孝文、小坂直敏、“弦振動と弾性体振動のモルフィングの検討”、日本音響研究会資料NA96-18、pp69-76(1996)
- [2] 柳沢猛、中村喜十郎、白柳伊佐雄、“ピアノ弦における縦振動とひなり音”、日本音響学会誌33巻8号、pp412-416(1977)
- [3] N.Giordano、“Simple model of a piano soundboard”、Journal of the Acoust.Soc of America Vol.102 No2. August 1997、pp1159-1168
- [4] 引地孝文、小坂直敏、“物理モデルによるピアノ音とギター音のモーフイングの検討”、音楽情報科学31-4、pp19-26(1999)
- [5] “非線形有限要素法”、コロナ社(1994)
- [6] 戸川隼人、“微分方程式の数値計算”、オーム社(1973)

### 本研究で用いたパラメータ一覧 (C4,262Hz、サンプリング周波数24KHz)

| 弦のパラメータ  |                  |                       | 響板のパラメータ |                   |                      | 駒のパラメータ |                   |                   |
|----------|------------------|-----------------------|----------|-------------------|----------------------|---------|-------------------|-------------------|
| N        | 分割数              | 100                   | Nx       | 分割数(x)            | 50                   | Nx      | 分割数(x)            | 6                 |
| L        | 弦長 [m]           | 0.62                  | Ny       | 分割数(y)            | 50                   | Ny      | 分割数(y)            | 6                 |
| $\sigma$ | 線密度 [kg/m]       | $6.3 \times 10^{-3}$  | Lx       | 板の長さ(x) [m]       | 1.0                  | Lx      | 駒の長さ(x) [m]       | 0.12              |
| T        | 張力 [N]           | 670                   | Ly       | 板の長さ(y) [m]       | 1.0                  | Ly      | 駒の高さ(y) [m]       | 0.03              |
| E        | ヤング率 [ $N/m^2$ ] | $2.0 \times 10^{11}$  | $\rho$   | 体積密度 [ $kg/m^3$ ] | $5.0 \times 10^3$    | $\rho$  | 体積密度 [ $kg/m^3$ ] | $5.0 \times 10^3$ |
| S        | 弦断面積 [ $m^2$ ]   | $7.8 \times 10^{-7}$  | h        | 板厚 [m]            | 0.01                 | h       | 板厚 [m]            | 0.01              |
| $\kappa$ | ジャイレースイオン半径 [m]  | $3.0 \times 10^{-4}$  | E        | ヤング率 [ $N/m^2$ ]  | $1.0 \times 10^{10}$ | E       | ヤング率 [ $N/m^2$ ]  | $1.0 \times 10^9$ |
| $b_1$    | 減衰係数             | 0.5                   | $\nu$    | ポアソン比率            | 0.3                  | $\nu$   | ポアソン比率            | 0.3               |
| $b_2$    | 減衰係数             | $6.25 \times 10^{-9}$ | R        | 減衰定数              | 1.0                  | R       | 減衰定数              | 1.0               |
| $b_3$    | 駒相対位置            | 0.97                  | $b_{xs}$ | 駒の相対位置(x)         | 0.3                  |         |                   |                   |
|          |                  |                       | $b_{ys}$ | 駒の相対位置(y)         | 0.3                  |         |                   |                   |

### ハンマーのパラメータ

|          |               |                       |
|----------|---------------|-----------------------|
| $M_H$    | ハンマーの質量 [kg]  | $2.97 \times 10^{-3}$ |
| $2S_H$   | ハンマーの幅 [m]    | $2.5 \times 10^{-2}$  |
| $V_{H0}$ | ハンマーの初速度[m/s] | 4.0                   |
| $a$      | 打弦相対位置        | 0.12                  |
| K        | ステフネス係数       | $4.8 \times 10^7$     |
| p        | 指数係数          | 2.5                   |