コンピュータと教育　59－9
（2001．3．23）

情報教育における「問題解決とプログラミング」の一例題

～Voronoi 図を用いた最適施設配置問題～

森棟　隆一[1)]　蓮沼　賢[1)]　平井　祐佳里[1)]　川崎　宣昭[1), 2)]　山崎　謙介[1), 3)]
[1)] 東京学芸大学大学院　数学教育専攻　[2)] 筑波大学附属高等学校　[3)] 東京学芸大学教育学部

[概要] 2003 年度より高等学校ではじまる学習指導要領（小中学校では 2002 年度より実施）の実施をひかえ小学校，中学校，高等学校の各段階で体系的な情報教育が期待されている．本稿ではその体系的な情報教育を構成できる課題として，「問題解決とプログラミング」に関するひとつの例題を提示し，その扱いについて論じていく．
[キーワード]　教科「情報」，総合的な学習の時間，問題解決能力，Voronoi 図，アルゴリズム

An Example of Problem Solving and Computer Programming in IT Education

～Locational Optimization Through Voronoi Diagram～

Ryuichi MORIMUNE[1)]　Satoshi HASUNUMA[1)]　Yukari HIRAI[1)]
Nobuaki KAWASAKI[1), 2)]　Kensuke YAMAZAKI[1), 3)]

[1)] Graduate School of Tokyo Gakugei University
[2)] Attached High School of Tukuba University　[3)] Tokyo Gakugei University

[Abstract] A new curriculum will be introduced in 2003 for high school education. There is the new subject "Information" in the new curriculum in which systematic framework will be needed. In this paper, we show an example of "problem solving and computer programming".
[Keywords] A New Subject Information, Problem Solving Ability, Voronoi Diagram, Algorithm

1. はじめに

2003 年度より高等学校で実施される普通教科「情報A」では身のまわりにある具体的な問題に関する解決の手順を考えることが重視されている．「情報B」ではさらにコンピュータを効果的に活用するための科学的な考え方や方法を習得させることも重視されている．

また専門教科「情報」における課題研究の節[1]では「情報に関する課題を設定し，その課題の解決を図る学習を通して，専門的な知識と技術の深化，統合化を図るとともに，問題解決の能力や自発的，創造的な学習態度を育てる．」とあり，モデル化とシミュレーションの節では「様々な現象を数理的に捉え，コンピュータで解析し，視覚化するための知識と技術を習得させ，実際に活用する能力と態度を育てる．」と目標が設定されている．

そこで本稿では問題解決能力やその問題解決をするための解法手順（アルゴリズム）の必要性に気づかせるための一例題として，Voronoi 図を用いた最適施設配置問題を提案し，指導の際の留意点を述べる．なおこの問題は，高等学校教科「情報」の枠組みだけで考えるのではなく，小学校での「総合的な学習の時間」や中学校での「総合学習」でも取り組めるように体系的な学習の流れを意識し，構成した．また同時に教科「情報」の課題である「コンピュータを学ぶ必然性を学習者が実感できるようなカリキュラム」を意識して，現実世界にリンクした素材（ポストの配置問題）を提供した．最後にコンピュータに実装し，領域分割問題を例に，それらの問題を児童・生徒がLOGO 言語や C 言語を利用してどのように解決できるか考察する．

2．最適施設配置問題における領域分割

最適施設配置問題とは「ある地域に新たに施設を配置する場合，どこに配置すれば最もよいか」というような類の問題である．その最適施設配置問題を解く前段階として把握すべきことは「ある施設の配置を考えたとき，現在その地域に住む人たちはどの施設を利用するか．それぞれの施設の勢力範囲を図示しなさい」などという領域を分割するという問題がある．最適施設配置問題の前段階の問題である，領域分割の問題を解決する手段のひとつとして Voronoi 図を利用する方法がある．

3．Voronoi 図

Fig.1 のように，平面上に点の集合 $S=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n\}$ が与えられている．

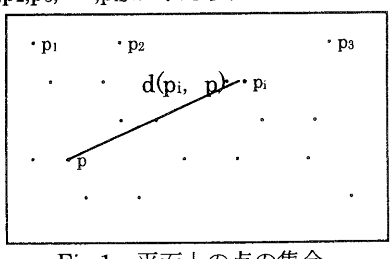


Fig.1　平面上の点の集合

1 点 p_i と S の任意の点 p との距離を $d(p_i,p)$ で表すことにする．そのとき

$$d(p_i,p) \leqq d(p_j,p) \quad j \neq i, j=1,2,3,\cdots,n \qquad \cdots(1)$$

(1)の条件を満たすような点 p の集合を $V(p_i)$ と書き，これを p_i の Voronoi **領域**と呼ぶ．また p_i を Voronoi 領域の**母点**と呼ぶ．すなわち

$$V(p_i) = \{p \mid d(p_i,p) \leqq d(p_j,p), j \neq i, j=1,2,3,\cdots,n\} \qquad \cdots(2)$$

そして，すべての母点 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ の Voronoi 領域についても同様に生成できる．すべての母点 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ からなる Voronoi 領域の集合，すなわち

$$V^n = \{V(p_1),V(p_2),\cdots,V(p_n)\} \qquad \cdots(3)$$

からなる全体の幾何図形のことを，集合 $S=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n\}$ からなる Voronoi **図**と呼ぶ．

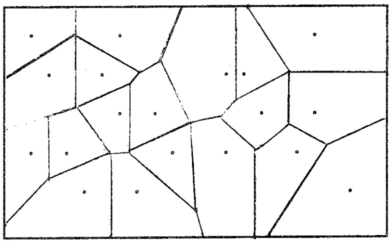


Fig.2　Voronoi 図

4．Voronoi 図の生成

Voronoi 図の生成の手順は次のようになる．

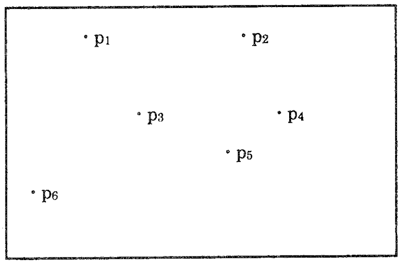


Fig.3　母点 $p_1,\ \cdots,\ p_6$

Fig.3 のように母点 $p_1,\cdots,p_6$ が与えられている．まず，母点 p_1 と母点 p_2 の垂直二等分線を引く．垂直二等分線は平面を二つの領域に分けるが，この一方の領域を半平面と呼ぶ．母点 p_1 が含まれる方を半平面 H_{12} と表す．明らかにこの領域における任意の点は母点 p_2 より母点 p_1 のほうに近い．

(Fig.4 左の部分が半平面 H_{12}) 以下，同様にして母点 p_1 と母点 p_j ($j=2,3,\cdots,n$) との垂直二等分線を引き，母点 p_1 側の半平面を半平面 H_{1j} と表す.

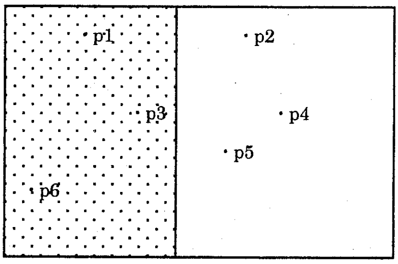


Fig.4　半平面 H_{12} と H_{21}

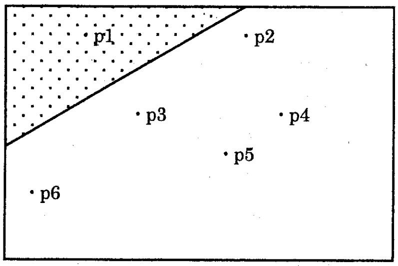


Fig.5　半平面 H_{13} と H_{31}

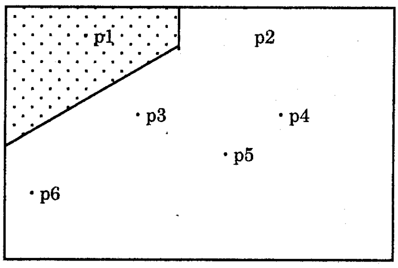


Fig.6　半平面の交わり $H_{12} \cap H_{13}$

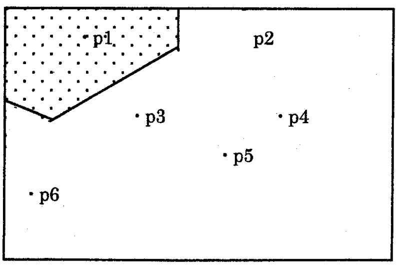


Fig.7　母点 p_1 の Voronoi 領域

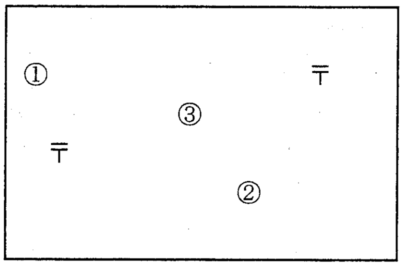
$H_{12} \cap H_{13}$ すなわち半平面 H_{12} と半平面 H_{13} の重なる部分 (Fig.6) は母点 p_1 が母点 p_2 よりも母点 p_3 よりも近い領域になる. 以下同様にして

$$H_{12} \cap H_{13} \cap \cdots \cap H_{1n} \qquad \cdots(4)$$

(4)となる領域は母点 p_1 がどの母点 $p_2, p_3, \cdots, p_n$ よりも近い領域であることがわかる. この領域が母点 p_1 の Voronoi 領域 (Fig.7) となる.

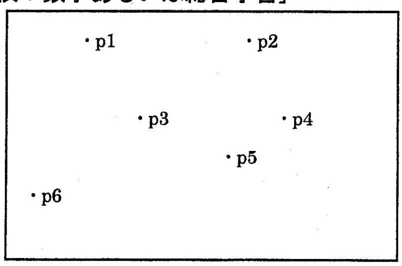
5. 小中高の各段階で指導できる問題例

[小学校：総合的な学習の時間]



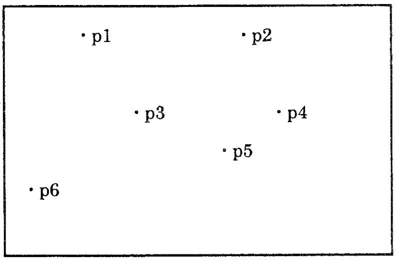
例 1.「A 町には上のように 2 つのポストがあります. ①のところに住んでいる人はどちらのポストに手紙を出しに行くでしょうか. また②や③のところに住んでいる人はどちらのポストに手紙を出しに行くでしょうか. ただし，どの場合も自分の家から一番近いポストに手紙を出しにいくとします.」

[中学校：数学あるいは総合学習]



例 2.「上の地域には p1,･･･,p6 のポストがあります. 手紙を投函するとき，一番近いポストを利用するものとして考えたとき，この地域に住む人はどのポストを利用するかその分布を図示しなさい.」

[高等学校：情報 A あるいは情報 B]



例3.「上の地域には p1,・・・,p6 のポストがあります．手紙を投函するとき，この地域に住む人はどのポストを利用するかその分布を図示しなさい．またこの地域に新たにポストを設置する場合どこにしたらよいか検討しなさい．」

まず小学校段階での例題では，児童は遠近が明らかにわかる①のような点については，おそらく目分量で左側のポストが近いと判断することができるであろう．だが，②や③のように，どちらのほうが近いかはっきりしない点（③は二つのポストの中点に配置する．）では，感覚に頼らず，道具を用いて遠近を判断すると考えられる．この学習活動の中で児童が定規やコンパスの利用といった道具の利用の仕方がわかるようになるだろうし，「距離」という考え方を身につけることができると考えられる．指導上の留意点としては，道具は最初から与えられるのではなく，児童の必要に応じて教師が準備するのが望ましい．

その後より多くのサンプル点を与え，同じように考察させていくうちに，領域を分ける直線の存在に気づくであろう．もちろん児童は垂直二等分線などという用語は知らないであろうが，経験的に実験を繰り返すことでその存在に気づくことができる．手作業でも大雑把にそれぞれの領域を捉えることができるが，コンピュータを使うことでより明確にその境界を示すことができる．しかしコンピュータを用いた際でもサンプル点の数や，場所が悪かったりすると思い通りの領域分割ができなかったりする．サンプル点をどのくらい取ることで境界を明確に表現できるか考えさせてもよいだろう．

例1では児童が以下のような能力を身につけることを期待する．

- 情報を表現するための道具の使い方
- 二点の領域分割の方法
- 幾何的な考え方（垂直二等分線）

中学校段階では垂直二等分線の考え方を数学で学ぶため，2つの母点しかないような場合の問題（例1のような問題）はすぐに解決できる．そこで母点の数を3,4,・・・と増やした場合の Voronoi 領域の作図を指導する．この例題に取り組むことにより半平面の積集合として得られる凸多角形の存在と Voronoi 図の作成ができるようになる．さらに Voronoi 図を構成する辺の交点が，その辺に接する Voronoi 領域の母点が作る三角形の**外心**になっている事に気づかせることで，高等学校の初等幾何への学習の橋渡しとなる．指導上の留意点として，母点の数が少ないときには手作業で Voronoi 図を作成することはそれほど困難ではないが，母点の数が増えてくると作成の手間（計算量）が飛躍的に増大することを気づかせたい．

例2では生徒が以下のような能力を身に付けることを期待する．

- 母点が二つ以上の領域分割の方法
- 幾何的な考え方（高等学校への橋渡し）
- 手間（計算量）の問題を意識する

高等学校の段階では，さらに数学的な側面からは Voronoi 図を構成する辺の交点は，母点が作る三角形の外心になっていること，あるいは Voronoi 図を構成するための手間（計算量）をどのように減らすかに気を払う必要がある．またそれまでの例題では仮定として認められていた“ポストの利用者は最も近いポストへ投函しにいく”という仮定が正しいかの検証を行うことによって，新しい問題の発見とより緻密な問題解決につながると考えられる．指導上の留意点として，適切な解法手順（アルゴリズム）を考えさせ，いかにし

て手間（計算量）を減らす工夫をするか考えさせることである．

例３では生徒が以下のような能力を身に付けることを期待する．

- 最適施設配置問題を解くための橋渡しとしての幾何の考え方
- 仮定が正しいか検証する能力
- 最適なアルゴリズムを選択する能力

６．問題解決の手順

以下は，例１における「どちらのポストに近いか」を判定する際に定規を用いた場合とコンパス（デバイダー）を用いた場合の各アルゴリズムの例である．

＜定規を用いた場合＞

[Step1]
平面上に n 個の点を用意し，k=1 とする．

[Step2]
平面上に二つの点（ポスト）p_1，p_2 を配置し，p_1は青く，p_2は赤く色を塗る．

[Step3]
p_1,p_2 どちらの点に近いか判定する点 q(k)を配置する．

[Step4]
q(k)と p_1 の距離 $d(q(k),p_1)$，q(k)と p_2 の距離 $d(q(k),p_2)$を求め比較する．

[Step5]
q(k)と p_1 の距離 $d(q(k),p_1)$が q(k)と p_2 の距離 $d(q(k),p_2)$より小さければp_1と同じ青色で塗る．そうでなければp_2と同じ赤色で塗る．

[Step6]
k を k+1 に置き換えて k=n+1 ならば終了する。そうでなければ Step3 へもどる．

＜コンパス（デバイダー）を用いた場合＞

[Step1]
平面上に n 個の点を用意しておく．

[Step2]
平面上に二つの点（ポスト）p_1,p_2 を配置し，p_1は青く，p_2は赤く色を塗る．k=1 とする．

[Step3]
$r=r_k$ とする．

[Step4]
どちらの点に近いか判定する点 q(k)を配置する．

[Step5]
q(k)を中心に半径 r_k の円を書く．

[Step6]
もし円の中にどの点（p_1,p_2）も含まれていない場合 r_k に変位Δr を加えて新たに r_k とし，Step4 にもどる．円の中にどちらかの点が含まれていれば含まれている点と同じ色で塗る．どちらの点も含まれている場合は p_1 と同じ青色で塗る．

[Step7]
k を k+1 に置き換えて k=n+1 ならば終了する．そうでなければ，Step3 へもどる．

コンパス（デバイダー）を用いた場合の解法をコンピュータに実装させるときには半径の初期値が r_0 で変位（公差）Δr の等差数列で考えていくであろうが，人間の判断ではそうはいかない．半径の初期値はおそらく目分量でどちらかの母点が収まるような値をまず指定するだろうし，その判断が正しくないときには等差ではなくフレキシブルに変位Δr を変えて判断するであろう．その点はコンピュータと人間で処理の方法が異なってくる．その点は指導上の留意点としてあげられる．

上記の定規を用いた Voronoi 図作成のアルゴリズムを LOGO 言語で実装してみた．まず Fig.8 でポストとなる母点 P_1,P_2 を与えた．画面中央はタートルである．平面を 9×13 のメッシュに区切り，Q_j $(j=1,2,\cdots,117)$ とする．Q_j と P_1,P_2 の距離を比較して，$d(Q_j,P_1) > d(Q_j,P_2)$ならば P_2 と同じ色で，そうでないなら P_1 と同じ色で Qj を中心，半径 5 の円を塗りつぶす。その結果が Fig.9 である．

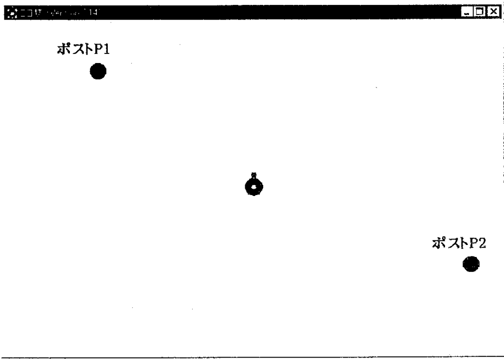


Fig.8　母点 P_1,P_2

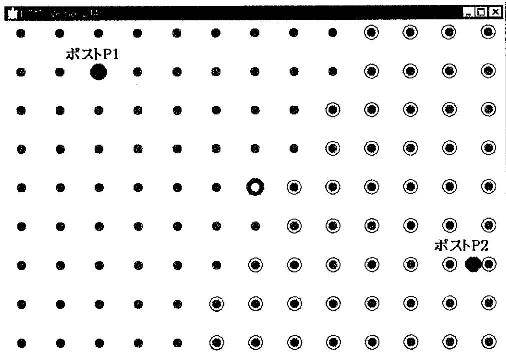


Fig.9　二点の Voronoi 図

以下は例 2 における Voronoi 図作成の計算手順である．より高度な（効率のよい）アルゴリズムは文献[2], [3]に示されているがここでは手作業に近い原始的な方法で提示することがまず大事であると考え，以下の手順を考えた．

[Step1]

256×256(合計 65536 個)の 2 次元座標(Raster)を作成する．$P=\{p_j \mid j=1,2,\cdots,65536\}$

[Step2]

母点の集合を S とし, 各母点の座標の入力する．

2.1 Voronoi 領域を求める点 M の座標（X,Y）を入力する．

2.2 それ以外の点（S＼{M}）Ci の座標(xi,xi){i=1,2,…,n}を入力する．

[Step3]

各母点と Raster 点との距離を計算{j=1,2,…,65536;j=M}する．

3.1 Raster 点と M の距離を計算(L1j とする)する．

3.2 Raster 点と Ci の距離を計算(L2ji とする)する．{i=1,2,…,n}

3.3L1j<L2ji を満たす点の値を 1 とし，満たさない点の値を 0 とする．

[Step4]

Raster 点の属性値が 1 である点を塗りつぶし，M 点の Voronoi 領域（Fig.10）を作成する．

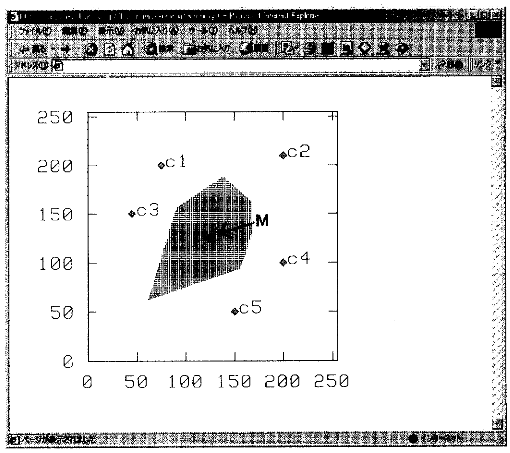


Fig.10　M 点の Voronoi 領域

例 3 での段階では例 1 までに利用した道具で同じように用いることができるか，あるいはどのようなアルゴリズムが Voronoi 図を作成するにあたって適切か，よりよい問題解決をする際に考えなくてはならない．

7．まとめ

本稿では体系的な学習の流れを意識した，問題解決能力やその問題解決をするためのアルゴリズムの必要性に気づかせるための一例題として最適施設配置問題を解くための Voronoi 図を用いた領域分割問題を提案した．

この例題において，技術の進展に左右されない基本的な考え方や方法の科学的な理解をさせ，習得させることのできる教材の一例を示せるのではないかと考えている．総合的な学習の時間で目標

とされている「従来の教科の枠では獲得できないような幅広い視点を身につける」ことや，教科「情報」で重視されている「他教科の役に立つ」といった視点も含まれていることを強調したい．

またプログラミングの演習課題としても，興味深い内容で子ども達の動機付けをするのに適切であると考える．

8．今後の課題

今回の発表ではVoronoi図を用いた領域分割までしか取り扱うことができなかったが，今後は最適施設配置問題についてもこの流れの中で取り扱っていきたい．

参考文献

[1]文部省：「高等学校学習指導要領解説　情報編」開隆堂出版（2000）

[2]岡部篤行・鈴木敦夫：「最適配置の数理」朝倉書店（1992）

[3]杉原厚吉：「FORTRAN　計算幾何プログラミング」岩波書店（1998）