2006－CH－70 (3)
2006／5／26

フラクタル次元による絵画の複雑さの評価法

小沢 一雅
大阪電気通信大学

絵画の複雑さを要素的にみていけば、構図の複雑さ、色彩変化の複雑さ、あるいは濃淡変化（輝度変化）の複雑さなどに類別されるであろう。本稿では、このうち濃淡変化の複雑さを絵画の電子版にもとづいて評価する方法を提案する。複雑さを量的に測る尺度としてはフラクタル次元に注目する。フラクタル次元の具体的な計測法としてよく知られている方法はボックスカウンティング法であるが、これを絵画のフラクタル次元の計測に応用する手順を紹介する。いくつかのよく知られている絵画作品について具体的にフラクタル次元を測定し、それによって各作品の個性を論ずる。

Fractal Dimension for Evaluation of Complexity of a Painting

Kazumasa Ozawa
Dept of Engineering Informatics
Osaka Electro-Communication University
ozawa@ozlab.osakac.ac.jp

Fractal dimension has been regarded as a measure to evaluate complexity of a curve or function, which takes a fractional value such as 1.26... of a Koch curve depicted on a two-dimensional plane. The more complex a given function is, the larger its fractal dimension is. This paper presents a procedure to obtain the fractal dimension of a painting picture: The complexity we note here is that of gray-level (brightness) of a picture given by a two-dimensional function. To obtain the fractal dimension of a picture, we have iteratively applied the one-dimensional box-counting method to the two-dimensional picture. We have experimentally obtained fractal dimensions of several well-known paintings and presented a quantitative discussion on differences between their values.

1．はじめに

フラクタル幾何学がマンデルブロー（B. B. Mandelbrot）によって提唱されて以来、およそ２０年余がたつ[1]。当初は、さまざまな形状を呈するフラクタルパターンの不思議さに魅せられ、芸術的視点でコンピュータグラフィクスによる画像生成が盛んに行われたが、情報学的な視点での取り組みは８０年代後半に現れたフラクタル画像圧縮の試み[2]が端緒と考えられる。昨今では、医学的診断、社会心理現象の分析、経済・金融分野における傾向分析などへのフラクタル応用が開拓されつつある[3]。これら新しい応用例の比較的

多数がフラクタル次元を重要な評価尺度として導入している点は注目に値する。

一方、人文科学におけるフラクタル応用は、筆者の知る限りいまだ現れていないようである。フラクタルの中心概念である自己相似性が、人文科学における諸問題の中に思いがけない形で潜在している可能性もありうる。検討の余地は十分あると考えている。

本稿では、絵画の複雑さを評価する問題を取りあげ、フラクタル次元をその評価尺度として用いる試みを述べる。絵画の複雑さを要素的にみていけば、構図の複雑さ、色彩変化の複雑さ、あるいは濃淡変化（輝度変化）の複雑さなどに類別されるであろう。本稿では、もっとも根元的と考えられる濃淡変化の複雑さを評価する方法を考える。いま、平面上に描かれた曲線パターンを例としてフラクタル次元を考えてみよう。曲線がなめらかであれば、描かれた曲線の数や長さに関係なくパターン全体としてフラクタル次元は1である。もし、曲線が複雑であればその程度に応じてフラクタル次元は1より大きい非整数の値（たとえば1.26など）をとるようになる。1本の曲線でありながら、フラクタル次元が2に近い値をとる複雑な曲線も考え出されている[4]。こうした曲線の複雑さを生み出す根元に自己相似性が介在しているわけであるが、ここでは詳細は割愛する。

与えられた曲線（あるいは関数）のフラクタル次元を具体的に計測する方法としてボックスカウンティング法がよく知られている[4]。本稿では、ボックスカウンティング法を導入して絵画のフラクタル次元（ボックス次元）を測定する。

2．ボックス次元

ボックスカウンティング法とは、曲線を被覆するボックス（箱の意味）の数を計数することによって曲線のフラクタル次元を測定する方法である。いま、周長 c の曲線パターンがあるとき、図1のようにそれを覆いつくす辺のサイズが a のボックスの個数 $N(a)$ を計測する。

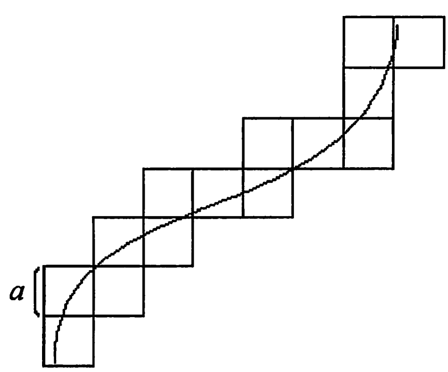


図1　ボックスによる曲線の被覆

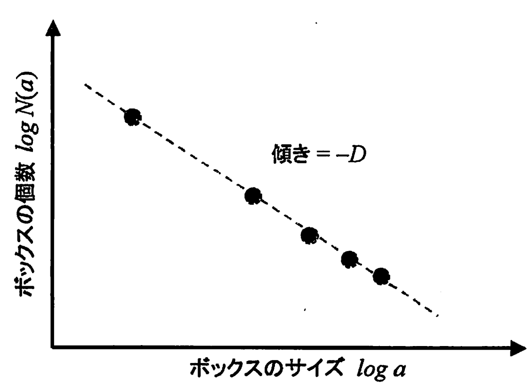


図2　傾きの計測

ボックスの個数 $N(a)$について a の変化にかかわらずつぎの式が成り立つとき、D をボックス次元とよぶ。ボックス次元はフラクタル次元である。

$$N(a) = ca^{-D} \tag{1}$$

具体的に D の値を得るにはまずつぎのように両辺の対数をとる。

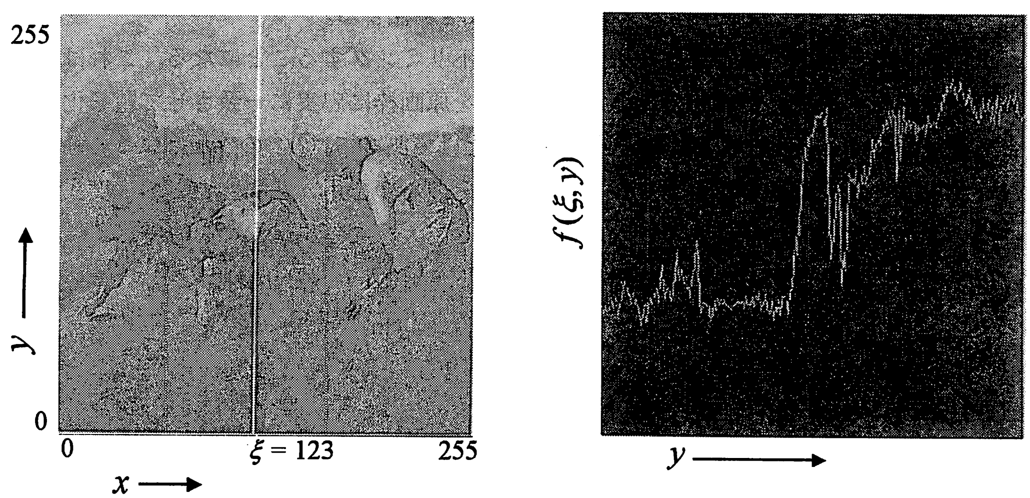
$$\log N(a) = -D\log a + C \tag{2}$$

ただし、$C = \log c$ （定数項）とする。

ここで $N(a)$と a の具体的な数値の組をコンピュータで算出し、両対数表にプロットすれば、図２のように直線の傾き D としてボックス次元が得られる。ただし、いま述べたボックス次元の測定は平面上の曲線についてであった。この方法がただちに１次元の関数（たとえば $f(x)$）について適用可能であることはわかるが、絵画の濃淡変化（２次元の関数）へ適用するには若干の追加的な手続きが必要になる。

３．絵画のフラクタル次元計測法

絵画の濃淡変化を２次元の関数 $f(x, y)$で表すこととする（値域 $0 \le f(x, y) \le M$)。２つの座標変数 x, y の変域をそれぞれ変域 $0 \le x \le L$, および $0 \le y \le K$ とする。いま、座標変数 x の値を $x = \xi$ のように固定すると、関数 $f(x, y)$は１つの変数 y のみの関数 $f(\xi, y)$ （プロファイル）となり、さきに述べた平面上の曲線のボックス次元を測定する方法をそのまま適用できる。図３に $L = 255, K = 255, M = 255, \xi = 123$ の場合の例を示している。ちなみに、同図（ｂ）に示されるプロファイルのボックス次元値は 1.301 である。



（ａ）　（ｂ）

図３　濃淡変化の $x = \xi$ におけるプロファイル $f(\xi, y)$

ここで、$x = \xi$ におけるプロファイル $f(\xi, y)$のボックス次元を $D_y(\xi)$とおく。固定値ξを座標変数 x の変域全体で移動させた場合の $D_y(\xi)$の平均値 D_y をつぎのように表す。

$$D_y = \frac{1}{N}\sum_{\xi} D_y(\xi) \qquad (3)$$

ただし、Nは用いた固定値ξの総数である。

上記は、座標変数xを固定した場合のボックス次元の平均値であるが、もう1つの座標変数yについてまったく同様の手順でボックス次元の平均値D_xを得ることができる。最終的に、2つの平均次元値D_yおよびD_xをさらに平均することによって絵画の濃淡変化$f(x, y)$のボックス次元Dを得る。すなわちつぎのとおりである。

$$D = 1 + (D_y + D_x) / 2 \qquad (4)$$

上式の右辺に1が加えられている理由は、2項目の平均値はあくまで1次元関数(プロファイル)のフラクタル次元であって、2次元関数である濃淡変化$f(x, y)$のフラクタル次元はそれより1だけ増加するからである[4]。

4. フラクタル次元の計測実験

前節で述べた絵画のフラクタル次元(ボックス次元)の測定法にしたがって、実際に絵画を選んで次元計測実験を行う。本稿でのボックス次元計測実験の手順をまとめると以下のようになる。

① 絵画を256×256ピクセルの濃淡画像(濃淡レベルの値域:$0 \le f(x, y) \le 255$)として準備する(座標変数の変域の上限:$L = 255, K = 255$)。

② 両方向のプロファイルを用いて2つの平均次元値D_yおよびD_xを算出する($N = 255$)。

③ (4)式によって絵画全体のフラクタル次元を算出する。

上記の①は、結果として原画を正方形領域でトリミングすることになる。これは実験上の利便性のために行った操作であるが、縦横比を原画枠に忠実に一致させて電子化した場合も濃淡変化$f(x, y)$の座標変数の変域が変わるだけであって、②③の手順はまったく変わらない。トリミング画像のフラクタル次元が原画そのものを用いた場合とどの程度異なるかについては、実験的に評価していない。傾向として大きな差異はないとみている。実験には以下の6つのよく知られている作品を用いた[5, 6](図4～図9参照)。

(1) ミレー「落ち穂拾い」

(2) ゴッホ「ヒマワリ」

(3) セザンヌ「サント・ヴィクトワール山」

(4) 葛飾北斎「山下白雨」(富嶽三十六景より)

(5) 葛飾北斎「神奈川沖波裏」(富嶽三十六景より)

(6) 葛飾北斎「東海道金谷の不二」(富嶽三十六景より)

なお、(1)～(3)は西洋の近代絵画であり、(4)～(6)は浮世絵である。とくに(5)はフラクタル関係の専門解説書[1]の挿し絵にも登場している作品であり、国外でもよく知られている。

図４　落ち穂拾い(ミレー)

図５　ヒマワリ(ゴッホ)

図６サント・ヴィクトワール山(セザンヌ)

図７　山下白雨(北斎)

図８　神奈川沖波裏(北斎)

図９　東海道金谷の不二(北斎)

５．次元計測結果と考察

図４～図９の６つの作品についてフラクタル次元を計測した結果を表１にまとめている。それぞれの絵画について、絵画全体の次元値 D、プロファイルの次元値の最大値（座標変数の固定値）、および最小値（座標変数の固定値）を示している。

表１　フラクタル次元の計測結果

	絵画全体の次元値	プロファイル次元・最大値	プロファイル次元・最小値
「落ち穂拾い」	2.323	1.413 ($y=143$)	1.220 ($y=210$)
「ヒマワリ」	2.397	1.496 ($y=146$)	1.293 ($y=0$)
「ヴィクトワール山」	2.389	1.478 ($y=106$)	1.283 ($y=217$)
「山下白雨」	2.364	1.513 ($y=124$)	1.079 ($y=220$)
「神奈川沖波裏」	2.502	1.621 ($y=27$)	1.179 ($y=243$)
「金谷の不二」	2.534	1.654 ($y=173$)	1.208 ($y=233$)

表１から判明した知見をまとめると以下のとおりである。

◆西洋絵画とくらべると浮世絵のフラクタル次元が平均的に高い。これは西洋絵画と浮世絵の描き方の違いによると思われる。西洋絵画は主に筆で描かれているが浮世絵は版画である。筆で描く場合にはなめらかな濃淡変化をつけやすいが、版画ではやや困難である上、濃淡の急変する場所も多いため浮世絵は傾向として西洋絵画よりもフラクタル次元が高くなると考えられる。

◆プロファイルの次元値の最大値と最小値が、すべて座標変数 y を固定した場合のプロファイルについて現れる。この理由はつぎのとおりである。x を固定した際には、６つの作品がすべて風景画であることからプロファイルに空の部分が入る可能性が高い。空は濃淡変化の少ない部分であり、フラクタル次元を低くする方向に働く。このため、x を固定した場合のプロファイルにはすべて空部分が含まれることによって次元最大値が現れにくいと考えられる。一方、y を固定すると空部分のみのプロファイルが出現するため、最小値もこの場合に現れやすいと考えられる。

◆プロファイルの次元値の最大値と最小値の差に法則性がある。すなわち西洋絵画の場合、すべてこの差がおよそ 0.2 であるのに対し、浮世絵ではこの差がおよそ 0.45 と一定である。この法則性は、やはり描き方のちがいの反映とみなせるであろう。

◆浮世絵「山下白雨」のフラクタル次元が低くなる原因は、構図の単純性にあると考えられる。スケールの大きい要素のみで構図がつくられているため、濃淡変化のプロファイルもスケールの大きい変動成分が支配的であって細かく複雑な変動成分が少なく、結果としてプロファイルの次元値が小さくなっていると考えられる。構図の複雑さ（単純さ）が絵画の濃淡変化に反映している一例であろう。

◆最後に、とくに大きなフラクタル次元を示しているのは、２つの浮世絵「神奈川沖波裏」と「金谷の不二」である。数値的には後者の次元値がやや大きいが、「神奈川沖波裏」はやはり高いフラクタル次元をもつことが判明した。マンデルブローは、この絵が自然界のあ

りさまをさまざまなスケールで描いてみせた点できわめてフラクタル的であると評している[1]。

表１は、絵画の濃淡変化に関するフラクタル次元の計測結果である。少なくとも西洋絵画と浮世絵については、こうした濃淡変化のフラクタル次元という尺度でみたとき、上記のようにいくつかの特性に関して量的な差異が検知された。前述のように、絵画の複雑さは構図や色彩変化の中にも存在する。こうした濃淡変化以外の側面についてもフラクタル次元による評価法を導入することができれば、作品の個性を含め絵画のもつ特性がより詳細に検知され得ることを期待したい。

一方、絵画のデジタルアーカイブ化に関していえば、フラクタル次元の高い絵画はとくに高解像度の電子化が要求されると考えてよい。つまり電子化の精度を考える場合の基準にもなり得ると思われる。

６．人文・社会科学とフラクタル情報学

ここで、人文・社会科学における諸問題の中に、思いがけないかたちでフラクタル性が内在している可能性を考えたい。ボックス次元を導いた（１）式は、いわゆる巾（べき）乗則とよばれている関係式であってフラクタル一般に共通する特性である（図１０参照)。

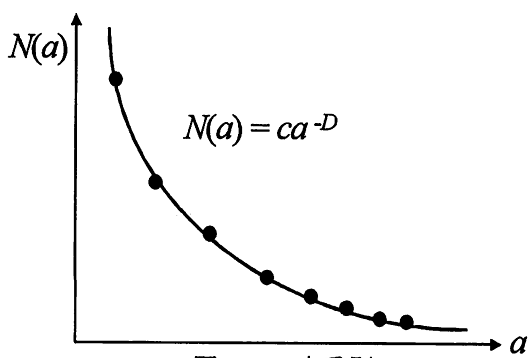


図１０　巾乗則

昨今、巾乗則 $N(a) = ca^{-D}$ が成立する事例は予想以上に多いことがわかってきた[7]。たとえば、変量 a を年収とし、$N(a)$ を年収が a 以上の人口とすると、この巾乗則が成立することが知られている。一般に、調査対象になる国によってフラクタル次元 D がちがってくるが、次元値の差異から各国の社会構造の差異を考えていけるならば面白い。また、円とドルなどの為替レートの変動曲線がフラクタルであるという指摘[8]もある。

人文科学に直結する話題としては、十分長いテキストにおいて $N(a)$ を単語 a の出現度数とした場合にも巾乗則（ジップの法則）が成立することがよく知られている。この場合、単語を出現度数順に並べ替えて図２の要領でフラクタル次元を測定すれば、文を書いた作家の個性を量的に検知できるかも知れない。

自然界に存在する事物にもフラクタル性をもつものが多い。たとえば樹木はフラクタル性をもつ。樹木は、まさにツリー構造（階層構造）の具体例であるが、枝分かれの複雑さはやはり巾乗則からフラクタル次元として計測できる。もし人間やそれにかかわる事物の集団の中に内在する階層構造を抽出し巾乗則で記述することができれば、フラクタル的な視点でそれを分析する道が開かれるであろう。

フラクタルはこれまで主として物理学や数学の分野での話題としてとり上げられてきた。しかし、上述のとおり人間をとりまく諸問題中にもフラクタルが潜んでいる可能性が大いにある。このような場面では、旧来の視点からいったん離れ、フラクタル的な視点で対象を再度ながめてみることによって新しい知見との遭遇が期待できるであろう。これはまさにフラクタル情報学とよぶにふさわしい方法といえよう。

7．むすび

本稿では、絵画の複雑さをフラクタル次元で評価する試みとして、絵画の濃淡変化の複雑さをボックス次元によって計測する一方法を述べた。ボックス次元を計測する方法としては、もちろん本稿で述べた方法以外も考えられるが（３次元ボックスによって濃淡変化の関数面を直接被覆する方法など）、傾向としてみれば結果に大きな差異は現れないものと予想している。本文中に紹介したように、６つの絵画作品（西洋近代絵画と浮世絵版画）をとり上げ、それぞれのフラクタル次元を測定した。この結果をもとに作品の特性を定量的に比較し、いくつかの知見を導いた。

最後にフラクタル情報学の可能性を論じた。それを考える根拠は、巾乗則の成立する事例が人文・社会科学分野においてすでに多数存在している事実にある。一見個別的にみえる事例たちにあってもフラクタル的視点でながめることによって、そこに新しい共通断面が見えてくる可能性に期待したい。

【謝辞】本稿のフラクタル次元の計測実験に協力してくれた大阪電気通信大学情報工学科卒研生青野彰文君に感謝する。

【参考文献】

[1]広中平祐監訳,『フラクタル幾何学』, 日経サイエンス, 東京, 1985 (原著：B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H.Freeman & Co., New York, 1977).

[2]M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.

[3]M. M. Novak (Ed.), *Complexus Mundi – Emergent Patterns in Nature* (*Proc. of Fractal 2006*), World Scientific, Singapore, 2006.

[4]小沢一雅, 『パターン情報数学』, 森北出版, 1999.

[5]http://www1.megaegg.ne.jp/~summy/ （西洋絵画）

[6]http://www.adachi-hanga.com/fugaku/fugaku.html/（浮世絵・北斎）

[7]K. Ozawa & K. Okushima, FFT-Based Estimation of Fractal Dimensions, *Abstract of Fractal 2006*, pp.11-12, Vienna, 2006.

[8]高安秀樹・高安美佐子, 『経済・情報・生命の臨界ゆらぎ』, ダイヤモンド社, 東京, 2000.