

## 三本弦によるピアノ音の減衰特性の考察

中村 勲<sup>†</sup>      長沼 大介<sup>‡</sup>  
<sup>†</sup> アテナ      <sup>‡</sup> 東京国際大学

[要旨] 低音部のおよそ2オクターブを除いて、一つの音符に3本の弦が使われているので、弦の間のエネルギーの交換が響板を通して生じ、弦振動は非常に複雑になる。3本弦の一本は一つの音符に正確に調律されているが、他は少し低めと少し高めに調律されている。3本弦と響板の結合システムの振動特性を説明するために、一つのモデルを採用する。各弦は各部分振動に対応する共振回路で構成され、同様に響板も一定のインピーダンスを持つものと仮定する。ただ一つの部分振動についての最も単純化したバージョンは、響板抵抗で結合された3つの共振回路によって表される。このモデルの計算は理論とコンピュータ実験で行われる。この結果は二段減衰の現象が観測され、更に余韻の包絡線は緩やかに振動することを示す。外側の2本の弦は同相で振動するが、中央の弦とは逆相で振動する。響板に対する駆動力は音圧を表し、外側の弦と殆ど同相である。これらの結果は測定値と一致している。

キーワード ピアノ3本弦、響板結合、減衰特性、等価回路

## The Decay Characteristics of Piano Tones for the Group of Three Strings

Isao Nakamura<sup>†</sup>      Daisuke Naganuma<sup>‡</sup>  
<sup>†</sup>Athena Co., Ltd.      <sup>‡</sup>Tokyo International Univ.

**Abstract** Since three strings are used for one note, except about two octave low notes, an exchange of energy among strings occurs through the soundboard, making the string vibration very complex. One of the three strings is in tune exactly to one note, and others are tuned a little lower and higher. A model is employed to explain the vibration characteristics of a coupling system of three strings and the soundboard. Each string is comprised of resonance circuits that correspond to each partial, and likewise, the soundboard is assumed to have a finite impedance. When the most simplified version of only one partial is considered, the equivalent circuit is expressed by the three resonant circuits coupled with the soundboard resistance. The computation of this model is performed theoretically as well as computer experimentally. The results show that a double decay phenomenon is observed and furthermore that the envelope of the after sound vibrates slowly. The outer two strings vibrate almost inphase, while the middle string vibrates anti-phase. The driving force for the soundboard as well as the sound pressure are almost in the same phase with the outer strings. These results agree with the measured values.

**Keywords** Piano three strings, Soundboard coupling, Decay characteristics, Equivalent circuit

### 1 まえがき

ピアノ音の減衰については、1947年に Martin<sup>1)</sup> が2種類の減衰率が存在することを指摘している。すなわち打音は急速に減衰し、余韻は緩やかに減衰する特性を持っていることである。1959年に Kirk<sup>2)</sup> はコンサートグランドの3弦同音グループにおける最も好まれる調律を一对比較テストで調べた。それは弦の間のずれが1セントか2セントであり、専門の調律師が通常行っている調律の仕方と一致した。1977年に Weinreich<sup>3),4)</sup> はピアノの音色に対して、弦の振動が原因であることを示し、Martinの二段減衰率と Kirkの同音弦の調律のずれの問題の関係を見事に説明した。1978年に Hundleyら<sup>5)</sup> も二段減衰に対する実測結果とそれに対する電子的な実験結果を示した。

1981年に中村<sup>6)</sup>は3本弦による響板の駆動点速度について計算機シミュレーションを行い、打音と余韻について音圧の実測と良く一致した結果を示した。更に1989年に中村<sup>7)</sup>は2本弦の振動について、単純な等価回路モデルでの理論的考察を行った。ミスチューニングの割合と、響板と弦のインピーダンス比の関係で唸りを生ずる場合と二段減衰を生ずる場合があることを理論的に明らかにした。1996年にピアノ技術者である Conklin<sup>8)</sup>はアメリカ音響学会誌のピアノに関する総合報告の中でこの論文を取り上げ、与えられた響板に対して駒の設計が弦の間の結合の性質を決め、結合の性質がピアノの個性に著しく影響することに気付くことが、設計者にとって重要なことであると述べている。

さて本稿は上記の2本弦振動の減衰特性の理論を3本弦振動に拡張し、各弦の張力をわずかずつ変えた通常の調律を行った場合について、各弦の振動とそれによって生ずる音の減衰特性を考察したものである。まずラプラス変換を用いて理論的に扱い、次にシミュレーションを行い、実測結果と比較し、打音と緩やかに減衰する余韻の発生するメカニズムを明らかにする。

## 2 等価回路モデルと理論計算

Fig. 1 に一つの鍵盤に対する3本弦と響板の結合系のモデルを示す。Fig. 2 は各弦が各部分振動の共振系により構成されるものとして表し、響板もインピーダンス系で表されるものとしたモービリティ類推の等価回路モデルを示す。ここで各部分振動は弦の持つ非調和性によって倍振動より少しずつ高めな共振周波数を持つものである。また3本の弦の基本振動は中央の弦に対して一方は少し低めに、他方は少し高めに調律された共振周波数を持っている。Fig. 3 に3本の弦の一部分振動について、中央の弦のスティフネスを  $L$ 、両側の弦における違いを  $\pm\Delta L$ 、等価質量を  $C$  で表し、弦の空気摩擦、音響放射による抵抗を省略し、響板は純抵抗  $R$  とした最も簡約化した等価回路を示す。この結合振動系の時間変化を求めることによって、ピアノ音の減衰特性の基本パターンが得られる。

この回路の電流  $i$  は力、電圧  $e$  は速度を表す。回路の方程式を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} (L - \Delta L) \frac{di_1}{dt} + R(i_1 + i_2 + i_3) + \frac{1}{C} \int i_1 dt &= 0 \\ L \frac{di_2}{dt} + R(i_1 + i_2 + i_3) + \frac{1}{C} \int i_2 dt &= 0 \\ (L + \Delta L) \frac{di_3}{dt} + R(i_1 + i_2 + i_3) + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

初期条件としては、各電流は0で、各コンデンサに電荷  $Q$  が与えられているものとする。

$$i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0 \quad (2)$$

$$Q(0) = CE \quad (3)$$

ラプラス変換によって次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (L - \Delta L)SI_1(S) + R\{I_1(S) + I_2(S) + I_3(S)\} + \frac{1}{S} \left\{ \frac{1}{C} I_1(S) - E \right\} &= 0 \\ LS I_2(S) + R\{I_1(S) + I_2(S) + I_3(S)\} + \frac{1}{S} \left\{ \frac{1}{C} I_2(S) - E \right\} &= 0 \\ (L + \Delta L)SI_3(S) + R\{I_1(S) + I_2(S) + I_3(S)\} + \frac{1}{S} \left\{ \frac{1}{C} I_3(S) - E \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

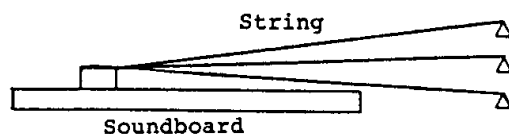


Fig. 1 一つの鍵盤に対する3本弦と響板の結合系のモデル

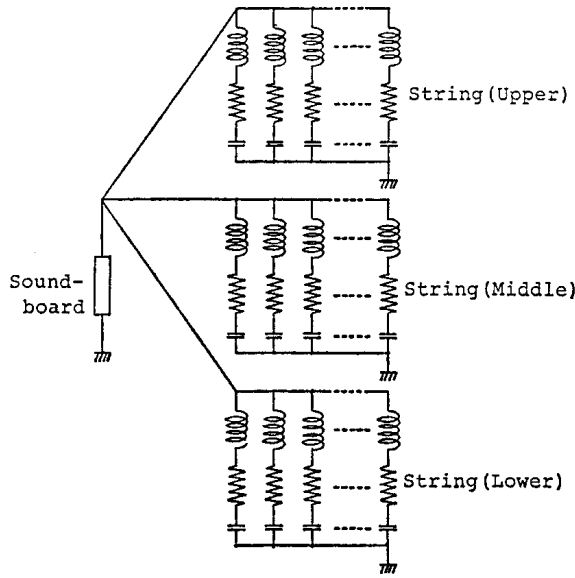


Fig. 2 弦と響板のモービリティ類推による等価回路

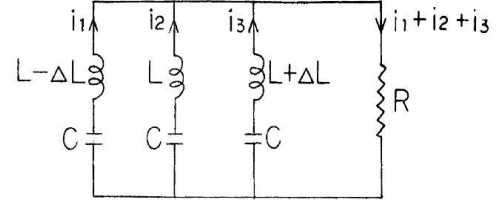


Fig. 3 弦の部分振動と響板の簡略化した等価回路

この連立方程式を解いて次式が得られる．

$$\left. \begin{aligned} F(S)I_1(S) &= \frac{1}{L-\Delta L} \left\{ S^2 + \frac{1}{(L+\Delta L)C} \right\} \left\{ S^2 + \frac{1}{LC} \right\} E \\ F(S)I_2(S) &= \frac{1}{L} \left\{ S^2 + \frac{1}{(L+\Delta L)C} \right\} \left\{ S^2 + \frac{1}{(L-\Delta L)C} \right\} E \\ F(S)I_3(S) &= \frac{1}{L+\Delta L} \left\{ S^2 + \frac{1}{(L-\Delta L)C} \right\} \left\{ S^2 + \frac{1}{LC} \right\} E \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} F(S) &= S^6 + \left( 1 + \frac{2}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \right) \frac{R}{L} S^5 + \left( 1 + \frac{2}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \right) \frac{1}{LC} S^4 + \frac{6}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^2 C} S^3 \\ &\quad + \frac{3}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^2 C^2} S^2 + \frac{3}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^3 C^2} S + \frac{1}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^3 C^3} \end{aligned} \quad (6)$$

である．次に特別な条件のもとに近似を求める．

1) 粗結合の場合

$$1 \gg \frac{\Delta L^2}{L^2} \gg \frac{R^2}{L/C} \quad (7)$$

として， $F(S)$  にアンダーラインの項を加えて因数分解する．

$$\begin{aligned} F(S) &\doteq S^6 + \left( 1 + \frac{2}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \right) \frac{R}{L} S^5 + \left( 1 + \frac{2}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} + \frac{3}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R^2}{L/C} \right) \frac{1}{LC} S^4 + \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{R^2}{L/C} \right) \frac{6}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^2 C} S^3 \\ &\quad + \left( 1 + \frac{R^2}{L/C} \right) \frac{3}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^2 C^2} S^2 + \frac{3}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^3 C^2} S + \frac{1}{1-\frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^3 C^3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$= \left\{ S^2 + \frac{R}{L-\Delta L} S + \frac{1}{(L-\Delta L)C} \right\} \left\{ S^2 + \frac{R}{L} S + \frac{1}{LC} \right\} \left\{ S^2 + \frac{R}{L+\Delta L} S + \frac{1}{(L+\Delta L)C} \right\} \quad (9)$$

これを (5) に代入して解を求める．

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &\doteq \frac{E}{\sqrt{L/C}} \left[ \left( \sin \omega_1 t + \frac{R}{\sqrt{L/C}} \frac{1}{\Delta L/L} \cos \omega_1 t \right) e^{-\alpha_1 t} + (\sin \omega_2 t) e^{-\alpha_2 t} \right. \\ &\quad \left. + \left( \sin \omega_3 t - \frac{R}{\sqrt{L/C}} \frac{1}{\Delta L/L} \cos \omega_3 t \right) e^{-\alpha_3 t} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

$$\alpha_1 \doteq \frac{R}{L-\Delta L}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{R}{L}, \quad \alpha_3 \doteq \frac{R}{L+\Delta L}$$

$$\omega_1 \doteq \sqrt{\frac{1}{(L-\Delta L)C}}, \quad \omega_2 \doteq \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \omega_3 \doteq \sqrt{\frac{1}{(L+\Delta L)C}} \quad (11)$$

2) 密結合の場合

$$1 \gg \frac{R^2}{L/C} \gg \frac{\Delta L^2}{L^2} \quad (12)$$

として  $F(S)$  にアイダーラインの項を加えて因数分解する .

$$F(S) \doteq S^6 + \left(1 + \frac{2}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}} - \frac{2\frac{\Delta L^2}{L^2}}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}}\right) \frac{R}{L} S^5 + \left(1 + \frac{2}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}}\right) \frac{1}{LC} S^4 + \frac{6}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^2 C} S^3$$

$$+ \frac{3}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^2 C^2} S^2 + \frac{3}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{R}{L^3 C^2} S + \frac{1}{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}} \frac{1}{L^3 C^3} \quad (13)$$

$$= \left\{S^2 + \frac{3R}{L} S + \frac{1}{LC}\right\} \left\{S^2 + \frac{1}{(L-\Delta L)C}\right\} \left\{S^2 + \frac{1}{(L+\Delta L)C}\right\} \quad (14)$$

これを (5) に代入して解を求める .

$$i_1 + i_2 + i_3 \doteq \frac{E}{\sqrt{L/C}} \left[ (3 \sin \omega' t) e^{-\alpha' t} - (1-k)(\sin \omega'' t) e^{-\alpha'' t} - (1-k)(\sin \omega''' t) e^{-\alpha''' t} \right] \quad (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &\doteq \frac{3R}{L}, & \alpha'' &\doteq 0, & \alpha''' &\doteq 0 \\ \omega' &\doteq \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{3R}{L}\right)^2}, & \omega'' &\doteq \sqrt{\frac{1}{(L-\Delta L)C}}, & \omega''' &\doteq \sqrt{\frac{1}{(L+\Delta L)C}} \\ k &\doteq \sqrt{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2} \frac{L/C}{R^2}} \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

### 3 理論の結果の考察と2本弦との比較

響板の駆動力は、響板を抵抗として扱っているので、時間波形は振動速度に等しくなり、放射音圧に相当する . まず粗結合の場合について見れば、近似的には  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(L-\Delta L)C}}$ ,  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$  および  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(L+\Delta L)C}}$  の3つの周波数を持ち、それぞれ  $\frac{R}{L-\Delta L}$ ,  $\frac{R}{L}$  および  $\frac{R}{L+\Delta L}$  の減衰特性を持つ弦の振動の合成で表され、唸りを生ずる . 2本弦の場合は中央弦がない場合に相当する .

次に密結合の場合は、最初  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{3R}{L}\right)^2}$  の周波数を持つ3倍振幅の振動が  $\frac{3R}{L}$  の減衰率で急速に減衰し、時間が経つと  $3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta L^2}{L^2} \frac{L/C}{R^2}}\right)$  の小さい振幅を持つ  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(L-\Delta L)C}}$  と  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(L+\Delta L)C}}$  の振動の緩やかな唸りを生ずる . すなわち二段減衰でかつ余韻が緩やかに唸る振動をすることがわかる . 次に2本弦の場合は、最初  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{2R}{L}\right)^2}$  の周波数を持つ2倍振幅の振動が  $\frac{2R}{L}$  の減衰率で急速に減衰し、時間が経つと小さい振幅で  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$  の一定周波数の振動が生ずる . すなわち二段減衰が生ずるが余韻に唸りが生じない . この点が3本弦の場合と異なる .

粗結合と密結合を分けるパラメータは  $\frac{R}{\sqrt{L/C}}$  と  $\frac{\Delta L}{L}$  の大小関係による . すなわち響板の駒位置における抵抗と弦の特性インピーダンスの比に対する弦の調律のずれの割合の関係によって決まってくる . すなわちピアノのパラメータの関係によって、ピアノ音は色々な音色を作り出すことができる .

一般的に基本振動においては密結合の状態であるが、各倍振動においては駒位置における抵抗が異なって粗結合の状態も現れる .

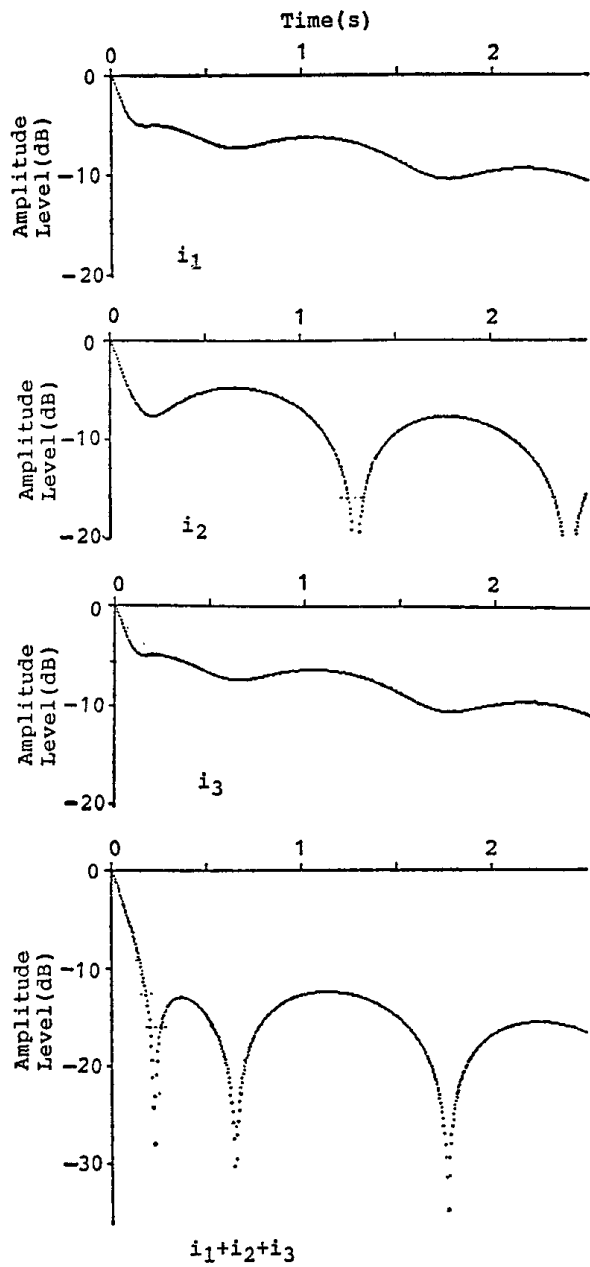


Fig. 4  $i_1, i_2, i_3$  および  $(i_1 + i_2 + i_3)$  の減衰特性 (密結合)

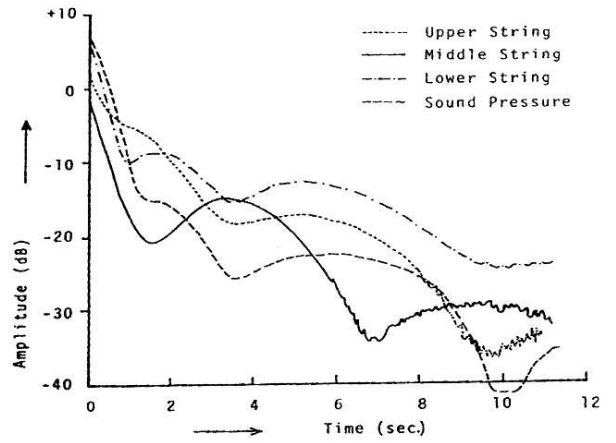


Fig. 5 第41鍵(D4)の打弦点における弦の振動速度と音圧の時間変化

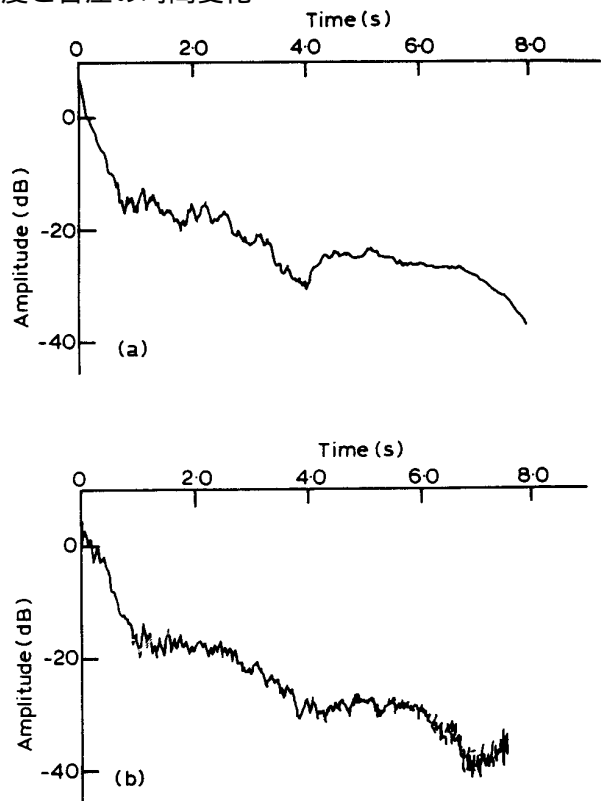


Fig. 6 (a) 第40鍵(C4)の駒位置の速度波形の包絡線(シミュレーション), (b) 音圧波形の包絡線(実測)

## 4 計算機シミュレーションと実測結果

等価回路モデルの計算機シミュレーションについて述べる．初期条件として，ある初速度が与えられた場合，それぞれのコンデンサ  $C_1, C_2, C_3$  に一定電圧が存在するとする．響板と弦のインピーダンス比  $\frac{R}{\sqrt{L/C}}$  と調律のずれ  $\frac{\Delta L}{L}$  を変えて計算する．ここでは  $\frac{R}{\sqrt{L/C}} = 1/200$ ，調律のずれ  $\frac{\Delta L}{L} = 5$  cent とした例を Fig. 4 に示す． $i_1$  と  $i_3$  は同相であり， $i_2$  はこれと逆相になっている． $i_1 + i_2 + i_3$  すなわち響板の駆動力は二段減衰を生じており，余韻の唸りは  $i_1$  および  $i_3$  と同相になっていることがわかる．これは時間変化が急速になるようなパラメータを用いたものであるので，時間軸の値については実際の場合と異なっている．

実測結果としては，あるグランドピアノの第 41 鍵 (D4) の打弦点における弦の振動速度と音圧の時間変化を Fig. 5 に示す．これは基本波のみを取り出したものである．各波形の時間変動の傾向は先のシミュレーションと一致している．音圧の位相は両側の弦速度の位相と概ね一致している．

次に第 40 鍵 (C4) の駒位置の速度波形の包絡線を Fig. 6(a) に示す．これは 3 本弦を分布定数系としてシミュレーションしたもので，中央弦に対してそれぞれ 1 セントずつずらしたものである．Fig. 6(b) は無響室で測定した別なピアノの響板の中央部から 33cm の距離の音圧波形の包絡線である．このあたりの音程では基音が倍音に較べて比較的に大きいので先の等価回路モデルで扱ったものと概ね一致している．

Fig. 4<sup>7)</sup>, Fig. 5<sup>6)</sup>, Fig. 6<sup>6)</sup> は著者の一人中村が先に発表した論文から引用して掲載したものである．

## 5 むすび

ピアノ音の減衰特性を形成するパラメータとして，響板と弦のインピーダンス特性の比と 3 本弦の間の調律の差の関係が，2 本弦の場合と同様に，3 本弦でも二段減衰と唸りを分けることがわかった．更に余韻における唸りを理論的に説明することができた．ピアノ設計上の要素と調律方法がピアノ音の音色を形成することを 2 本弦に続いて 3 本弦についても明らかにすることができた．

## 参考文献

- 1) D. W. Martin, "Decay rates of piano tones," J. Acoust. Soc. Am. **19**(4), 535–541 (1947).
- 2) R. E. Kirk, "Tuning preferences for piano unison groups," J. Acoust. Soc. Am. **31**(12), 1644–1648 (1959).
- 3) G. Weinreich, "Coupled piano strings," J. Acoust. Soc. Am. **62**(6), 1474–1484 (1977).
- 4) G. Weinreich, "The coupled motions of piano strings," Sci. Am. **240**, 94–102 (1979).
- 5) T. C. Hundley, H. Benioff, and D. W. Martin, "Factors contributing to the multiple rate of piano tone decay," J. Acoust. Soc. Am. **64**(5), 1303–1309 (1978).
- 6) 中村 勲, "発音機構のシミュレーション—ピアノの音響学的研究第 2 報—," 日本音響学会誌 **37**(2), 65–75 (1981).
- 7) I. Nakamura, "Fundamental theory and computer simulation of the decay characteristics of piano sound," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) **10**(5), 289–297 (1989).
- 8) H. A. Conklin, Jr., "Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure," J. Acoust. Soc. Am. **100**(2), 695–708 (1996).