

## 3次元並進とステレオの計算射影幾何学

川島孝夫 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

物体あるいはカメラの並進運動によって3次元情報を抽出する方法を「計算射影幾何学」の立場から「Nベクトル」を用いて統一的に定式化する。2台のカメラを用いるステレオも、同じ立場から定式化できる。画像処理によって得られた画像データは必ず誤差を伴うので、複数の直線の共通の交点の推定や、全体として矛盾のない形状を復元する最適化手法などの“計算上の問題”を十分に考察する。並進運動は多くの場面で自然に生じるが、カメラの動きを制御しながら物体の3次元形状を認識する“アクティブビジョン”の一手段としても有効である。

## Computational Projective Geometry of 3D Translational Motion and Stereo

Takao Kawashima and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University  
Kiryu, Gunma 376, Japan

Analytical techniques to obtain 3D information from images of objects translating in the scene or images obtained by translating the camera are described in terms of “N-vectors” from the viewpoint of “computational projective geometry”. Stereo analysis is also described in the same framework. In estimating the common intersection of multiple lines and reconstructing globally consistent 3D shape from inaccurate image data, “computational problems” such as noise sensitivity and computational efficiency are fully considered. Our analysis is important because translational motions naturally occur in many circumstances and also the camera can be actively translated to obtain 3D information according to the “active vision” paradigm.

本研究の一部は、矢崎科学技術振興記念財団の助成金によった。

## 1. 序論

物体の運動をとらえた動画像を人間がみると、その3次元形状が容易に知覚できる。その原理は、同じ運動でも物体までの距離が大きいほど網膜上の動きが少ないこと(これを運動視差と呼ぶ)であり、画像が意味のないランダムなパターンであっても3次元的知覚が生じるので、人間の3次元認識の機構をめぐって心理学者が古くから関心をもっていた<sup>(6),(7),(11),(14)</sup>。また、動画像データから物体の形状や運動を計算する方法もいろいろ提案されている。しかし、一般の3次元運動に対してこれを行おうとすると、複雑な方程式を解かなければならない<sup>(8,13-15)</sup>。一方、物体の運動が並進だけであれば、以下に示すように簡潔で美しい結果が得られる。

並進運動は、ビデオカメラを備えたロボットが移動したり、工業製品がベルトコンベアで輸送される場合など、多くの場面で生じる。また、一台のカメラを移動するのではなく、平行移動した位置にもう一台のカメラを設置してもよい。これは、「ステレオ」あるいは「立体視」と呼ばれる3次元理解の基本的な手法でもある。

本論文ではこれらを「計算射影幾何学」<sup>(10)</sup>の立場から「Nベクトル」を用いて統一的に定式化する。応用として、並進する物体の画像から「消失点」を計算することによって物体の3次元形状を復元する方法を示し、実画像を用いた例を示す。このとき、誤差のある複数の直線の共通の交点を推定する計算射影幾何学的手法<sup>(5),(10)</sup>、および画像データが誤差を含んでいても全体として矛盾のない3次元形状を当てはめる最適化手法<sup>(4),(9),(10)</sup>が重要な役割を果たす。

## 2. Nベクトルによる点と直線の表現

次のようなカメラの撮像モデルを考える。Z軸がカメラの光軸と一致するようにXYZ座標系をとり、原点Oをレンズの中心(視点)とみなす。平面 $Z = f$ を画像面とする。ただし $f$ はレンズの中心と撮像面までの距離であり、以下では単に焦点距離と呼ぶ。空間中の点 $(X, Y, Z)$ は、視点Oとその点を結ぶ直線と画像面 $Z = f$ との交点 $(x, y)$ に投影される(図1)。空間座標 $(X, Y, Z)$ と画像座標 $(x, y)$ との関係は、次のようになる。

$$x = fX/Z, \quad y = fY/Z. \quad (1)$$

視点Oから画像面上の点Pを指す単位ベクトル $m$ を点PのNベクトルと呼ぶ<sup>(10)</sup>(図2)。点Pの画像面上の位置はこのNベクトルによって一意的に指定できる。

視点Oと画像面上の直線 $l$ を含む平面の単位法線ベクトル $n$ を直線 $l$ のNベクトルと呼ぶ<sup>(10)</sup>(図2)。直線 $l$ の画像面上での位置および方向は $n$ により一意的に指定できる。

点や直線の位置をNベクトルで表せば、画像面上で画像原点から無限に離れた点でも表すことができるので、

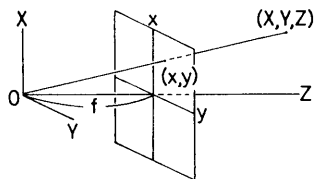


図1 透視変換

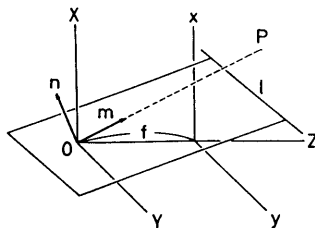


図2 点を表すNベクトルと直線を表すNベクトル

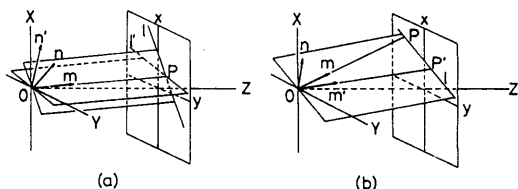


図3 2直線の交点と2点を通る直線の計算

計算が常に有限の範囲で行える。Nベクトルの3成分は画像面を(無限遠点、無限遠直線をつけ加えた)2次元射影空間と見なした場合の(正規化した)同次座標にはならない<sup>(10)</sup>。

Nベクトルを用いると、2点を結ぶ直線や2直線の交点の計算が容易になる。これは射影幾何学における双対性によるものである<sup>(10)</sup>。ベクトルの正規化作用素 $N[\cdot]$ を次のように定義する。ただし、符号は第3成分が正または0となるように選ぶものとする。

$$N[a] \equiv \pm a / \|a\|. \quad (2)$$

【定理1】2直線 $l_1, l_2$ の交点PのNベクトルは、 $l_1, l_2$ のNベクトル $n_1, n_2$ により、次のように表される。

$$m = N[n_1 \times n_2]. \quad (3)$$

(証明) 定義より $n_1$ は視点Oと直線 $l_1$ を通る面に垂直であり、 $n_2$ は視点Oと直線 $l_2$ を通る面に垂直である。これら2平面の交線は、 $n_1$ と $n_2$ の両方に垂直で

ある(図3(a))。点  $P$  の  $N$  ベクトル  $m$  はこの直線の単位方向ベクトルであるから、外積  $n_1 \times n_2$  を正規化したものである。

【定理 2】 2点  $P_1, P_2$  を通る直線  $l$  の  $N$  ベクトルは、 $P_1, P_2$  の  $N$  ベクトル  $m_1, m_2$  により、次のように表される。

$$n = N[m_1 \times m_2]. \quad (4)$$

(証明) 定義より  $m_1$  は視点  $O$  と点  $P_1$  を通る直線の3次元方向を示し、 $m_2$  は視点  $O$  と点  $P_2$  を通る直線の3次元方向を示す。2点  $P_1, P_2$  を通る直線  $l$  と視点  $O$  とにより定まる平面は、 $m_1$  と  $m_2$  の両方に垂直である(図3(b))。直線  $l$  の  $N$  ベクトル  $n$  はこの平面の単位法線ベクトルであるから、外積  $m_1 \times m_2$  を正規化したものである。

式(3)および(4)は、最終的な正規化以外では除算を含まないので、計算は常に有限の範囲内で行われる。したがって、2直線が画像面上でたとえ平行であっても、交点が無限遠に正しく得られる。

### 3. $N$ 速度と軌跡

画像面上を運動する点  $(x(t), y(t))$  の  $N$  ベクトルを  $m(t)$  とするとき、その時間微分  $\dot{m}(t)$  をこの点の  $N$  速度と呼ぶ。

【命題 1】 画像面上を運動する点  $(x(t), y(t))$  の  $N$  速度は次のように与えられる。

$$\dot{m}(t) = \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + f^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + f^2})^3} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f \end{pmatrix} \quad (5)$$

(証明)  $N$  ベクトル  $m(t)$  の定義

$$m(t) = N \left[ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + f^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f \end{pmatrix} \quad (6)$$

を時間  $t$  で微分すれば式(5)が得られる。

【命題 2】 画像面上を運動する点の  $N$  ベクトル  $m(t)$  と  $N$  速度  $\dot{m}(t)$  とは直交する。

$$(m(t), \dot{m}(t)) = 0. \quad (7)$$

(証明)  $N$  ベクトル  $m(t)$  は単位ベクトルであるから、 $\|m(t)\|^2 = (m(t), m(t)) = 1$ 。これを時間  $t$  で微分すれば式(7)が得られる。

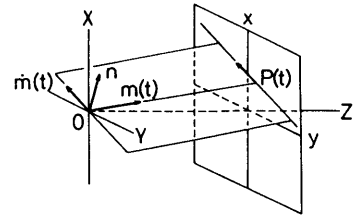


図4 運動する点の  $N$  速度と軌跡の  $N$  ベクトル

【命題 3】 画像面上を直線運動する点の  $N$  ベクトルを  $m(t)$ 、 $N$  速度を  $\dot{m}(t)$  ( $\neq 0$ ) とすると、この点の軌跡の  $N$  ベクトル  $n$  は次のように与えられる。

$$n = N[m(t) \times \dot{m}(t)]. \quad (8)$$

(証明) 図4に示すように  $N$  ベクトル  $m(t)$  も  $N$  速度  $\dot{m}(t)$  も、視点  $O$  と画像面上の点の軌跡とで定める平面上にある。ゆえに軌跡の  $N$  ベクトルはそれらの外積を正規化したものである。

### 4. 並進運動の出現点

空間中を並進する物体を考える。物体の並進運動により、各点は直線運動を行う。物体各点の空間中での軌跡は互いに平行であるから、それらの投影像は画像面上で同一の消失点をもつ直線群となる<sup>(10)</sup>。このような、3次元並進運動をする点の軌跡の画像面上の消失点のことを出現点と呼ぶ。出現点の  $N$  ベクトルは軌跡の3次元方向、すなわち並進の運動方向を表す(以下、“見えない運動”(XY 面上の運動)は考えないことにする)。

【定理 3】 空間中を単位ベクトル  $u$  の方向に直進する点は、画像面上で  $N$  ベクトル  $u$  の出現点をもつ。

(証明)  $u = (u_1, u_2, u_3)$  とおくと、点  $(X_0, Y_0, Z_0)$  を通り、ベクトル  $u$  に沿って直線運動する点の軌跡は、実数をとるパラメータ  $s$  を用いて

$$X = X_0 + su_1, \quad Y = Y_0 + su_2, \quad Z = Z_0 + su_3 \quad (9)$$

と表せる。この直線の投影像は

$$x = f \frac{X_0 + su_1}{Z_0 + su_3}, \quad y = f \frac{Y_0 + su_2}{Z_0 + su_3} \quad (10)$$

となる。 $s \rightarrow \pm\infty$  とすると  $u_3 \neq 0$  のとき次のような出現点をもつ。

$$(fu_1/u_3, fu_2/u_3). \quad (11)$$

この点の  $N$  ベクトルは定義より  $u = (u_1, u_2, u_3)$  である。 $u_3 = 0$  なら  $s \rightarrow \pm\infty$  とすると  $x, y$  は発散するが、 $Z_0 = 0$  (“見えない運動”) でない限り  $x/y \rightarrow$

$u_1/u_2$ となり、 $u$ は無限遠点としての出現点の $N$ ベクトルを表している。

【系 1】空間中を並進運動する複数の点は、画像面上で共通の出現点をもつ。

画像面上では出現点の $N$ ベクトルを次のように計算することができる。

【命題 4】空間中を並進する2点の投影像を $P_1(t)$ 、 $P_2(t)$ とし、それぞれの $N$ ベクトルを $m_1(t)$ 、 $m_2(t)$ とする。出現点の $N$ ベクトル $u$ は次のように与えられる。

$$u = N[(m_1(t) \times m_1(t')) \times (m_2(t) \times m_2(t'))]. \quad (12)$$

ただし、時刻 $t$ 、 $t'$ について4点 $P_1(t)$ 、 $P_1(t')$ 、 $P_2(t)$ 、 $P_2(t')$ は相異なるとする。

(証明) 2点 $P_1(t)$ 、 $P_1(t')$ を通る直線の $N$ ベクトルは、[定理2]より $N[m_1(t) \times m_1(t')]$ である。同様に2点 $P_2(t)$ 、 $P_2(t')$ を通る直線の $N$ ベクトルは $N[m_2(t) \times m_2(t')]$ である。出現点はこれら2直線の交点であるから(図5)、その $N$ ベクトル $u$ は[定理1]より式(12)で与えられる(正規化作用素 $N[\cdot]$ は外側にひとつあれば、内部のものは除いてよい)。

【命題 5】空間中を並進する2点の投影像を $P_1(t)$ 、 $P_2(t)$ とし、それぞれの $N$ ベクトルを $m_1(t)$ 、 $m_2(t)$ 、 $N$ 速度を $\dot{m}_1(t) (\neq 0)$ 、 $\dot{m}_2(t) (\neq 0)$ とする。出現点の $N$ ベクトル $u$ は次のように与えられる。

$$u = N[(m_1(t) \times \dot{m}_1(t)) \times (m_2(t) \times \dot{m}_2(t))]. \quad (13)$$

ただし、2点の画像面上での軌跡は同一直線上にはないとする。

(証明) [命題3]より2点 $P_1(t)$ 、 $P_2(t)$ の軌跡の $N$ ベクトルはそれぞれ $N[m_1(t) \times \dot{m}_1(t)]$ 、 $N[m_2(t) \times \dot{m}_2(t)]$ である。これらの軌跡の交点の $N$ ベクトルは、[定理1]より式(13)で与えられる(内側の正規化作用素は除いてよい)。

## 5. 誤差のあるときの出現点の計算法

[命題4]、[命題5]により、出現点は画像面上での2点の2時刻での位置、あるいは1時刻での位置と速度から簡単に決定できる。しかし、3個以上の点、あるいは三つ以上の時刻での位置が与えられたとき、上の[命題4]、[命題5]の方法で出現点を計算しようとする、画像に誤差があれば、どの点、あるいはどの時刻を選ぶかによって結果が異なる場合がある。そのような場合には

- (i) まず各点の複数の時刻での位置に共通の直線をあてはめ、
- (ii) 次にそれらの直線の共通の交点を推定すればよい。

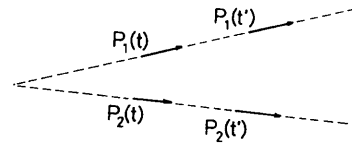


図5 並進運動する点の軌跡と出現点

これらはすべて $N$ ベクトルのみを用いて計算できる。このためには、次の[方法1]、[方法2]が合理的である(詳細な議論は文献(5,10)参照)。

【方法1】与えられた直線を $l_\alpha$ 、その $N$ ベクトルを $n_\alpha$ 、 $\alpha = 1, \dots, N$ とする。一点で交わると仮定したときの共通の交点 $\bar{P}$ の $N$ ベクトル $\bar{m}$ は、次のように定義するモーメント行列 $N$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルによって与えられる。

$$N = \sum_{\alpha=1}^N n_\alpha n_\alpha^T. \quad (14)$$

(導出)  $N$ ベクトル $\bar{m}$ の点 $\bar{P}$ がすべて直線 $l_\alpha$ 、 $\alpha = 1, \dots, N$ の上であれば、すべての $\alpha = 1, \dots, N$ に対して $(\bar{m}, n_\alpha) = 0$ となる。そこで $\sum_{\alpha=1}^N (\bar{m}, n_\alpha)^2$ を最小にする単位ベクトル $\bar{m}$ を求める。式(14)のモーメント行列を用いれば

$$\sum_{\alpha=1}^N (\bar{m}, n_\alpha)^2 = (\bar{m}, N\bar{m}) \quad (15)$$

と書ける。よく知られているように、この二次形式を最小にする単位ベクトル $\bar{m}$ は、モーメント行列 $N$ の最小固有値に対する固有ベクトルである。

【方法2】点 $P_\alpha$ の $N$ ベクトルを $m_\alpha$ 、 $\alpha = 1, \dots, N$ とする。これらの点が同一直線上にあるとしたときの共通の直線 $\bar{l}$ の $N$ ベクトル $\bar{n}$ は、次のように定義するモーメント行列 $M$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルによって与えられる。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha m_\alpha^T. \quad (16)$$

(導出) [方法1]で点と直線との役割を入れ替えれば得られる。射影幾何学の双対性<sup>(10)</sup>により、この式は与えられた点に当てはめ直線の $N$ ベクトルを与える。

## 6. 並進運動からの3次元復元

物体が空間中を並進運動すれば、物体上の各点がそれぞれ直線運動するだけでなく、物体上の任意の2点を結ぶ線分が平行移動する。この性質を用いれば、並進運動

する物体の画像のみから、その3次元形状を一意的に復元することができる。

**【命題 6】** 空間中を並進する2点を結ぶ線分の投影像を  $P_1(t)P_2(t)$  とする。端点  $P_1(t), P_2(t)$  の  $N$  ベクトルをそれぞれ  $m_1(t), m_2(t)$  とすれば、その線分の3次元方向は次の単位ベクトル  $v$  によって与えられる。

$$v = N[(m_1(t) \times m_2(t)) \times (m_1(t') \times m_2(t'))]. \quad (17)$$

ただし、時刻  $t, t'$  について4点  $P_1(t), P_1(t'), P_2(t), P_2(t')$  は相異なるとする。

(証明) 線分  $P_1(t)P_2(t)$  の  $N$  ベクトルは[定理2]より  $N[m_1(t) \times m_2(t)]$  である。時刻  $t, t'$  について2線分  $P_1(t)P_2(t)$  と  $P_1(t')P_2(t')$  は空間中で互いに平行な直線の投影像であるから、それらの消失点の  $N$  ベクトルが3次元方向を示す<sup>(10)</sup>。消失点は2線分を延長した交点であるから(図6)、その  $N$  ベクトルは[定理1]より式(17)で与えられる。

**【命題 7】** 空間中を並進する2点を結ぶ線分の投影像を  $P_1(t)P_2(t)$  とする。端点  $P_1(t), P_2(t)$  の  $N$  ベクトルをそれぞれ  $m_1(t), m_2(t)$ 、 $N$  速度をそれぞれ  $\dot{m}_1(t) (\neq 0), \dot{m}_2(t) (\neq 0)$  とすると、その線分の3次元方向は次の単位ベクトル  $v$  によって与えられる。

$$v = N[|m_1(t)m_2(t)\dot{m}_2(t)|m_1(t) - |m_1(t)m_2(t)\dot{m}_1(t)|m_2(t)]. \quad (18)$$

ただし、ベクトル  $a, b, c$  のスカラー3重積を  $|abc|$  で表す。また、線分の投影像の運動は自分自身に沿う直線運動ではないものとする。

(証明) [命題6]で  $\Delta t = t' - t$  とおき、

$$\begin{aligned} m_1(t') &= m_1(t) + \dot{m}_1(t)\Delta t + O(\Delta t^2), \\ m_2(t') &= m_2(t) + \dot{m}_2(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (19)$$

を式(17)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} v &= N[(m_1(t) \times m_2(t)) \times [(m_1(t) + \dot{m}_1(t)\Delta t + O(\Delta t^2)) \times (m_2(t) + \dot{m}_2(t)\Delta t + O(\Delta t^2))]] \\ &= N[(m_1(t) \times m_2(t)) \times [m_1(t) \times m_2(t) + (\dot{m}_1(t) \times m_2(t) + m_1(t) \times \dot{m}_2(t))\Delta t + O(\Delta t^2)]] \\ &= N[[(m_1(t) \times m_2(t)) \times (\dot{m}_1(t) \times m_2(t) + m_1(t) \times \dot{m}_2(t))]\Delta t + O(\Delta t^2)]. \end{aligned} \quad (20)$$

正規化作用素  $N[\cdot]$  の内部に任意の零でない数をかけても結果は変わらない。そこで、まず内部を  $\Delta t$  で割り、次に  $\Delta t \rightarrow \infty$  の極限をとる。最後に公式  $(a \times b) \times (a \times c) = |abc|a$  を用いれば式(18)を得る。

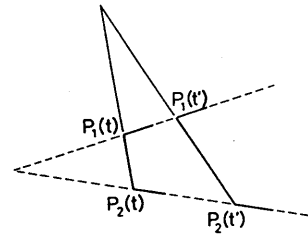


図6 平行移動する線分の消失点

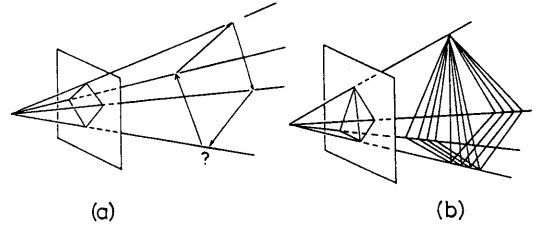


図7 (a)3次元復元の矛盾. (b)矛盾のない形状を当てはめる最適化手法.

以上より、空間中を並進する物体の2時刻での投影像、あるいは1時刻での投影像とその速度が与えられれば、物体の任意の2点を結ぶ線分の3次元方向が一意的に定まる。これは物体の3次元形状がスケール因子を除いて唯一に定まることを意味する。このとき、物体が並進しているという知識のみがあればよく、並進の向きや大きさに関する知識は不要である(並進の向きは出現点を計算すれば結果的に得られる)。ただし、異なる時刻での投影像間の対応関係は必要である。

物体を構成する任意の線分の3次元方向が分かると、それらを空間中にその方向通りに、かつ投影によって観測される画像が得られるように配置すれば、物体の3次元形状が復元できる。しかし、画像処理の誤差により、各線分の3次元方向に間に矛盾が生じたり、配置する順序によって復元結果が異なったりする(図7(a))。これを防ぐためには、全体を矛盾のないように調節する最適化手法<sup>(4),(9),(12)</sup>が必要となる(図7(b))。

**【例】** 図8は並進運動する物体の画像を重ねて表示した  $512 \times 512$  画素の画像である。焦点距離は文献(10)の方法で推定すると、 $f = 1200$ (画素)である。対応する辺の消失点を計算することによって各辺の3次元方向が定まる。これに最適化手法<sup>(4),(9),(12)</sup>を施して矛盾のない形状を定めたものが図9である。上から見た図および横から見た図を示す。

## 7. ステレオとエビ極線、エビ極点

物体を並進させることは、物体を静止させてカメラを

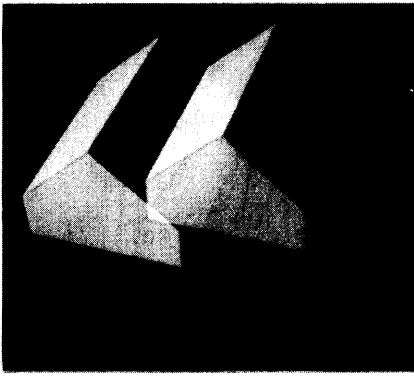


図8 並進運動する物体の画像

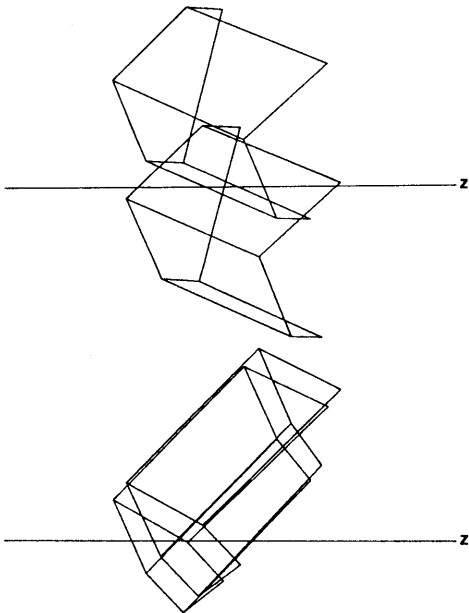


図9 図8から最適化によって復元した3次元形状

反対方向に並進させることと等価である。あるいは、並進した位置にもう1台のカメラをあらかじめ設置しておき、2台のカメラで撮像してもよい。これはステレオあるいは立体視と呼ばれる手法であり、画像による3次元認識の基本的手法の一つである。一般には2台のカメラをどのように配置してもよいが、取り扱いが便利なのは一方のカメラを並進した位置に他方のカメラを置くものである。これを平行ステレオと呼ぶことにする。

どちらか一方のカメラを基準にとり、そのカメラに対して  $XYZ$  座標系をとる。この座標系に関する他方のカメラのレンズの中心を  $(b_1, b_2, b_3)$  とする。カメラの

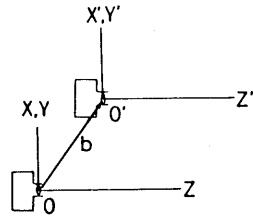


図10 平行ステレオの基線ベクトル

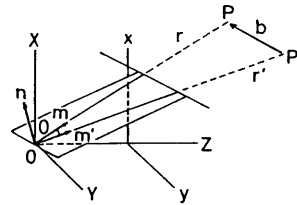


図11 エピ極線と視差

移動量を表すベクトル  $b = (b_1, b_2, b_3)$  を基線ベクトルと呼ぶ(図10)。2台のカメラの画像面を同一視すれば、物体は静止したカメラに相対的に  $-b$  だけ並進したことになる。したがって、並進運動に関する結果はすべて平行ステレオに関する結果について言い換えることができる。

並進運動では画像面上の点の軌跡が1つの出現点から放射状に現れるが、軌跡と出現点にあたるものをステレオではそれぞれエピ極線、エピ極点と呼ぶ。すなわち、対応する2点を結ぶ直線がエピ極線であり、それらはすべてエピ極点で交わる。[定理3]と[系1]は次のように言い換えられる。

**【定理 4】** 基線ベクトル  $b$  の平行ステレオは、画像面上に  $N$  ベクトル  $u = N[b]$  のエピ極点を持ち、すべてのエピ極線はそこで交わる。

[命題4]を用いると、2組の対応点対が与えられればエピ極点の  $N$  ベクトルが式(12)で計算できる。しかし、ステレオではエピ極点が基線ベクトル  $b$  から直接に計算できるので、まずエピ極線を計算し、逆にこれを対応点探索に利用することができる。次の命題は明らかである(図11)。

**【命題 8】** 基線ベクトル  $b$  の平行ステレオでは、 $N$  ベクトル  $m$  の点を通るエピ極線の  $N$  ベクトルは次のように与えられる。

$$n(m) = N[b \times m]. \quad (21)$$

これは画像面上のすべての点(および無限遠点)にその点を通るエピ極線を定義する写像である。そこで

$n(m)$ をエビ極線写像と呼ぶ。これは基線ベクトル  $b$  のみによって定義され、画像の内容によらない。

## 8. 視差写像と距離写像

第1のカメラの画像面上の  $N$ ベクトル  $m$  の点に対応する第2のカメラの画像点は、式(21)で定義されるエビ極線上になければならないから、このエビ極線上のみを探索すればよい。この事実はエビ極線拘束条件と呼ばれている。

$N$ ベクトル  $m$  の点に対応する点の  $N$ ベクトルを  $m'$  とする。ベクトル  $m$  と  $m'$  のなす角  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  をこの点の視差と呼ぶ(図11)。視差によってすべての3次元情報が得られる。

まず視差写像を

$$\theta(m) = \cos^{-1}(m, m') \quad (22)$$

で定義する。これは画像面上のすべての点(および無限遠点)に、その点と対応する点との視差を定義する関数である。次に  $N$ ベクトル  $m$  の点の空間中での位置を  $P$  とし、視点からその点  $P$  までの距離を  $r(m)$  とする(図11)。これは画像面上の点(および無限遠点)に、その点の視点からの距離を定義する写像である。これを距離写像と呼ぶ。距離写像  $r(m)$  は視差写像  $\theta(m)$  から次のように一意的に計算できる。

【補題 1】 基線ベクトル  $b$  の平行ステレオでは、距離写像  $r(m)$  が次のように与えられる。

$$r(m) = (b, m) + \|bmn(m)\| \cot \theta(m) \quad (23)$$

ただし  $n(m)$ ,  $\theta(m)$  はそれぞれエビ極線写像、視差写像であり、 $|abc|$  はベクトル  $a, b, c$  のスカラ三重積を表す。

(証明) 第1のカメラの画像面を基準にして考えると、空間中の物体点は  $-b$  だけ並進する。視点を  $O$  とし、 $N$ ベクトル  $m$  の物体点を  $P$  とすると、 $\vec{OP} = rm$ ,  $r > 0$  と表せる。これが  $-b$  だけ並進した点を  $P'$  とし、 $\vec{OP}' = r'm'$ ,  $r' > 0$  とすると

$$rm - r'm' = b \quad (24)$$

となる(図11)。画像面上でこれらの2点の像が  $N$ ベクトル  $n$  のエビ極線上にあれば、 $n$  は  $m, m'$  と直交する。したがって、ベクトル  $m, m'$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$m' \times m = \pm n \sin \theta \quad (25)$$

が成立する。式(24)と式(25)より

$$\begin{aligned} |bmn| &= (b, m \times n) = (rm - r'm', m \times n) \\ &= r(m, m \times n) - r'(m', m \times n) \\ &= -r'(n, m' \times m) = \mp r' \sin \theta \end{aligned} \quad (26)$$

となる。一方、式(24)より

$$\begin{aligned} (b, m) &= (rm - r'm', m) = r(m, m) - r'(m', m) \\ &= r - r' \cos \theta \end{aligned} \quad (27)$$

となるから、 $r' > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  に注意すれば

$$r = (b, m) + r' \cos \theta = (b, m) + \left| \frac{bmn}{\sin \theta} \right| \cos \theta \quad (28)$$

より式(23)を得る。

【定理 5】 基線ベクトル  $b$  の平行ステレオでは、距離写像  $r(m)$  が次のように与えられる。

$$r(m) = (b, m) + \|b \times m\| \cot \theta(m). \quad (29)$$

ただし  $\theta(m)$  は視差写像である。

(証明) [補題1]の式(23)に[命題8]の式(21)を代入し、

$$\begin{aligned} |bmnN[b \times m]| &= |bm \times m| / \|b \times m\| \\ &= (b \times m, b \times m) / \|b \times m\| = \|b \times m\| \end{aligned} \quad (30)$$

に注意すれば式(29)を得る。

このように距離写像  $r(m)$  は視差写像  $\theta(m)$  と基線ベクトル  $b$  のみから一意的に定まる。

一方、6節の結果によると、物体が並進する画像では対応点さえ定まれば、並進に関する知識なしに物体の3次元形状がスケール因子を除いて一意的に定まる。同じことがステレオでもいえる。すなわち、基線ベクトル  $b$  が未知でも、距離写像  $r(m)$  がスケール因子を除いて一意的に定まる。

まず、画像面上での対応が(少なくとも2組)与えられればエビ極点が定まる。そのエビ極点の  $N$ ベクトルを  $u$  とし、その符号を基線ベクトルの方向に定めれば、[定理5]の式(29)に  $b = ku$ ,  $k > 0$  を代入することによって、距離写像  $r(m)$  を次のようにすべて画像に関する量のみで表すことができる。

【系 2】 エビ極点の  $N$ ベクトル  $u$  の符号を基線ベクトルの方向に定めれば距離写像  $r(m)$  がスケール因子を除いて次のように一意的に定まる。

$$r(m) = k[(u, m) + \|u \times m\| \cot \theta(m)]. \quad (31)$$

本論文では平行ステレオのみを考えたが、実はすべての結果は任意のステレオに対しても成立する。平行ステレオではカメラを基準とする座標系がそれぞれ互いに平行であるから、画像データを記述する  $N$ ベクトルがそれぞれの画像について独立に計算できる。しかし、座標系が互いに平行でなくても、第2のカメラに関する  $N$ ベクトルを第1のカメラに関する座標系で表現すれば、本節の結果はすべてそのまま成立する。これは、 $N$ ベクトルが本質的に空間中の点や直線の位置や方向を表すもので

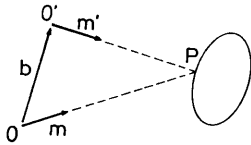


図12 Nベクトルで表される関係はレンズの光軸や画像面の向きによらない

あって、座標系(すなわちレンズの光軸や撮像面)の向きによらない不変な概念だからである(図12)。

## 9. まとめ

本論文では物体あるいはカメラの並進運動から物体に関する3次元情報を抽出する方法を、「計算射影幾何学」<sup>(10)</sup>の立場から「Nベクトル」を用いて統一的に定式化した。

本論文で点や直線の「Nベクトル」と呼ぶものは実質的にはいろいろな形で従来から用いられてきた。例えば、魚眼レンズによる画像の球面表示<sup>(2)</sup>や、カメラの軸周りの回転から生じる画像の円筒面表示<sup>(3)</sup>を利用して、物体やカメラの並進から3次元情報を抽出する試みがある。

そのような研究を見ると、そのような特殊なレンズやカメラでそのような(球面や円筒)による表示を行ったから3次元情報が得られた、という印象を受ける。しかし、実際は物体または視点の並進ということ自体にそのような関係が内在しているのであって、装置やデータの表示法とは無関係に成立する。このことを把握することが本論文の目的のひとつである。そのため本論文では「射影幾何学」<sup>(10)</sup>の立場から、ステレオとあわせて最も一般的な定式化を与えた。

並進はベルトコンベアによる輸送など、多くの場合で自然に生じるが、そのような“受動的”な並進に対応するだけでなく、3次元形状認識を目的として“積極的”にカメラを並進させながら計測を行ってもよい。このような考えはアクティブビジョン<sup>(1)</sup>と呼ばれ、今日注目を集めている。本論文の定式化はそのようなアクティブな手法にも活用することができる。

本論文ではまた、誤差のある複数の直線の共通の交点の推定<sup>(5),(10)</sup>や矛盾のない形状を復元する最適化手法<sup>(4),(9),(12)</sup>などの“計算上の問題”を十分考慮した。そして、実際の画像にこれらの手法を適用して3次元形状復元を行った例を示した。

## 参考文献

1. J. (Y.) Aloimonos, I. Weiss and A. Bandyopadhyay: Active vision, *Int. J. Comput. Vision*, **1** (1988), 333-356.

2. 稲本康, 内山隆, 安川祐介, 森田俊彦: 球面写像による線分の3次元方位と距離の計測, *情報処理学会研究報告* 86-CV-45(1986-11).

3. 石黒浩, 山本雅史, 辻三郎: 全方位視野像の解析, *情報処理学会研究報告* 89-CV-61 (1989-7).

4. K. Kanatani: Reconstruction of consistent shape from inconsistent data: Optimization of  $2\frac{1}{2}D$  sketches, *Int. J. Comput. Vision*, **3**(1989), 261-292.

5. 川島孝夫, 金谷健一: 画像データの幾何学的構造の仮説検定, *情報処理学会研究報告* 89-CV-61 (1989-7).

6. J. J. Koenderink and A. J. van Doorn: Invariant properties of the motion parallax field due to the movement of rigid bodies relative to an observer, *Optica Acta*, **22**(1975), 773-791.

7. J. J. Koenderink and A. J. van Doorn: Local structure of movement parallax of the plane, *J. Opt. Soc. Am.*, **66**(1976), 717-723.

8. H. C. Longnet Higgins: A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections, *Nature*, **293-10** (1981), 133-135.

9. 前原一夫, 川島孝夫, 金谷健一: 直交性仮説による多面体の3次元形状復元, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J72-D-II, No.6 (1989), 887-895.

10. 小野寺康浩, 金谷健一: 計算射影幾何学, *情報処理学会研究報告*, 89-CV-61 (1989-07).

11. D. Regan, K. Beverly and M. Cynader: The visual perception of the motion in depth, *Sci. Am.*, **241-1** (1979), 122-133.

12. 田中俊江, 川島孝夫, 金谷健一: 平行性仮説による多面体の3次元形状復元, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J72-D-II, No.4 (1989) 517-525.

13. R. Y. Tsai and T. S. Huang: Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameters of rigid objects with curved surfaces, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **6**(1984), 13-27.

14. S. Ullman: *The Interpretation of Visual Motion*, MIT Press, Cambridge, MA, 1979.

15. J. Wang, T. S. Huang and N. Ahuja: Motion and structure from two perspective views: Algorithms, error analysis, and error estimation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **11** (1989), 451-476.

16. X. Zhuang, T. S. Huang and R. M. Haralick: Two-view motion analysis: A unified algorithm, *J. Opt. Soc. Am.*, **A-3**(1986), 1492-1500.