

# 弾性体モデルを用いた図形のマッチング法

志 沢 雅 彦

NTTヒューマンインタフェース研究所

比較的ずれの小さい2つの線図形の辺と頂点の間のマッチングを自動的に求める一方法を提案する。本方法では、2次元平面上において線分列である一方の図形(モデル)が、シート状の線形弾性体の上に乗っていると見なし、そのシートを変形して、その歪エネルギーが最小となる様に、対象の図形(オブジェクト)に重ね合わせるによりマッチングを求める。まず、図形の線分が3角形の辺になる様にシートを3角形分割する。次に、有限要素法を用いて、図形の各頂点の変位からシートの歪エネルギーを計算する2次式を求める。図形間の初期の相対位置関係から得られる変位の満たすべき制約条件のもとで、上記の2次式を最小にする問題を、Lemkeの線形相補性問題として解く。この方法では、マッチング領域としてオブジェクト上の線分列だけでなく平面領域をとることができ、かつ3次元の平面分割された図形にもそのまま拡張することができる。

## A Shape Matching Method Using Elastic Body Model

Masahiko SHIZAWA

NTT Human Interface Laboratories  
1-2356, Take, Yokosuka, Kanagawa, 238-03 Japan

This paper proposes a shape matching method for two dimensional objects that are slightly different from each other. The objects are represented with a sequence of line segments. A model shape on an elastic sheet is matched with target shape. The sheet is deformed so as to match to the target shapes minimizing its strain energy. First, the model shape is tessellated into triangles and a matchness estimation function is derived using finite element method. Each vertices of the model shape has an unknown displacement vectors. Then, an optimization problem of the function with a displacement vector constraint from the target shape is given as a problem of quadratic programming. The problem is solved by a simplex method called Lemke's complementary pivot algorithm. This matching method is able to deal with the object that is represented not only with line segments but also with regions and is applicable to three dimensional matching problems.

## 1. はじめに

弾性体モデルを用いて図形の変形を行う方法を以前提案した<sup>(1)</sup>。この方法では、モデル図形の頂点の移動先となる対象図形上の点、あるいは線分を与えなければならなかったため、そのままでは図形のマッチングには使うことができなかった。本報告では、この方法を線分列で表された図形のマッチングに用いるための、モデルの頂点と対象図形の頂点あるいは線分への対応を自動的に求めるための一つの方法を提案する。線図形のマッチングを求めるにはDPを用いた方法が良く使われる<sup>(2)・(3)</sup>。しかし、DPマッチングでは、評価関数の係数(重み)をどのように定めるべきかの基準が明確でない。本方法は、モデル図形が、線形弾性体のシートに乗っているとみなして(これを弾性体テンプレートと呼ぶ)、それをマッチング対象の図形に歪エネルギーが(局所的)最小になる様に重ねることによってマッチングを行う。この弾性体テンプレートと対象図形は共に線分列で表されているとする。

Fig.1は、本報告で対象とするマッチング問題の例を示した図である。(a)は、マッチング前の初期状態を示した図である。(b)はモデルを変形させて、マッチングさせた後の状態である。この様に、モデル図形の各頂点をオブジェクト図形上のどの位置に移動させればモデル図形の歪が最小となるかを求めることが目的である。Fig.1に示した様に、オブジェクトは、線分だけではなく、領域として指定可能である。本方法では、対象図形が線分列で構成されていることを利用して、Kuhn-Tuckerの平衡条件から導かれる線形相補性問題として定式化する<sup>(4)・(5)</sup>。さらにこの問題を、線分列の接続関係および連続性を考慮したLemkeの相補的軸選択法に帰着させる。この方法では、DPとは異なり、一般には、真の最適マッチングが求まるとは限らないが、ずれが小さい場合にモデル図形とオブジェクト図形のマッチングに使うことができる。また、この方法は、3次元の平面パッチで表現された図形のマッチングにもそのまま拡張することができる。

以下では、第2章において、弾性体テンプレートの作成方法を示し、第3章において、対象図形による拘束条件を用いて問題を定式化し、第4章において、これを線形相補性問題に変換して、Lemke法に幾何学的拘束条件を導入したアルゴリズムを示す。

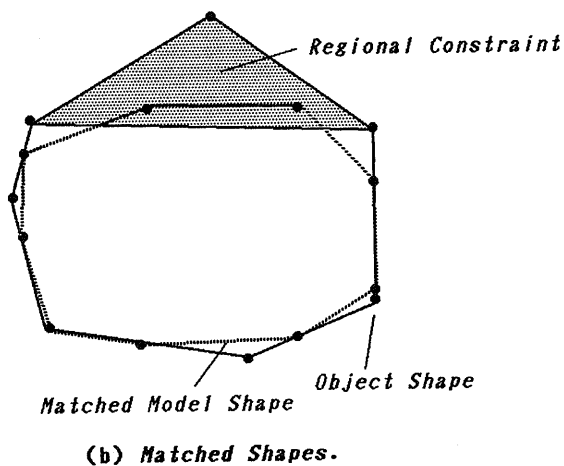
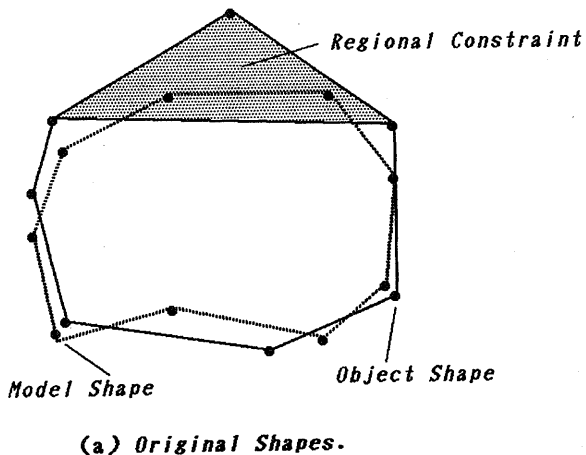


Fig.1. Shape Matching Concept.

## 2. 弾性体テンプレートの作成

文献(1)で述べた方法に従って弾性体モデルを3角形の有限要素によって近似する(Fig.2)。ただし、図形が閉じていなくても良い様に、図形内部だけでなく、その周辺にも弾性体が存在するモデルにする。このとき、有限要素法によって解析すると<sup>(1)</sup>、3角形の各節点の変位ベクトルUを用いて、この弾性体のポテンシャルエネルギーは、

$$\Pi(U) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F \quad (1)$$

ただし,  $U = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_{n_m}^T]^T$

となる。ここで,  $K$ は全体剛性マトリクス,  $F$ は外力,  $u_i$  ( $i = 1 \sim n_m$ ,  $n_m$ はモデルの節点数)は, 図形上の各節点の変位ベクトルである。有限要素法において知られている様に,  $K$ は一般に正定値対称行列になる。この $K$ は, Fig.2の様に図形を3角形領域分割して, 各3角形ごとに計算される要素剛性マトリクスを重ね合わせることによって作られる<sup>(1)</sup>。図形上の節点の変位, 外力をそれぞれ $U_R, F_R$ とし, それ以外の3角形分割によってできた仮想的な節点の変位, 外力をそれぞれ $U_U, F_U$ とする。すなわち, 適当に $K$ の行と列を入れ換えれば次の様に書ける。

$$\Pi(U_R, U_U) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_R \\ U_U \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RU} \\ K_{UR} & K_{UU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ U_U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_R \\ U_U \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_R \\ F_U \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, 仮想的な節点に関する項を消去するため, それらの平衡条件から,  $\Pi$ を変位 $U_U$ に関して偏微分して0とおくことにより,  $U_U$ を次の様に書くことができる。

$$U_U = -K_{UU}^{-1} K_{UR} U_R + K_{UU}^{-1} F_U \quad (3)$$

これを式(2)に代入して, モデルの節点変位 $U_R$ に関する次の式を得る。

$$\Pi(U_R) = \frac{1}{2} U_R^T K U_R - F^T U_R - \frac{1}{2} c \quad (4)$$

ここで,

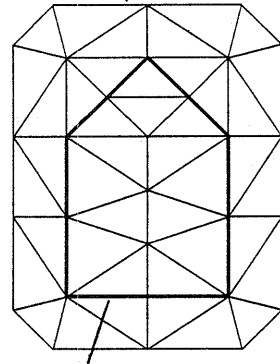
$$K = K_{RR} - K_{RU} K_{UU}^{-1} K_{UR} \quad (5)$$

$$F = F_R - K_{RU} K_{UU}^{-1} F_U \quad (6)$$

$$c = F_U^T K_{UU}^{-1} F_U \quad (7)$$

(5)式の $K$ はやはり正定値対称行列になる。従って, この凸関数 $\Pi(U_R)$ が弾性体テンプレートの歪エネルギーである。

Triangulated Elastic Sheet



Model Shape on the Sheet

Fig.2. Elastic Template for Matching.

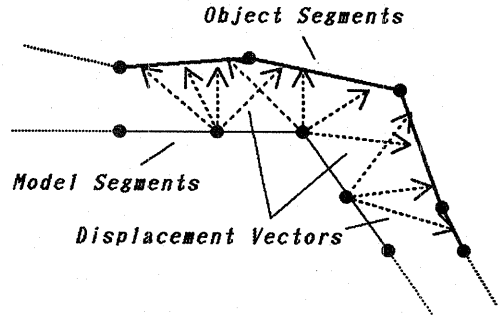


Fig.3. Object Shape as Constraints of Displacement Vectors.

文献(1)では,  $F_U$ は0としたが, ここでは,  $F_U$ は, 一般の値を定数として与えることができる場合を示す。また,  $F_R$ は, 簡単のために,  $F_U$ と同様に扱うことにした。従って, この式は正確に弾性体のポテンシャルエネルギーを表すわけではない。  $F_U$ および $F_R$ によって, 外部からの力場を与えることができる。

### 3. 対象図形のモデル化と問題の定式化

マッチングの対象となる図形をモデル図形の頂点から出る変位ベクトルの先端がとりうる領域として考える (Fig.3)。このような変位ベクトルに関する制約条件を表現するために, 次式の様に, 変位ベクトルをモデルの各頂点から対象図形の各頂点を結ぶベクトル  $v_{ij}$  ( $i = 1 \sim n_m, j = 1 \sim n_o$ )の線形結合とみなす。すなわち, モデル頂点  $i$  の変位ベクトル  $u_i$ は,

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_{ij} v_{ij} \quad (8)$$

と書くことができる。ここで、 $j$  は対象図形の頂点番号である。 $\alpha_{ij}$ には、

$$\sum_{j=1}^{n_0} \alpha_{ij} = 1, \alpha_{ij} \geq 0 \quad (9)$$

という条件が課せられる。更に、各  $i, j$  に対して、同時に  $\alpha_{ij} > 0$  となりうる対  $(i, j)$  の集合の族  $C$  (可能対集合族と呼ぶ) をグラフなどにより表現しておく。これにより、2次元においては、線分あるいは、3角形の組合せから構成される領域を表すことができる (Fig.4(a),(b))。この  $\alpha_{ij}$  に対する条件によって、対応の順序関係の制約 (Fig.4(c)) と、変位の最大範囲の制約 (Fig.4(d)) などをアルゴリズムに取り入れることができ、計算量を減らすことができる。また以下では、説明を簡単にするために、モデルとオブジェクトの全ての対応を候補に挙げて置く場合を述べるが、実際には、対応候補をあらかじめ変位の最大範囲の制約などによって絞っておいてから行えば、候補の部分のみの記憶領域だけで実行することができる。

以上述べたことから、結局、次の様な最適化問題に帰着される。

#### 問題1

「目的関数:

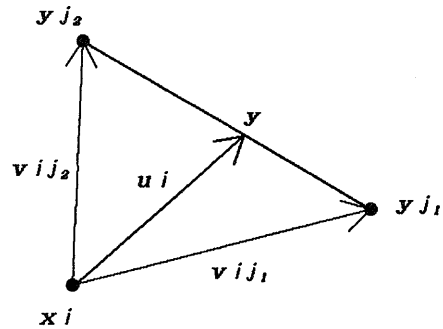
$$\Pi^*(U_R) = \frac{1}{2} U_R^T K U_R - F^T U_R \quad (10)$$

(ただし、 $U_R = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_{n_0}^T]^T$ )

制約条件:

$$\textcircled{1} \quad u_i = \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_{ij} v_{ij}, \quad (11)$$

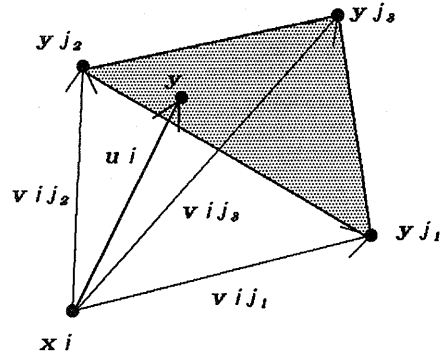
$$\textcircled{2} \quad \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_{ij} = 1, \alpha_{ij} \geq 0, \quad (12)$$



$$\alpha_{ij_1} + \alpha_{ij_2} = 1, \alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2} \geq 0$$

$$u_i = \alpha_{ij_1} v_{ij_1} + \alpha_{ij_2} v_{ij_2}$$

(a) Representation of a Segment.



$$\alpha_{ij_1} + \alpha_{ij_2} + \alpha_{ij_3} = 1,$$

$$\alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, \alpha_{ij_3} \geq 0$$

$$u_i = \alpha_{ij_1} v_{ij_1} + \alpha_{ij_2} v_{ij_2} + \alpha_{ij_3} v_{ij_3}$$

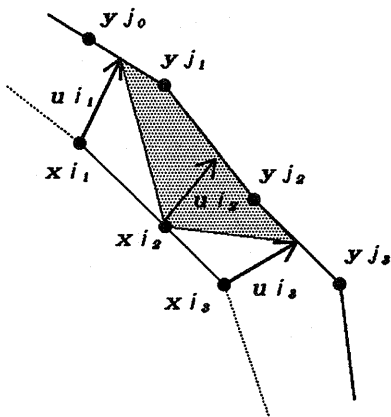
(b) Representation of a Triangular Region.

Fig.4. Representable Constraints Using Linear Variety and Possibility Class.

$$\textcircled{3} \quad \{(i, j) \mid \alpha_{ij} > 0\} \in C \quad (13)$$

この問題を行列を用いた2次計画問題の形に表すために、次の様に  $\alpha_{ij}$  を変数とする形式になおす。まず、線形結合の係数  $\alpha_{ij}$  を次の様に並べた  $(n_m \times n_0, 1)$  ベクトル  $A$  を定義する。これを変数ベクトルとする。

$$A = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n_0}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n_0}, \dots, \alpha_{n_m n_0}]^T \quad (14)$$



if  
 $a_{i_1 j_0} + a_{i_1 j_1} = 1, a_{i_1 j_0}, a_{i_1 j_1} \geq 0$   
 $u_{i_1} = a_{i_1 j_0} v_{i_1 j_0} + a_{i_1 j_1} v_{i_1 j_1}$   
 $a_{i_2 j_2} + a_{i_2 j_3} = 1, a_{i_2 j_2}, a_{i_2 j_3} \geq 0$   
 $u_{i_3} = a_{i_2 j_2} v_{i_2 j_2} + a_{i_2 j_3} v_{i_2 j_3}$

then  
 $u_{i_2} = a_{i_2 j_0} v_{i_2 j_0} + a_{i_2 j_1} v_{i_2 j_1}$   
 $+ a_{i_2 j_2} v_{i_2 j_2} + a_{i_2 j_3} v_{i_2 j_3}$

where

$$a_{i_2 j_0} + a_{i_2 j_1} = 1, \\ a_{i_2 j_0} \geq a_{i_1 j_0}, a_{i_2 j_1} \geq 0$$

or

$$a_{i_2 j_1} + a_{i_2 j_2} = 1, \\ a_{i_2 j_1}, a_{i_2 j_2} \geq 0$$

or

$$a_{i_2 j_2} + a_{i_2 j_3} = 1, \\ a_{i_2 j_2} \geq 0, a_{i_2 j_3} \geq a_{i_3 j_3}$$

(c) Vertex Order Constraint.

**Fig.4. Representable Constraints Using Linear Variety and Possibility Class.**

さらに、 $(n_m, n_m \times n_o)$  行列V、 $(2n_m, n_m \times n_o)$  行列H、 $(2n_m, 1)$  ベクトルEを次の様に定義する。

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} \dots v_{1n_o} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v_{21} \dots v_{2n_o} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{n_m 1} \dots v_{n_m n_o} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$H = \begin{bmatrix} \leftarrow n_o \rightarrow \\ 1 \dots 1 & & & 0 & & \\ & 1 \dots 1 & & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ -1 \dots -1 & & 0 & & 1 \dots 1 & \\ & & -1 \dots -1 & & & 0 \\ & & & \dots & & \\ & 0 & & & & -1 \dots -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$E = [1 \dots 1, -1 \dots -1]^T \quad (17)$$

すると、 $U_R = VA$ となり、 $(n_m \times n_o, n_m \times n_o)$  行列Gおよび、 $(n_m \times n_o, 1)$  ベクトルRを、

$$G = V^T K V \quad (18)$$

$$R = V^T F \quad (19)$$

と定めれば、問題1は次の問題2と等価である。

**問題2**

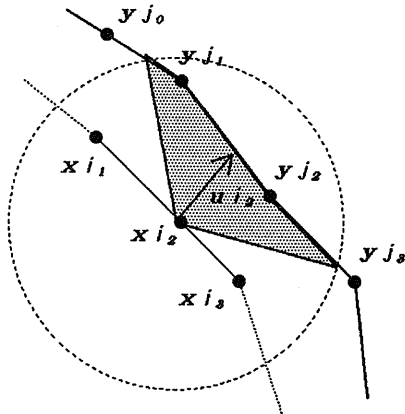
「目的関数：

$$\Pi^*(A) = \frac{1}{2} A^T G A - R^T A \quad (20)$$

制約条件：

$$HA \geq E, \quad A \geq 0, \quad \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\} \in C \quad (21)$$

ここで、Gは非負定値（任意のベクトルxに対して  $x^T G x \geq 0$ ）である。これは、Kが正定値（任意のベクトルxに対して  $x^T G x > 0$ ）であることから明らかである。



(d) Maximum Displacement Constraint.

Fig.4. Representable Constraints Using Linear Variety and Possibility Class.

#### 4. 線形相補性問題への変換とアルゴリズム

##### 4.1 線形相補性問題への変換

問題2は、一般に、許容領域が非凸の2次計画法になるので、最適解を求めることは困難である。しかし、モデル図形とオブジェクト図形間のずれが十分小さければ、対応可能な領域を限定することによって、最適解を求めることができる。

2次計画法に対する解法には、勾配法などの一般の非線形計画法に対する方法を用いることもできるが、ここでは、制約条件をあらかじめ隔て与えようとする制約式が多くなりすぎるので(例えばFig.4(c)参照)、単体表を用いたLemkeの相補軸選択法を用いることにした<sup>(4),(5)</sup>。この方法では、基底変換のときに局所的に制約条件と照合すればよい。

そこで、まず、問題2をKuhn-Tuckerの平衡条件を使って、次の問題3に変換する。

##### 問題3

「次の条件を満たすA, Y, λ, μを求めること。

$$\lambda = GA - H^T Y - R, \quad \mu = HA - E,$$

$$\lambda^T A = 0, \quad \mu^T Y = 0,$$

$$A \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0,$$

$$\{(i, j) \mid \alpha_{ij} > 0\} \in C \quad (22)$$

さらに次の様に置けば、問題4に変換される。

$$W = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} A \\ Y \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -R \\ -E \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} G & -H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

##### 問題4

「次の式を満たすW, Zを求めること。

$$W = Q + MZ, \quad Z^T W = 0,$$

$$W \geq 0, \quad Z \geq 0,$$

$$\{(i, j) \mid \alpha_{ij} > 0\} \in C \quad (24)$$

ここで、行列Mは非負定値行列である。

この様な問題は、一般に、線形相補性問題と呼ばれ、問題2のラグランジュ関数の鞍点を求めることに相当する。これは、次に示す様に、Lemkeの相補軸選択法によって単体表を用いて解くことができる。

##### 4.2 アルゴリズム

通常Lemkeの算法<sup>(4),(5)</sup>では、1つ前の基底変換において基底から出た変数によって、次の基底変換で新しく基底に入れる変数が決まる。したがって、基底から出た変数についてのみ、可能対集合族Cと照らし合わせて選択する。この照合は、変数Aについてのみ考えればよい。

単体表の初期値は、式(24)の線形制約式  $W = Q + MZ$  に対して人為変数  $z_0$  を使って、

$$Q = W - MZ - Jz_0 \quad (25)$$

と書いたものを表にしたものである。ここで、Jは、次の様なm次元ベクトル ( $m = n_m \times n_o + 2n_m$ ) である。

$$J = [1, 1, \dots, 1]^T$$

単体表の初期値を問題2, 問題3の記号で書くと次の様になる。

単体表の初期値

$$\text{basis } y_0 \ y_1 \quad y_m \ y_{m+1} \quad y_{2m} \ y_{2m+1}$$

y1	-R	1		-G	H <sup>T</sup>	-1
y2			1			-1
			...			
y <sub>m</sub>	-E		1	-H	0	-1

(26)

ここで、 $y_i$  ( $i=0 \sim m$ ) は、アルゴリズムを説明するための変数であり、問題4の変数に次の様に対応している。

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ [y_1, y_2, \dots, y_m]^T &= W, \\ [y_{m+1}, \dots, y_{2m}]^T &= Z, \\ y_{2m+1} &= z_0 \end{aligned} \quad (27)$$

また、上から  $j$  番目の基底変数の変数番号を  $\{j\}$  で表し、単体表で上から  $j$  番目の行に対応する基底変数を  $y_{\{j\}}$ 、 $y_i$  列の上から  $j$  番目の要素の値を  $y_{\{j\}i}$  などと書き、 $y_i$  列の基底  $y_j$  に対応する要素の値を  $y_{ji}$  と書くことにする。

この単体表に対して次の様な手順で処理を行う。

アルゴリズム

step 0 /\* 初期処理 \*/

①  $y_{j_0 0} = \max \{0, -y_{10}, -y_{20}, \dots, -y_{m0}\}$

を与える  $j_0$  を求める。

②  $y_{j_0, 2m+1}$  を中心としたピボット演算を行う (変数  $y_{j_0}$  を基底から出し、変数  $y_{2m+1}$  を基底に入れる基底変換)。

③  $j^* := j_0$

step 1 /\* 終了の判定 (解あり) \*/

もし、 $\{j^*\} = 2m+1$  ならば終了。

step 2 /\* 相補対の計算 \*/

$i^* = \{j^*\} + m$  ( $\{j^*\} \leq m$  のとき)

$i^* = \{j^*\} - m$  ( $\{j^*\} > m$  のとき)

step 3 /\* 終了の判定 (解なし) \*/

もし、 $y_{\{j^*\}}$  の列の要素がすべて非正ならば終了。

step 4 /\* 出す基底の決定 \*/

- ①  $y_{\{j^*\}}$  列の要素のうち値が正のものを取り出す。
- ② ①で取り出した各要素の位置  $i$  について、 $y_{i0} / y_{i\{j^*\}}$  が小さい順にソートする。
- ③ ②で並べた順に  $i$  を変化させてゆき、以下の適合条件を満たす  $i$  が求まれば、 $j^{**} = i$  として step 5 に行く。(この様な  $i$  が存在しなければ適合条件を無視して、②での最小値を与える  $i$  を取り、 $j^{**} = i$  とする)。

適合条件: 「 $y_{i^*}$  を基底に入れ、 $y_{\{i\}}$  を基底から出したと仮定し、 $y_{m+1}$  から  $y_{m+n_m n_0 + 1}$  までの基底に対応する変数  $A$  の成分  $\alpha_{pq}$  を正にし、それ以外の  $\alpha_{pq}$  を 0 にしたときに  $\{(p, q) \mid \alpha_{pq} > 0\} \in C$  である。」

step 5 /\* 基底変換 \*/

①  $y_{\{j^{**}\}i^*}$  を中心としたピボット演算を行う (変数  $y_{\{j^{**}\}}$  を基底から出し、変数  $y_{i^*}$  を基底に入れる基底変換)。

②  $j^* = j^{**}$ , step 1へ。

行列  $G$  が非負定値、すなわち、任意のベクトル  $x$  に対して  $x^T G x \geq 0$  なので、はじめのデータが正しく、途中の計算誤差が悪影響を与えなければ、このアルゴリズムは有限回の繰り返しの後、step 1 で終了する<sup>(4), (5)</sup>。このとき、問題4の解は  $y_0$  の列に入っている値で、これが、対応する基底変数の値であり、非基底変数の値は 0 である。この様に、ベクトル  $W$ ,  $Z$  がもとめられ、このうち、 $Z$  の最初から  $m$  個の要素 (ベクトル  $A$  の部分) が問題2の解を与える。

## 5. おわりに

弾性体のシートに図形が書かれているモデルを用いた図形のマッチング方法を提案した。本方法は、2次計画法を用いる方法だけでなく、今後は、外の最適化手法との実験的比較を行う必要がある。また、回転、平行移動に関して不変な方法についても今後の課題である。

## 謝辞

日頃ご指導いただく、酒井高志主幹研究員、奥平雅士主幹研究員、鈴木智主任研究員に感謝いたします。

## <<参考文献>>

- (1) 志沢, 鈴木: "弾性体モデルを用いた図形の変形方法", 情報研資, コンピュータビジョン, 50-1(1987).
- (2) 迫江博昭: "Rubber String Matching法による手書き文字認識", 信学研資, PRL74-20(1974).
- (3) 山田, 山本, 松浦: "2次元DP整合法による超音波腎臓像の認識", 電子通信学会論文誌(D), J68-D, No. 9, pp. 1649-1656(1985).
- (4) 刀根薫: "数理計画", 朝倉書店(1978).
- (5) 小島政和: "相補性と不動点-アルゴリズムによるフーチャー", 産業図書(1981).
- (6) 山田, M. Hospital, T. Kasavand: "回転不変な輪郭DP整合法による3次元物体認識", 信学研資, PRU86-104 (1987).