

2 画像からの平面の3次元運動の計算

森尻智昭 小野寺康浩 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

カメラに相対的な平面物体の3次元運動を2枚の画像から計算する最も洗練された解法を示す。さらに、このとき必要となる画像の変換パラメータを直線の対応関係から推定する手法を提案する。これらの手法は、点や直線を表す「Nベクトル」などの「計算射影幾何学」の概念を用いて記述されている。最後に、実際の画像を用いた実験例を示す。本論文の手法は、物体の3次元運動の計測やカメラキャリブレーションなどの広い範囲の問題に役立つ。

Computation of 3D Motion of a Planar Surface from Two Images

Tomoaki Morijiri, Yasuhiro Onodera and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University
Kiryu, Gunma 376, Japan

An algorithm for computing, from two images, 3D motion of a planar object relative to the camera is presented in a refined form. Also, a method of estimating the image transformation parameters, which are necessary for the motion computation, is proposed in such a way that the computation is based on line-to-line correspondences between the two images. These algorithms are described in terms of "computational projective geometry", in particular, "N-vectors" representing points and lines on the image plane. Finally, a numerical example using real images is presented. The results in this paper are useful in many problems including measurement of general 3D object motion and camera calibration.

本研究の一部は文部省科学研究費一般研究 C(No.02805043) によった。

1. まえがき

平面物体が移動する、あるいは静止した平面に対してカメラが移動する場合の3次元運動を2枚の画像から計算する方法を考える。これは室内環境における移動ロボットなどの多くの場合で重要となる問題である。

この問題に対する解の存在は Tsai and Huang⁴⁾, Tsai, et al.⁵⁾ に論じられている。また Svensson and Naeye³⁾ は“*n*次元画像”に拡張した議論を行っている。しかし、明確なアルゴリズムの形で示されたものはなかった。

本論文ではこの解法を最も洗練された形で示す。これは画像の「変換パラメータ」を計算し、その変換パラメータから「面のパラメータ」と「運動パラメータ」を計算する、という2段階からなる。

変換パラメータは4点以上の対応点の組があれば最小二乗法などで定まる。しかし、実際の画像処理では「エッジ検出」、「直線当てはめ」などを用いるので、直線データのほうが点データより容易に、かつ精度良く求まる。そこで本論文では直線の対応から変換パラメータを推定する方法を示す。このとき「*N*ベクトル」、「極点」、「極線」などの「計算射影幾何学」の概念^{1,2)}が重要な役割を果たす。

最後に実際の画像を用いて実験を行った例を示す。

2. 透視変換と平面の投影

カメラのレンズの中心(視点)を原点として、レンズの光軸を*Z*軸とするXYZ座標軸をとると、カメラの撮像は次のような透視変換でモデル化される。(図1)

$$x = f \frac{X}{Z}, \quad y = f \frac{Y}{Z} \quad (2.1)$$

以下、定数*f*を単に焦点距離と呼ぶ。

空間中の平面

$$Z = pX + qY + r \quad (2.2)$$

を考える。 $\{p, q\}$ は面の勾配、*r*は*Z*軸に沿う面までの距離である $\{p, q, r\}$ を合わせて面のパラメータと呼ぶ。式(2.1)と式(2.2)を合わせると、この平面上の点の空間座標(*X, Y, Z*)を、その点の画像座標(*x, y*)について、次のように解くことができる。

$$\begin{aligned} X &= \frac{rx}{f - px - qy}, \quad Y = \frac{ry}{f - px - qy} \\ Z &= \frac{fr}{f - px - qy} \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. カメラの移動による画像の変換

カメラの移動を次のような座標系の変換と見なす。

- (1) 座標系を原点の周りに直交行列 $R = (R_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ だけ回転し、
- (2) 座標原点を(もとのXYZ座標系に対して) (*A, B, C*) だけ平行移動する。

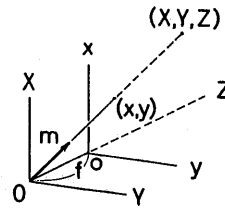


図1 カメラ撮像のモデルと点の*N*ベクトル

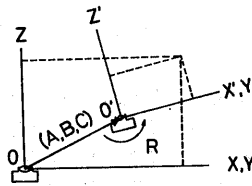


図2 カメラの移動と座標系

パラメータの組 $\{R_{ij}, A, B, C\}$ を運動パラメータと呼ぶ。

得られた新しい座標系を $X'Y'Z'$ 座標系とすれば、空間中の同一点の座標は次のような関係があることが容易に確かめられる(図2)。

$$\begin{aligned} X' &= R_{11}(X - A) + R_{21}(Y - B) + R_{31}(Z - C) \\ Y' &= R_{12}(X - A) + R_{22}(Y - B) + R_{32}(Z - C) \\ Z' &= R_{13}(X - A) + R_{23}(Y - B) + R_{33}(Z - C) \end{aligned} \quad (3.1)$$

移動前のカメラに対して画像座標が(*x, y*)であった空間中の点の、移動後のカメラに対する画像座標を(*x', y'*)とすると、画像面から画像面への変換(*x, y*) \rightarrow (*x', y'*)が次のように引き起こされる。

[定理1] 運動パラメータ $\{R_{ij}, A, B, C\}$ のカメラの移動の引き起こす画像面の変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{T_{11}x + T_{21}y + T_{31}f}{T_{13}x + T_{23}y + T_{33}f} \\ y' &= f \frac{T_{12}x + T_{22}y + T_{32}f}{T_{13}x + T_{23}y + T_{33}f} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし次のようにおいた(*k*は零でない任意の定数)。

$$\begin{aligned} kT_{11} &= R_{11}r + p(R_{11}A + R_{21}B + R_{31}C) \\ kT_{21} &= R_{21}r + q(R_{11}A + R_{21}B + R_{31}C) \\ kT_{31} &= R_{31}r - (R_{11}A + R_{21}B + R_{31}C) \\ kT_{12} &= R_{12}r + p(R_{12}A + R_{22}B + R_{32}C) \\ kT_{22} &= R_{22}r + q(R_{12}A + R_{22}B + R_{32}C) \\ kT_{32} &= R_{32}r - (R_{12}A + R_{22}B + R_{32}C) \\ kT_{13} &= R_{13}r + p(R_{13}A + R_{23}B + R_{33}C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kT_{23} &= R_{23}r + q(R_{13}A + R_{23}B + R_{33}C) \\ kT_{33} &= R_{33}r - (R_{13}A + R_{23}B + R_{33}C) \end{aligned} \quad (3.3)$$

(証明) 移動前の画像座標 (x, y) に対する空間中の点を (X, Y, Z) とし, これが移動後の座標系に関して (X', Y', Z') となるとする. すると式 (2.1), (3.1) より, その点の投影像 (x', y') は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{R_{11}(X-A) + R_{21}(Y-B) + R_{31}(Z-C)}{R_{13}(X-A) + R_{23}(Y-B) + R_{33}(Z-C)} \\ y' &= f \frac{R_{12}(X-A) + R_{22}(Y-B) + R_{32}(Z-C)}{R_{13}(X-A) + R_{23}(Y-B) + R_{33}(Z-C)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

これに式 (2.3) を代入して整理すれば式 (3.2), (3.3) が得られる. 式 (3.2) で $T_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ は分子, 分母に 1 次式の形で表われているため, 零でない任意の定数 k 倍だけの自由度が残る.

式 (3.3) の 9 個の量 $\{T_{ij}\}, i, j = 1, 2, 3$ を画像面の交換パラメータ, k をスケール因子と呼ぶ.

4. 平面有限運動の 3 次元解析

変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ は定数倍の自由度を残しているので, 実質的には 8 個の未知数からなる. したがって, カメラの移動前と移動後で対応する点が少なくとも 4 組与えられれば変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ が定まる. これについては 5 節で述べる. 本節では変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ が定まったとして, 面のパラメータ $\{p, q, r\}$ および運動パラメータ $\{R_{ij}, A, B, C\}$ を計算する方法を考える. それには式 (3.3) を未知数 $\{p, q, r, R_{ij}, A, B, C\}$ について解けばよい.

変換行列を $T = (T_{ij}), i, j = 1, 2, 3$ と定義し, 回転行列 $R = (R_{ij}), i, j = 1, 2, 3$ を用いれば, 式 (3.3) は次のように書ける.

$$kT = \left(rI + \begin{pmatrix} p \\ q \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \right) R \quad (4.1)$$

[補題 1] カメラの移動が物体面の一方で行われる条件は

$$r + pA + qB - C > 0 \quad (4.2)$$

(証明) 平面 $Z = pX + qY + r$ ($r > 0$) は空間を 2 分する. 視点 O は半空間 $Z < pX + qY + r$ に存在する (図 3). カメラの移動がこの半空間内で行われる条件は, 移動後の視点の位置 (A, B, C) がこの半空間内に存在すること, すなわち $C < pA + qB + r$ である. これから式 (4.2) を得る.

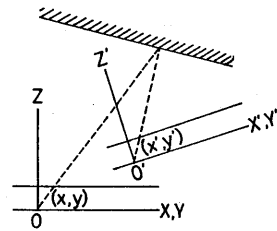


図 3 平面物体による画像の変換

式 (4.1) の両辺の行列式をとり, 式 (4.2) を用いれば

$$k^3 \det[T] = r^2(r + pA + qB - C) > 0 \quad (4.3)$$

となる. したがって $\det[T] \neq 0$ である. ゆえに, あらかじめ適当な定数を掛けて $\det[T] = 1$ としておくことができる. 以下, そのようにしてあるとする. すると式 (4.3) より $k > 0$ となる. このとき, 次のように解が構成できる.

[方法 1]

(1) 対称行列 TT^T の固有値を $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ とし, 対応する固有ベクトル u_1, u_2, u_3 を互いに直交し, この順に右手系を作る単位ベクトルに取る. ただし, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$ とする.

(2) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ であれば運動パラメータは

$$A = B = C = 0, \quad R = T \quad (4.4)$$

であり, 面のパラメータ $\{p, q, r\}$ は不定である. そうでなければ, 次のように 2 組の解が得られる.

(3) 面の勾配 $\{p, q\}$ は次のように定まる.

$$p = -\frac{p'}{l'}, \quad q = -\frac{q'}{l'} \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} = \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} u_1 + \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3 \quad (4.6)$$

(4) 面の距離 r は不定であり, 並進 (A, B, C) との比が次のように定まる (式 (4.6) と複合同順).

$$\begin{pmatrix} A/r \\ B/r \\ C/r \end{pmatrix} = \frac{l'}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \sigma_3)} [\mp \sigma_3 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} u_1 + \sigma_1 \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} u_3] \quad (4.7)$$

(5) 回転行列 R は次のように定まる.

$$R = \frac{1}{\sigma_2} \left[I - \frac{1}{1 + pA/r + qB/r - C/r} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A/r & B/r & C/r \end{pmatrix} \right] T \quad (4.8)$$

(導出) まず $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ の場合を考える.

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \begin{pmatrix} p \\ q \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

とおくと, $A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$ であり, 式(4.1)は

$$kT = \left(rI + \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C' \end{pmatrix} \right) R \quad (4.11)$$

と書ける. 両辺の転置を取り, 辺々を掛けると $RR^T = I$ より

$$k^2 T T^T = \left(rI + \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C' \end{pmatrix} \right) \times \left(rI + \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & q' & l' \end{pmatrix} \right) \quad (4.12)$$

となる. $T T^T$ の固有ベクトル u_1, u_2, u_3 を列として並べた直交行列を $U = (u_1 u_2 u_3)$ とすると

$$U^T T T^T U = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

となる. 式(4.12)の左から U^T , 右から U を掛けると

$$\begin{aligned} & k \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \\ &= U^T \left(rI + \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C' \end{pmatrix} \right) U \\ & \quad \times U^T \left(rI + \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & q' & l' \end{pmatrix} \right) U \\ &= \left(rI + \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \end{pmatrix} \right) \\ & \quad \times \left(rI + \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{q} & \bar{l} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} r^2 + 2r\bar{A}\bar{p} + \bar{p}^2 & r(\bar{A}\bar{q} + \bar{p}\bar{B}) + \bar{p}\bar{q} \\ r(\bar{B}\bar{p} + \bar{q}\bar{A}) + \bar{q}\bar{p} & r^2 + 2r\bar{B}\bar{q} + \bar{q}^2 \\ r(\bar{C}\bar{p} + \bar{l}\bar{A}) + \bar{l}\bar{p} & r(\bar{C}\bar{q} + \bar{l}\bar{B}) + \bar{l}\bar{q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} r(\bar{A}\bar{l} + \bar{p}\bar{C}) + \bar{p}\bar{l} \\ r(\bar{B}\bar{l} + \bar{q}\bar{C}) + \bar{q}\bar{l} \\ r^2 + 2r\bar{C}\bar{l} + \bar{l}^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

ただし, $\bar{p}, \bar{q}, \bar{l}$ および $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ は

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{l} \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

によって定義した. また, U^T が直交行列であるからベクトルのノルムが保存され, $\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$ となることも用いた. 式(4.14)より

$$\begin{aligned} r(\bar{l}\bar{B} + \bar{q}\bar{C}) + \bar{q}\bar{l} &= 0, & r(\bar{p}\bar{C} + \bar{l}\bar{A}) + \bar{l}\bar{p} &= 0, \\ r(\bar{q}\bar{A} + \bar{p}\bar{B}) + \bar{p}\bar{q} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r\bar{p}\bar{A} + \bar{p}^2 &= k^2\sigma_1^2, & r^2 + 2r\bar{q}\bar{B} + \bar{q}^2 &= k^2\sigma_2^2, \\ r^2 + 2r\bar{l}\bar{C} + \bar{l}^2 &= k^2\sigma_3^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる. これを次の条件のもとに解く.

$$r > 0, \quad k > 0, \quad (\bar{p}, \bar{q}, \bar{l}) \neq (0, 0, 0) \quad (4.18)$$

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 = 1 \quad (4.19)$$

$$r + \bar{p}\bar{A} + \bar{q}\bar{B} + \bar{l}\bar{C} > 0 \quad (4.20)$$

条件 $r > 0$ は面の方程式の定め方により, 条件 $k > 0$ は式(4.3)より要請される. $\bar{p} = \bar{q} = \bar{l} = 0$ であれば式(4.15)の第1式より $p' = q' = l' = 0$ となり, 式(4.10)と矛盾する. 式(4.19)は先に述べたように U^T が直交行列であることから得られる. また, U^T が直交行列であるから式(4.15)でベクトルの内積が保存され, 式(4.9)より $\bar{p}\bar{A} + \bar{q}\bar{B} + \bar{l}\bar{C} = p'A' + q'B' + l'C' = Ap + Bq - C$ であり, 式(4.2)より式(4.20)が得られる.

式(4.16), (4.17)を条件(4.18)~(4.20)のもとに解くには $\bar{p}, \bar{q}, \bar{l}$ のそれぞれが0である場合とそうでない場合とに分けて考える必要がある. その結果, $\bar{p} \neq 0, \bar{q} = 0, \bar{l} \neq 0$ の場合のみを考えればよいことが分かる(詳細省略). 以下, この場合を考える.

式(4.16)および式(4.17)はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} r\bar{l}\bar{B} &= 0, & r(\bar{p}\bar{C} + \bar{l}\bar{A}) + \bar{l}\bar{p} &= 0, \\ r\bar{p}\bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r\bar{p}\bar{A} + \bar{p}^2 &= k^2\sigma_1^2, & r^2 &= k^2\sigma_2^2, \\ r^2 + 2r\bar{l}\bar{C} + \bar{l}^2 &= k^2\sigma_3^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\bar{p} \neq 0, \bar{l} \neq 0$ より, 式(4.21)の第1, 第3式は $\bar{B} = 0$ を意味する. 式(4.22)の第2式より ($k > 0, r > 0, \sigma_2 > 0$ を考慮して) $k = r/\sigma_2$ が得られる. これを用いると式(4.22)の第1, 第3式はそれぞれ次のようになる.

$$\bar{A} = \frac{k^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - p^2}{2r\bar{p}}, \quad \bar{C} = -\frac{k^2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + l^2}{2r\bar{l}} \quad (4.23)$$

これらを式(4.22)の第2式に代入すると

$$(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)p^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)l^2 \quad (4.24)$$

假定より $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ であり, $\bar{p} \neq 0, \bar{l} \neq 0$ だから $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ または $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ のいずれかである。しかし, 後者であれば式(4.23)より

$$\bar{A} = -\frac{\bar{p}}{2r}, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{C} = -\frac{\bar{l}}{2r} \quad (4.25)$$

であり, 式(4.19)より $\bar{p}^2 + \bar{l}^2 = 4r^2$ となる。すると

$$r + \bar{p}\bar{A} + \bar{q}\bar{B} + \bar{l}\bar{C} = r - \frac{\bar{p}^2 + \bar{l}^2}{2r} = -r < 0 \quad (4.26)$$

となって, 式(4.20)に反する。したがって $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ である。

式(4.24)の両辺は正であるから, 正の定数 μ を導入して

$$\bar{p}^2 = k^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\mu, \quad \bar{l}^2 = k^2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\mu \quad (4.27)$$

とおける。これと式(4.23)とを合わせると

$$\bar{A} = -\frac{r}{2\bar{p}} \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2} (\mu - 1), \quad (4.28)$$

$$\bar{C} = -\frac{r}{2\bar{l}} \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_2^2} (\mu + 1) \quad (4.29)$$

となる。これを式(4.19)で $\bar{B} = 0$ とおいた $\bar{A}^2 + \bar{C}^2 = 1$ に代入すると

$$(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\mu^2 - 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\mu + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) = 0 \quad (4.30)$$

を得る。これからの二つの解

$$\mu = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \quad \mu = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (4.31)$$

が得られるが, 第2の解は条件(4.20)を満たさない。なぜなら

$$r + \bar{p}\bar{A} + \bar{l}\bar{C} = \frac{r(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\mu}{\sigma_2^2} \quad (4.32)$$

となり, 式(4.31)の μ を代入すれば, 第1の解では $r\sigma_1\sigma_3/\sigma_2^2 (> 0)$ となるのに対して, 第2の解では $-r\sigma_1\sigma_3/\sigma_2^2 (< 0)$ となるからである。そこで第1の解を式(4.27)に代入すれば, \bar{p}, \bar{l} として

$$\bar{p} = \pm \frac{r}{\sigma_2} \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_3}}$$

$$\bar{l} = \frac{r}{\sigma_2} \sqrt{\frac{(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_3}} \quad (4.33)$$

および両者の符号を反転させたものの4通りが得られる。式(4.10)より, これら4通りの中で $l' < 0$ となるものを選ばなければならない。

式(4.33)に対応する \bar{A}, \bar{C} は

$$\bar{A} = \pm \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}}, \quad \bar{C} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}} \quad (4.34)$$

および両者の符号を反転させたものである。式(4.15)より

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ l' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{l} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon r}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}} U \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \\ 0 \\ \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}} U \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \\ 0 \\ \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

と書ける。ただし $\varepsilon = \pm 1$ であり, $l' < 0$ となるほうを選ぶ。これより勾配 $\{p, q\}$ は, 式(4.10)から

$$p = -\frac{p'}{l'}, \quad q = -\frac{q'}{l'} \quad (4.37)$$

となり, 並進 (A, B, C) は式(4.9)より

$$A = -l'A', \quad B = -l'B', \quad C = -l'C' \quad (4.38)$$

となる。しかし式(4.37)で比をとるから, 式(4.35)の $(\varepsilon r/\sigma_2)\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)}$ は除いてもよい。そして, $U = (u_1 u_2 u_3)$ より式(4.6)が得られる。その結果 l' が, $(\sigma_2/\varepsilon r)\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)}$ 倍されるから, 式(4.36)の右辺をすべて $(\varepsilon r/\sigma_2)\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)}$ 倍する必要がある。これより式(4.7)が得られる。

最後に, $A = B = C = 0$ であれば式(4.1)より $kT = rR$ であり, $\{p, q\}$ は不定である。さらに $\det[T] = 1$ より $k = r, T = R$ である。 T 自身が回転行列であるから $TT^T = I$ であり, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ でなければならない。以上を整理して[方法1]が得られる。

5. 画像の変換パラメータの推定

前節の解析により, 物体面が平面であれば, 変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ さえ決定すると, 面の勾配 $\{p, q\}$, 回転行列 R , 面の距離 r に対する並進の比 $(A/r, B/r, C/r)$ の2組の解が得られることが分かった。そこで, カメラの移動前と移動後の2枚の画像から変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ を推定する方法を考える。

変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ は実質的に8個の未知数から成るから, 原理的には4組の点の対応関係が与えられれば一

意的に定まる。以下では、一般に N 組 ($N \geq 4$) の点の対応 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}, \{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}, \alpha = 1, \dots, N$ が与えられたとき $\{T_{ij}\}$ を計算する方法を考える。最も単純な方法は式 (3.2) の形の関数を適当な最小二乗法によって当てはめることであるが、以下では「計算射影幾何学」²⁾ の立場から「Nベクトル」^{1,2)} による定式化を考える。

画像面上に点 (x, y) が与えられたとき、視点を始点として、その点へ向かう単位ベクトル m をその点の N ベクトルと呼ぶ (図 1)。ベクトルの正規化作業素 $N[a] = a/\|a\|$ を用いれば、点 (x, y) の N ベクトルは次のように書ける。

$$N = N \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \right] \quad (5.1)$$

この N ベクトルを用いて式 (3.2) の画像面の交換を書き直せば

$$m' = \pm N [T^T m] \quad (5.2)$$

となることが直ちに分かる。ただし、符号は m' の Z 成分が正になるものを選ぶ。

そこで、変換行列 T を推定する問題は次のように書ける。

[問題 1] 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}$ が与えられたとき

$$m'_\alpha \approx \pm N [T^T m_\alpha], \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (5.3)$$

なる行列を推定せよ。

このとき、行列 T のすべての要素を定数倍しても式 (5.3) は変化しないので

$$\text{Tr}[T T^T] = 3 \quad (5.4)$$

という条件を課すことにする。

式 (5.3) はベクトル $T^T m_\alpha$ が m'_α そのものに近づくことを要求しているのではなく、 $T^T m_\alpha$ の“方向”が m'_α の“方向”に近づくことを要求している。そこで、その接近の尺度として、 $T^T m_\alpha$ の終点から m'_α の定める直線への距離 h_α の 2 乗を考える。図 4 より

$$h_\alpha^2 = \|T^T m_\alpha\|^2 - (m'_\alpha, T^T m_\alpha)^2 \quad (5.5)$$

である。ただし (\cdot, \cdot) は内積、 $\|\cdot\|$ はノルムを表す。そこで、[問題 1] を次のような問題に置きかえる。

[問題 2] 単位ベクトルの組 $\{m_\alpha\}, \{m'_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$ ($N \geq 4$) が与えられたとき

$$J(T) = \sum_{\alpha=1}^N [\|T^T m_\alpha\|^2 - (m'_\alpha, T^T m_\alpha)^2] \rightarrow \min \quad (5.6)$$

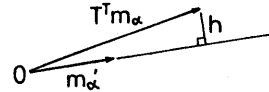


図 4 N ベクトルの交換の誤差

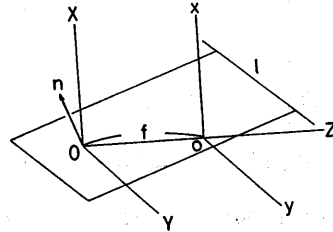


図 5 直線の N ベクトル

となる行列 T を式 (5.4) の条件のもとに求めよ。

これから次のような [方法 2] が得られる。

[方法 2] $m_\alpha = (m_{\alpha(1)} \ m_{\alpha(2)} \ m_{\alpha(3)})^T, m'_\alpha = (m'_{\alpha(1)} \ m'_{\alpha(2)} \ m'_{\alpha(3)})^T$ とするとき

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} \quad (5.7)$$

$$N_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m'_{\alpha(l)} \quad (5.8)$$

を計算し

$$A_{ijkl} = M_{ik} \delta_{jl} - N_{ijkl} \quad (5.9)$$

とおく (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)。そして、変換行列 $T = (T_{ij}), i, j = 1, 2, 3$ を次のように定める。

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 A_{ijkl} T_{ij} T_{kl} \rightarrow \min \quad (5.10)$$

$$\sum_{i,j=1}^3 (T_{ij})^2 = 3 \quad (5.11)$$

式 (5.10) は式 (5.6) を要素を用いて書き直したものである。式 (5.10), (5.11) を満たす T_{ij} を計算するには二つの添字の組 (11), (12), ..., (33) に通し番号 1, ..., 9 をつけ 9 次元ベクトル $\vec{T} = (\vec{T}_\kappa), \kappa = 1, \dots, 9$ を $\vec{T}_1 = T_{11}, \vec{T}_2 = T_{12}, \dots, \vec{T}_9 = T_{33}$ のように定義する。 A_{ijkl} の添字 (ij), (kl) にも同様に通し番号をつけ、9 次元行列 $\vec{A} = (\vec{A}_{\kappa\lambda}), \kappa, \lambda = 1, \dots, 9$ を定義する ($\vec{A}_{11} = A_{1111}, \vec{A}_{12} = A_{1112}$,

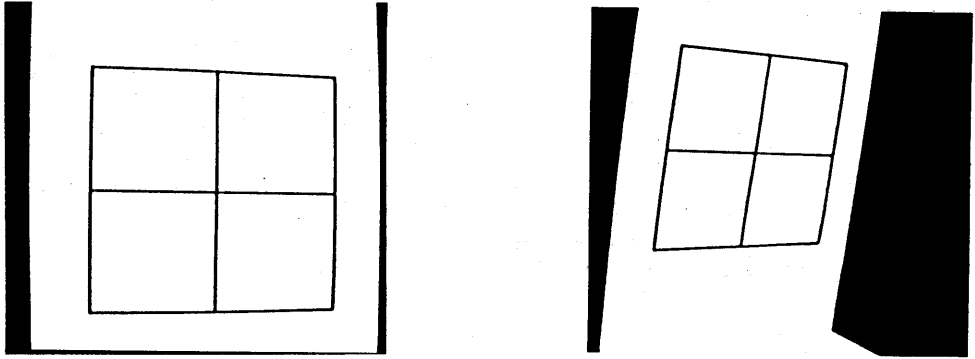


図6 平面物体の2枚の画像

..., $\bar{A}_{99} = A_{3333}$). すると式(5.10)と式(5.11)はそれぞれ

$$(\bar{T}, \bar{A} \bar{T}) \rightarrow \min, \quad \|\bar{T}\|^2 = 3 \quad (5.12)$$

となる。ゆえに解 \bar{T} は9次元行列 \bar{A} の最小固有値に対するノルム $\sqrt{3}$ の固有ベクトルにより与えられる。

6. 直線の対応による変換パラメータの推定

ところで、実際の画像処理では、まず「エッジ検出」を行い、検出したエッジに直線を当てはめる。点のデータはそのようにして得られた直線の交点として定義されることが多い。この事は直線データがより基本的であることを意味する。したがって、変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ を直線と直線の対応から計算するのが自然である。

画像面上に直線 l が与えられたとき、視点とその直線とを通る平面を考え、その平面の単位法線ベクトル(向きは任意) n を直線 l の N ベクトルと呼ぶ(図5)。直線 l の方程式が $Ax + By + C = 0$ であれば、その N ベクトルは次のように与えられることがすぐわかる。

$$n = \pm N \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

点の N ベクトルの定義(図1)と直線の N ベクトルの定義(図5)から、点 P の N ベクトルを m 、直線 l の N ベクトルを n とするとき、点 P が直線 l 上にある、すなわち直線 l が点 P を通ることは $(m, n) = 0$ と表せる。

[定理2] 変換行列 $T = (T_{ij})$ に対する画像面上の直線の変換は、次のような直線の N ベクトルの変換として表せる。

$$n' = \pm N [T^{-1} n] \quad (6.2)$$

(証明) N ベクトル n の直線 l が N ベクトル n' の直線 l' に写像されるとする。直線 l 上に任意に点 P をとり、それが

写像される点を P' とすれば、点 P' は直線 l' 上にある。このことは、点 P, P' の N ベクトルをそれぞれ m, m' とすると $(m, n) = 0, (m', n') = 0$ と表せる。式(5.2)は $m' = \gamma_m T^T m$ (γ_m は m' が単位ベクトルとなるように定める零でない定数)と書けるから $0 = (m', n') = (\gamma_m T^T m, n') = \gamma_m (m, T n')$ となる。点 P は直線 l 上にあれば位置は任意であるから、これは n と直交するすべての m に $T n'$ が直交することを意味する。したがって、 γ_n を零でない定数として $T n' = \gamma_n n$ と表せなければならない。書き直すと $n' = \gamma_n T^{-1} n$ であるが、 n' は単位ベクトルであるから、これは式(6.2)にほかならない。

直線 l の N ベクトルが n のとき、 n を N ベクトルとする点 P を直線 l の「極点」と呼ぶ^{1,2)}。逆に、直線 l は点 P の「極線」であるという^{1,2)}。定理2より、直線 l_1, \dots, l_N が直線 l'_1, \dots, l'_N に対応している場合の変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ を、次のようにして計算することができる。

[方法3]

- (1) 直線 $\{l_\alpha\}, \{l'_\alpha\}$ $\alpha = 1, \dots, N$ が互に対応しているとき、それらの N ベクトルを $\{n_\alpha\}, \{n'_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ とする。
- (2) それらの極点 $\{P_\alpha\}, \{P'_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$, すなわち $\{n_\alpha\}, \{n'_\alpha\}$ を N ベクトルとする点 P が互に対応しているとみなして、[方法2]によって変換パラメータ $\{T_{ij}^*\}$ を求める。
- (3) 求める変換パラメータ $\{T_{ij}\}$ は $T = (T_{ij}), T^* = (T_{ij}^*), i, j = 1, 2, 3$ とするとき $T = (T^*)^{-1} T^*$ で与えられる。

7. 実験例

図6は平面上に描かれた直線から成るパターンをカメラを少し移動して撮影した2枚の 512×512 画素の画像である。焦点距離 f は「計算射影幾何学」の方法²⁾によって推定すると $f = 1275$ (画素)である。

図6の画像の直線に最小二乗法で直線をあてはめて6本のNベクトルを計算し、[方法3]によって変換パラメータを計算すると次のようになる。

$$T = \begin{pmatrix} 1.019 & 0.131 & -0.132 \\ 0.011 & 0.858 & 0.359 \\ 0.061 & -0.052 & 1.268 \end{pmatrix}$$

これから[方法1]によって計算した面の勾配 (p, q) 、並進と距離の比 $(A/r, B/r, C/r)$ 、および回転は次のようになる。ただし回転は回転軸 l (単位ベクトル)とその周りの回転角 Ω で表示する。

$$\begin{aligned} (p, q) &= (0.525, -1.831), \\ & \quad (-0.090, 0.244) \\ (A/r, B/r, C/r) &= (-0.036, 0.109, -0.208), \\ & \quad (0.135, -0.463, -0.114) \\ l &= (0.522, -0.147, -0.840), \quad \Omega = 5.1^\circ, \\ & \quad (-0.920, -0.371, -0.124) \quad 26.8^\circ \end{aligned}$$

一方、画像に射影幾何学的補正を加えてからカメラの移動前と移動後の位置を別々に計算して、真の値を推定すると(詳細省略)次のようになる。

$$\begin{aligned} (p, q) &= (0.008, 0.236) \\ (A/r, B/r, C/r) &= (0.121, -0.469, -0.124) \\ l &= (-0.921, -0.351, -0.169) \quad \Omega = 26.9^\circ \end{aligned}$$

これと比べると、上で求めた二つの解のうちの第2の解が正しく、かつよい精度で解が求まっていることがわかる。

8. まとめ

本論文ではカメラに相対的な平面物体の3次元運動を2枚の画像から計算する最も洗練された解法を示した。そして、この時必要となる変換パラメータを直線の対応から推定する手法を提案した。これは、点や直線を表す「Nベクトル」などの「計算射影幾何学」の概念^{1,2)}を用いて組み立てられたものである。最後に実際の画像を用いた実験を行い、良好な結果が得られることを示した。本論文の方法は物体の3次元運動の計測やカメラキャリブレーションなどの広い範囲の問題で役に立つと思われる。

参考文献

- [1] 金谷健一: 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [2] 小野寺康浩, 金谷健一: 計算射影幾何学, 情報処理学会研究報告 89-CV-61 (1989-07).
- [3] L. Svensson and A. Neave: Estimating the n -dimensional motion of a $(n-1)$ -dimensional hyperplane from two matched images of $(n+1)$ of its points, *Proc. 5th Scandinavian Conf. Image Anal.*, Stockholm, June 1987, pp. 605-621.

- [4] R. Y. Tsai and T. S. Huang: Estimating three-dimensional motion parameters of a rigid planar patch, *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Process.*, 29 (1981), 1147-1152.
- [5] R. Y. Tsai, T. S. Huang and W.-L. Zhu: Estimating three dimensional motion parameters of a rigid planar patch, II: Singular value decomposition, *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Process.*, 30 (1982), 525-534.