

3次元剛体運動推定の統計的偏り

金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

最初に、2画像から3次元剛体運動を計算するアルゴリズムの中で理論的に最もすぐれていると考えられる「最良反復解法」の手順およびその幾何学的意味を「計算射影幾何学」に基づいて「Nベクトル」によって記述する。次に、画像にランダムな誤差が含まれているとき、計算される解には統計的な偏りが存在することを、簡単な確率モデルに基づいたテンソル解析によって示す。このテンソル解析の手法は広い範囲の問題に応用できる。

Statistical Bias of 3D Rigid Motion Estimation

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University
Kiryu, Gunma 376, Japan

First, the procedure of the "best iterative method" for estimating 3D rigid motion from two images, which is considered to be the best among existing algorithms, and its geometrical interpretation are presented in terms of "N-vectors" from the viewpoint of "computational projective geometry". Then, statistical bias is shown to exist in the computed solution when the input contain random noise. The analysis is done by a tensor calculus technique based on a simple statistical model. This technique can be applied to a wide range of problems.

本研究の一部は文部省科学研究費一般研究 C(No.02805043) によった。本研究を手伝ってくれた森尻智昭、小野寺康浩、劉武、L.M. ハッタイの諸氏に感謝する。

1. 序論

空間中を剛体運動する物体の2画像からその3次元運動を計算する問題は多くの人によって研究されてきた。その歴史的経過および諸解法の比較と検討は前報³⁾に「計算射影幾何学」⁵⁾の立場から「Nベクトル」^{2,5)}により統一的に整理されている。本論文では、そこに示した解法の中で理論的に最も優れていると考えられる「最良反復法」をとりあげて、その幾何学的意味、および入力画像に誤差が含まれているときの解の挙動を詳しく検討する。そして、簡単な誤差の確率モデルに基づいて、テンソル解析により解の統計的ふるまいを記述する。

2. 基本原理

カメラのレンズの中心(視点)を原点 O とし、レンズの光軸を Z 軸とする XYZ 座標系をとる。カメラに相対的な運動を考えても、物体に相対的なカメラの運動を考えても等価であるから、次のようなカメラの運動を考える(図1)。

- (1) まず視点 O の周りに回転行列 R だけ回転し
- (2) 次に(もとの座標系に関して) h だけ平行移動する。

回転行列 R とベクトル h の組 $\{R, h\}$ を運動パラメータと呼ぶ。視点 O を始点とし、物体のある特徴点を指す単位ベクトルをその点のNベクトルと呼ぶ(図2)。画像上の特徴点は視点からの距離情報が欠落しているから、画像から得られるのはその点のNベクトルのみである。もっとも基本的な関係は、次の定理である。以下、 $|a, b, c| = (a, b \times c) = (b, c \times a) = (c, a \times b)$ はベクトル a, b, c のスカラ三重積を表す。ただし、 (a, b) はベクトル a, b の内積である。

【定理 1】 運動パラメータ $\{R, h\}$ の運動によって、Nベクトル m の点がNベクトル m' の点に移るとき(図3)

$$|h, m, Rm'| = 0 \quad (2.1)$$

(証明) 移動後のカメラは移動前のカメラに対して R だけ回転しているから、移動後のカメラに対するNベクトル m' は移動前のカメラに対しては Rm' である(図4)。3本のベクトル h, m, Rm' は同一平面上にある。ゆえにこれらのスカラ三重積は0である。

よく知られているように、遠くの物体が大きく並進するのと、近くの物体が小さく運動するのは、画像上で観察する限り違いが現れない。すなわち並進ベクトル h の大きさは不定である。そこで $\|h\| = 1$ としても一般性を失わない。ただし、 $\|a\|$ はベクトル a のノルムである。

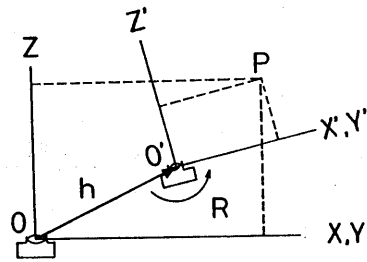


図1 カメラの移動と運動パラメータ

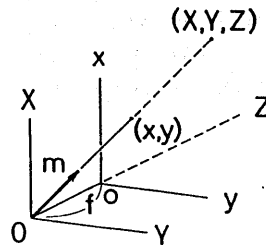


図2 透視変換とNベクトル

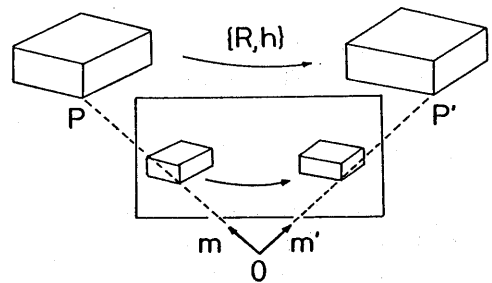


図3 カメラから見た物体の運動

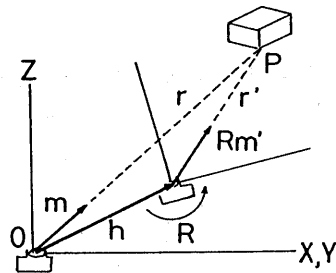


図4 物体から見たカメラの移動

いま N 個の特徴点 P_1, \dots, P_N を観測しているとし、それらのカメラの移動前の N ベクトルを m_1, \dots, m_N 、移動後の N ベクトルを m'_1, \dots, m'_N とする。ただし、これらのデータは誤差を含んでいるとする。定理 1 より、運動パラメータ $\{R, h\}$ を計算するには次の問題を解けばよい。

【問題 1】 与えられた単位ベクトル $\{m_\alpha, m'_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ に対して

$$J(R, h) = \sum_{\alpha=1}^N |h, m_\alpha, Rm'_\alpha|^2 \rightarrow \min \quad (2.2)$$

となる回転行列 R と単位ベクトル h を求めよ。

3. 幾何学的解釈

定理 1 の証明中に述べたように、運動パラメータ $\{R, h\}$ のカメラ移動によって特徴点 P_α の N ベクトルが m_α から m'_α へ変化するとき、カメラを回転せず h だけ平行移動すれば、 N ベクトル m_α は $\tilde{m}_\alpha = Rm'_\alpha$ に変化する。その変化を連続的に観察するとすれば、特徴点 P_α はカメラに相対的に並進するから、画像面上に直線の軌跡を描くはずである (図 5)。

画像面上の直線と視点 O を通る平面の単位法線ベクトル (向きは任意) をその直線の N ベクトルと呼ぶ (図 6)。すると上の場合、特徴点 P_α の描く軌跡 l_α の N ベクトル n_α は m_α と \tilde{m}_α の両方に垂直であり、 m_α と \tilde{m}_α のなす角を θ_α (特徴点 P_α の視差と呼ぶ) とすれば、

$$n_\alpha = \pm \frac{1}{\sin \theta_\alpha} m_\alpha \times \tilde{m}_\alpha \quad (3.1)$$

である。

N 個の特徴点 P_1, \dots, P_N がカメラに相対的に並進するとき、それらの描く軌跡 l_1, \dots, l_N を延長すると、誤差がなければ画像面上の 1 点 Q で交わる (これは並進運動の出現点とも呼ばれる)。点 Q の N ベクトルは並進に方向に一致するから、 $\pm h$ である。そこで Z 成分が非負となる符号を選ぶ。画像に誤差があるとき、点 Q から軌跡 l_α に下した垂線の足を H_α とすれば、点 Q と点 H_α の視差 (それぞれの N ベクトルがなす角) を ϕ_α とすると

$$\sin \phi_\alpha = |(h, n_\alpha)| \quad (3.2)$$

である (図 6)。

このことから、画像に誤差があるとき、点 Q (またはベクトル h) を $\sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \sin^2 \phi_\alpha$ が最小となるように推定するのが妥当である。ただし W_α は軌跡 l_α の重みである。視差の小さい (すなわちほとんど動かない) 軌跡は小さな重みを持つべきであるから、 $W_\alpha = \sin^2 \phi_\alpha$ とする。すると、前節の問題 1 は次の問題と等価である。

【問題 2】 与えられた単位ベクトル $\{m_\alpha, m'_\alpha\}$, $\alpha =$

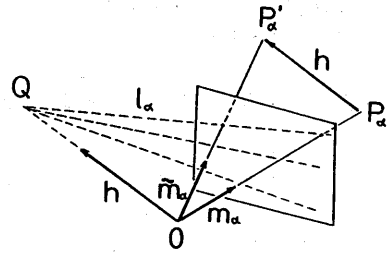


図 5 点の軌跡と出現点

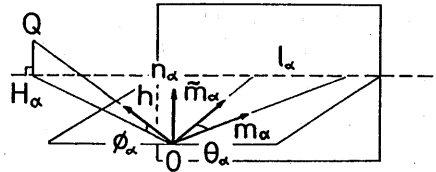


図 6 軌跡の N ベクトルと視差

$1, \dots, N$ に対して

$$J(R, h) = \sum_{\alpha=1}^N \sin^2 \theta_\alpha \sin^2 \phi_\alpha \rightarrow \min \quad (3.3)$$

となる回転行列 R と単位ベクトル h を求めよ。

(導出) 視差 ϕ_α の定義より次のように確かめられる

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_\alpha \sin^2 \phi_\alpha &= \sin^2 \theta_\alpha (h, n_\alpha)^2 \\ &= \sin^2 \theta_\alpha (h, \pm \frac{1}{\sin \theta_\alpha} m_\alpha \times \tilde{m}_\alpha)^2 \\ &= (h, m_\alpha \times Rm'_\alpha)^2 = |h, m_\alpha, Rm'_\alpha|^2 \quad (3.4) \end{aligned}$$

上の説明ではカメラの並進を考えたが、あらかじめ 2 台のカメラが設置されているステレオを考えても等価である。この場合の並進ベクトル h は基線ベクトル、特徴点の軌跡はエビ極線、それらの交点 Q はエビ極点とも呼ばれる^{2,4)}。

4. 解法の原理

問題 1 (あるいは問題 2) は次の手順によって解くことができる。

【手順 1】 与えられた単位ベクトル $\{m_\alpha, m'_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ に対して、対称行列

$$A = \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \times Rm'_\alpha)(m_\alpha \times Rm'_\alpha)^T \quad (4.1)$$

の最小固有値を最小にする回転行列 R を求め、それに対する単位固有ベクトルを h とせよ。

(導出) 式(2.2)の $J(R, h)$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} J(R, h) &= \sum_{\alpha=1}^N (h, m_{\alpha} \times R m'_{\alpha})^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N h^T (m_{\alpha} \times R m'_{\alpha}) (m_{\alpha} \times R m'_{\alpha})^T h \\ &= h^T A h = (h, A h) \end{aligned} \quad (4.2)$$

よく知られているように、2次形式 $(h, A h)$ を最小にする単位ベクトル h は行列 A の最小固有値に対する固有ベクトルで与えられ、その最小固有値が2次形式 $(h, A h)$ の値となる²⁾。

前節の幾何学的解釈に従えば、式(4.1)の行列 A は軌跡の N ベクトル n の $W_{\alpha} = \sin^2 \theta_{\alpha}$ を重みとするモーメント行列

$$A = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} n_{\alpha} n_{\alpha}^T \quad (4.3)$$

となっていることが確かめられる。複数の直線の共通の交点の N ベクトルを推定するのに、それらの直線の N ベクトルのつくるモーメント行列の最小固有値に対する固有ベクトルを計算することは常套手段である²⁾。

このようにして運動パラメータ $\{R, h\}$ が定まれば、各特徴点までの距離は次のように計算できる。

【手順 2】 運動パラメータ $\{R, h\}$ のカメラの移動によって特徴点 P_{α} の N ベクトルが m_{α} から m'_{α} へ変化するとき、カメラの移動前後の視点から P_{α} までの距離 r_{α}, r'_{α} はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} r_{\alpha} &= \frac{(h, m_{\alpha}) - (m_{\alpha}, R m'_{\alpha})(h, R m'_{\alpha})}{1 - (m_{\alpha}, R m'_{\alpha})^2} \\ r'_{\alpha} &= \frac{(m_{\alpha}, R m'_{\alpha})(h, m_{\alpha}) - (h, R m'_{\alpha})}{1 - (m_{\alpha}, R m'_{\alpha})^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

(導出) 図4の関係より誤差がなければ

$$r_{\alpha} m_{\alpha} = h + r'_{\alpha} R m'_{\alpha} \quad (4.5)$$

である。そこで

$$\|r_{\alpha} m_{\alpha} - h - r'_{\alpha} R m'_{\alpha}\|^2 \rightarrow \min \quad (4.6)$$

となるように r_{α}, r'_{α} を定める。左辺を r_{α}, r'_{α} でそれぞれ微分して0とおくと、次の式を得る。

$$\begin{aligned} r_{\alpha} - (m_{\alpha}, R m'_{\alpha}) r'_{\alpha} &= (h, m_{\alpha}) \\ (m_{\alpha}, R m'_{\alpha}) r_{\alpha} - r_{\alpha} &= (h, m'_{\alpha}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

これを解いて式(4.4)の解を得る。

5. 解法のアルゴリズム

前節の考察により、次の反復解法が構成できる。

- (1) 与えられた $\{m_{\alpha}, m'_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ から4次の関連テンソル

$$N_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)} m_{\alpha(k)} m'_{\alpha(l)} \quad (5.1)$$

を計算する。ただし $m_{\alpha} = (m_{\alpha(1)}, m_{\alpha(2)}, m_{\alpha(3)})^T$, $m'_{\alpha} = (m'_{\alpha(1)}, m'_{\alpha(2)}, m'_{\alpha(3)})^T$ である。

- (2) 初期値 $R = (R_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ を与える。
(3) 対称行列 $A = (A_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$

$$A_{ij} = \sum_{k,l,m,p,q,r=1}^3 \epsilon_{ikt} \epsilon_{jpt} R_{tm} R_{qr} N_{kmpr} \quad (5.2)$$

を計算する。ただし ϵ_{ijk} はエディントンのエプシロン ((ijk) が (123) の偶順列なら1, 奇順列なら-1, その他なら0) である。

- (4) 行列 A の最小固有値に対する単位固有ベクトル $h = (h_i)$, $i = 1, 2, 3$ を計算する。
(5) 次の a_1, a_2, a_3 を計算する。

$$a_i = \sum_{j,k,l,m,n,p,q,r,s,t=1}^3 \epsilon_{int} \epsilon_{jpm} \epsilon_{kqr} h_j h_k R_{mt} R_{rs} N_{inqs} \quad (5.3)$$

- (6) 次の $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3$ を計算する。

$$\Delta\Omega_i = -\frac{\beta J(R, h)}{\sum_{j=1}^3 (a_j)^2} a_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

ただし $\beta = 1$ とする。そして、次の $\Delta\Omega$ と l を計算する。

$$\Delta\Omega = \sqrt{(\Delta\Omega_1)^2 + (\Delta\Omega_2)^2 + (\Delta\Omega_3)^2} \quad (5.5)$$

$$l = (\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3)^T / \Delta\Omega \quad (5.6)$$

- (7) 回転軸 l の周りの角度 $\Delta\Omega$ の回転を表す行列 $R^{\Delta\Omega}$ を次の式で計算する^{1,2)}。

$$R^{\Delta\Omega} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\Omega + l_1^2 (1 - \cos \Delta\Omega) \\ l_2 l_1 (1 - \cos \Delta\Omega) + l_3 \sin \Delta\Omega \\ l_3 l_1 (1 - \cos \Delta\Omega) - l_2 \sin \Delta\Omega \\ l_1 l_2 (1 - \cos \Delta\Omega) - l_3 \sin \Delta\Omega \\ \cos \Delta\Omega + l_2^2 (1 - \cos \Delta\Omega) \\ l_3 l_2 (1 - \cos \Delta\Omega) + l_1 \sin \Delta\Omega \\ l_1 l_3 (1 - \cos \Delta\Omega) + l_2 \sin \Delta\Omega \\ l_2 l_3 (1 - \cos \Delta\Omega) - l_1 \sin \Delta\Omega \\ \cos \Delta\Omega + l_3^2 (1 - \cos \Delta\Omega) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

そして

$$R' = RR^{\Delta\Omega} \quad (5.8)$$

とおく。

- (8) $J(R', h) > J(R, h)$ であれば (6) へもどって $\beta \leftarrow \beta/2$ とし, $J(R', h) < J(R, h)$ となるまで繰り返す。
- (9) このとき式 (5.5) の $\Delta\Omega$ があらかじめ定められたしきい値より小さければ停止する。そうでなければ $R \leftarrow R'$ として手順 3 へもどる。

(導出) 式 (5.2) は式 (4.1) の行列 A を要素で表したものである。 X 軸, Y 軸, Z 軸の周りの角度 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3$ だけの微小回転を表す行列は

$$R^{\Delta\Omega} = I + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\Omega_3 & \Delta\Omega_2 \\ \Delta\Omega_3 & 0 & -\Delta\Omega_1 \\ \Delta\Omega_2 & \Delta\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} + O(\Delta\Omega_i)^2 \quad (5.9)$$

である。これを要素で表すと

$$R_{ij}^{\Delta\Omega} = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \Delta\Omega_k + O(\Delta\Omega_i)^2 \quad (5.10)$$

と書ける。ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタ ($i = j$ で 1, その他で 0) である。これを R と合成した式 (5.8) の回転行列 $R' = (R'_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ の要素は

$$R'_{ij} = R_{ij} + \delta R_{ij} + O(\Delta\Omega_i)^2 \quad (5.11)$$

$$\delta R_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} R_{ik} \Delta\Omega_l \quad (5.12)$$

と書ける。 $R_{ij} \rightarrow R_{ij} + \delta R_{ij}$ なる変分によって式 (5.2) の A_{ij} の第 1 変分 (すなわち $O(\Delta\Omega_i)^2$ を無視したもの) が次のようになる。

$$\delta A_{ij} = 2 \sum_{k,l,m,p,q,r=1}^3 \epsilon_{int} \epsilon_{jpp} \left(\sum_{s,t=1}^3 \epsilon_{mst} R_{ts} \Delta\Omega_t \right) R_{qr} N_{kmpr} \quad (5.13)$$

(4) より h は行列の固有ベクトルであり, $J(R, h) = (h, Ah)$ がその固有値である。したがって $A \rightarrow A + \delta A$ のとき摂動法の公式^{2,3)}より固有値は第 1 近似において $J(R, h) \rightarrow J(R, h) + (h, \delta Ah)$ と変化する。式 (5.3) の a_i を用いれば, 式 (5.13) より

$$\delta J(R, h) = (h, \delta Ah) = \sum_{i=1}^3 a_i \Delta\Omega_i \quad (5.14)$$

と書ける。したがって, $\Delta\Omega$ を式 (5.4) のように選べば

$$J(R', h) - J(R, h) = -\beta J(R, h) + O(\beta^2) \quad (5.15)$$

となり, 十分小さい β を選べば $J(R', h) < J(R, h)$ とすることができる。

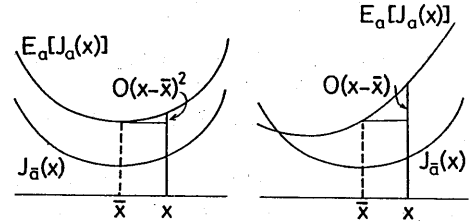


図 7 最適化問題の統計的偏り

6. 最小化問題の統計的偏り

乱数によって誤差を加えた数値実験によれば, 前節の方法はこれまでに提案されている他のどの方法よりも精度においてすぐれている。しかし, 計算される解は真の値の周りに分布せず, 必ずある方向に偏っていることが観察される。以下ではこれを理論的に解析する。

一般に, 未知数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ を最小化問題

$$J_a(x) \rightarrow \min \quad (6.1)$$

によって推定する問題を考える。ただし $J_a(\cdot)$ はデータ $a = (a_1, \dots, a_m)$ から計算される関数 (例えば a_1, \dots, a_m を係数とする多項式) であり, データ $a = (a_1, \dots, a_m)$ は誤差を含んでいるとする。誤差を確率変数とみなし, それらに関する期待値を $E[\cdot]$ と表す。誤差のないデータ $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ に対する x の真の値 (すなわち $J_a(x)$ の最小値) を \bar{x} とし, \bar{x} の近傍での $E_a[J_a(x)]$ をテーラ展開する。

【定義】 最小化問題 $J_a(x) \rightarrow \min$ は

$$E_a[J_a(x)] = \text{const.} + O(x - \bar{x})^2 \quad (6.2)$$

のとき, 統計的に不偏であるという。これに対して

$$E_a[J_a(x)] = \text{const.} + O(x - \bar{x}) \quad (6.3)$$

のとき, 統計的に偏っているという。ただし, $O(x - \bar{x})$ および $O(x - \bar{x})^2$ はそれぞれ $x_1 - \bar{x}_1, \dots, x_n - \bar{x}_n$ の 1 次以上および 2 次以上の項を表す。

この定義は次の考察に基づいている。最小化問題 $J_a(x) \rightarrow \min$ に解 \bar{x} があるとき, 誤差が大きくなければ $E_a[J_a(x)]$ も \bar{x} の近傍に最小値をもつはずである。このとき式 (6.2) が成立していれば, その最小値は \bar{x} に一致するから (図 7(a)), $J_a(x)$ の最小値は平均的には \bar{x} である。これに対し, 式 (6.3) が成立していれば, \bar{x} からある方向に移動すれば $E_a[J_a(x)]$ が減少するから (図 7(b)), $J_a(x)$ の最小値は平均としてある方向に偏る。

7. 最良反復の統計的偏り

以下、先に述べた解法は統計的に偏っていることを示す。そのためには誤差の確率モデルを導入しなければならない。ここでは次のような簡単なモデルを考える(図8)。

N ベクトル m_α, m'_α はそれぞれ真の値 $\bar{m}_\alpha, \bar{m}'_\alpha$ に対して $m_\alpha = \bar{m}_\alpha + \Delta m_\alpha$, $m'_\alpha = \bar{m}'_\alpha + \Delta m'_\alpha$ と変化し、誤差 $\Delta m_\alpha, \Delta m'_\alpha$ はそれぞれ $\bar{m}_\alpha, \bar{m}'_\alpha$ に垂直で \bar{m}_α および \bar{m}'_α の周りに等方的に(すなわちすべての方向に等確率で)分布するものとする ($\Delta m_\alpha \perp \bar{m}_\alpha$, $\Delta m'_\alpha \perp \bar{m}'_\alpha$ であるから \bar{m}_α および \bar{m}'_α は第1近似において単位ベクトルである)。

また Δm_α の大きさが $\rho < \|\Delta m_\alpha\| < \rho + d\rho$ となる確率が $P(\rho)d\rho$ であるとし、 $\|\Delta m'_\alpha\|$ も同じ分布に従うものとする。さらに、各 N ベクトルに入る誤差は互いに独立で、分布 $P(\rho)$ はすべて同一であるとする。そして、次のようにおく ($E\{m_\alpha, m'_\alpha\}[\cdot]$ と書くべきところを単に $E[\cdot]$ と書く)

$$\sigma^2 = E[\|\Delta m_\alpha\|^2] = E[\|\Delta m'_\alpha\|^2] \\ (= \int_0^\infty \rho^2 P(\rho) d\rho) \quad (7.1)$$

誤差は N ベクトルではなく画像間の各点に一樣かつ独立に生じると仮定するのも合理的であるが、物体の視角、(あるいはレンズの焦点距離に対する寸法比)が大きくなければ上に示したモデルが十分良い近似である。

【補題 1】

$$E\{m_{\alpha(i)}\} = 0, \quad E\{m_{\alpha(i)}\} = 0 \quad (7.2)$$

(証明) 仮定により Δm_α と $-\Delta m_\alpha$ の分布は同一であるから対称性より明らかである $\Delta m'_\alpha$ についても同様である。

【補題 2】

$$E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)}] = \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta_{ij} - \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)}) \\ E[\Delta m'_{\alpha(i)} \Delta m'_{\alpha(j)}] = \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta_{ij} - \bar{m}'_{\alpha(i)} \bar{m}'_{\alpha(j)}) \quad (7.3)$$

(証明) $\bar{m}_\alpha = (0, 0, 1)^T$ となるような XYZ 座標系をとれば、 Δm_α は XY 平面上に等方的に分布するから

$$E\{(m_{\alpha(1)})^2\} = E\{(m_{\alpha(2)})^2\} = \frac{1}{2} E[\|\Delta m_\alpha\|^2] = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (7.4)$$

となる。一方、 $\Delta m_{\alpha(3)} = 0$ より

$$E[\Delta m_{\alpha(3)} \Delta m_{\alpha(1)}] = E[\Delta m_{\alpha(3)} \Delta m_{\alpha(2)}] \\ = E[\Delta m_{\alpha(3)} \Delta m_{\alpha(3)}] = 0 \quad (7.5)$$

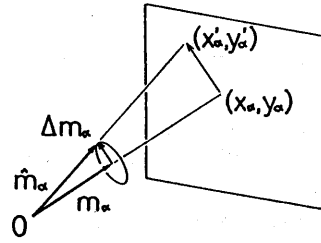


図8 画像の誤差の確率モデル

である。また、分布は XZ 面に関して対称であるから $(\Delta m_{\alpha(1)}, m_{\alpha(1)}, 0)^T$ と $(-\Delta m_{\alpha(1)}, m_{\alpha(1)}, 0)^T$ との分布は同一であり、対称性より

$$E[\Delta m_{\alpha(1)} \Delta m_{\alpha(2)}] = 0 \quad (7.6)$$

である。ゆえに式(7.3)の第1式が成立している。この式は(直交)テンソル式であるから座標回転に不変であり、ひとつの座標系で成立すれば任意の座標系で成立する¹⁾。式(7.3)の第2式も同様である。

【命題 1】

$$E\{m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)}\} = (1 - \frac{1}{2} \sigma^2) \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \delta_{ij} \\ E\{m'_{\alpha(i)} m'_{\alpha(j)}\} = (1 - \frac{1}{2} \sigma^2) \bar{m}'_{\alpha(i)} \bar{m}'_{\alpha(j)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \delta_{ij} \quad (7.7)$$

(証明) 補題1, 補題2より

$$E\{m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)}\} \\ = E\{(\bar{m}_{\alpha(i)} + \Delta m_{\alpha(i)})(\bar{m}_{\alpha(j)} + \Delta m_{\alpha(j)})\} \\ = E\{\bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)}\} + E\{\bar{m}_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)}\} \\ + E\{\Delta m_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)}\} + E\{\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)}\} \\ = \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)} + E[\Delta m_{\alpha(i)} \Delta m_{\alpha(j)}] \\ = \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)} + \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta_{ij} - \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(j)}) \quad (7.8)$$

となり式(7.7)の第1式が得られる。第2式も同様にして得られる。

さて、式(2.2)の $J(R, h)$ を考える(本来は $J\{m_\alpha, m'_\alpha\}(R, h)$ と書くべきであるが)。誤差がない場合を $\bar{J}(R, h)$ ($= J\{\bar{m}_\alpha, \bar{m}'_\alpha\}(R, h)$) とする。

【命題 2】

$$E\{J(R, h)\} = (1 - \frac{1}{2} \sigma^2) \bar{J}(R, h) - \frac{1}{2} \sigma^2 (1 - \frac{1}{2} \sigma^2) \\ \times [\sum_{\alpha=1}^N (h, \bar{m}_\alpha)^2 + \sum_{\alpha=1}^N (h, R \bar{m}_\alpha)^2] + N \sigma^2 \quad (7.9)$$

(証明) $J(\mathbf{R}, \mathbf{h})$ は要素で書くと次のようになる。

$$J(\mathbf{R}, \mathbf{h}) = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} \times m_{\alpha(i)} m_{\alpha(m)} m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.10)$$

ただしテンソル記法を用い、同じ添字に関する従和記号を省略する (アインシュタインの規約)。これより

$$E[J(\mathbf{R}, \mathbf{h})] = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} E[m_{\alpha(i)} m_{\alpha(m)}] \times E[m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)}] R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.11)$$

となり、式(7.7)を代入すると次のようになる。

$$E[J(\mathbf{R}, \mathbf{h})] = (1 - \frac{1}{2}\sigma^2) J_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 (1 - \frac{1}{2}\sigma^2) \times (J_2 + J_3) + \frac{1}{4}\sigma^4 J_4 \quad (7.12)$$

$$J_1 = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} \bar{m}_{\alpha(i)} \bar{m}_{\alpha(m)} \bar{m}'_{\alpha(l)} \bar{m}'_{\alpha(q)} \times R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.13)$$

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} \delta_{im} m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} \times R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.14)$$

$$J_3 = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} m_{\alpha(i)} m_{\alpha(m)} \times \delta_{lq} R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.15)$$

$$J_4 = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} \delta_{im} \delta_{lq} R_{kl} R_{pq} h_j h_n \quad (7.16)$$

定義より $J_1 = \bar{J}(\mathbf{R}, \mathbf{h})$ である。また J_2, J_3, J_4 を変形すると、最終的に

$$J_2 = N - \sum_{\alpha=1}^N (h, \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha})^2 \quad (7.17)$$

$$J_3 = N - \sum_{\alpha=1}^N (h, \bar{m}'_{\alpha})^2 \quad (7.18)$$

および $J_4 = 2N$ を得る (付録参照)。これらを式(7.12)へ代入すれば式(7.9)を得る。

【定理 2】 最良反復法は統計的に偏っている。

(証明) 式(7.7)を真の解 $\{\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{h}}\}$ の周りに展開すると次のようになる。

$$E[J(\mathbf{R}, \mathbf{h})] = (1 - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 J(\bar{\mathbf{R}} + \Delta \mathbf{R}, \bar{\mathbf{h}} + \Delta \mathbf{h}) - \frac{1}{2}\sigma^2 (1 - \frac{1}{2}\sigma^2) \left[\sum_{\alpha=1}^N (\bar{\mathbf{h}} + \Delta \mathbf{h}, \bar{m}'_{\alpha})^2 \right]$$

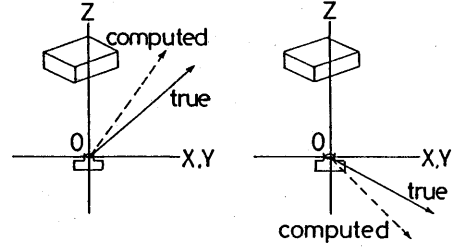


図9 カメラの並進の計算の偏り

$$+ \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\mathbf{h}} + \Delta \mathbf{h}, (\bar{\mathbf{R}} + \Delta \mathbf{R}) \bar{m}'_{\alpha})^2 N \sigma^2 = \text{const.} - \sigma^2 (1 - \frac{1}{2}\sigma^2) \left[\sum_{\alpha=1}^N (h, \bar{m}'_{\alpha}) (\Delta \mathbf{h}, \bar{m}'_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N (h, \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha}) ((\Delta \mathbf{h}, \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha}) + (h, \Delta \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha})) \right] + O(\Delta \mathbf{R}, \Delta \mathbf{h})^2 \quad (7.19)$$

8. まとめ

前節の結論は、真の運動パラメータが $\{\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{h}}\}$ であり、真のデータが $\{\bar{m}_{\alpha}\}, \{\bar{m}'_{\alpha}\}$ であるとき、誤差が加わったデータ $\{m_{\alpha}\}, \{m'_{\alpha}\}$ を用いると、計算される運動パラメータ $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \Delta \mathbf{R}, \mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} + \Delta \mathbf{h}$ は平均として

$$\sum_{\alpha=1}^N ((h, \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha}) \bar{\mathbf{h}}, \Delta \mathbf{R} \bar{m}'_{\alpha}) > 0 \quad (8.1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N ((\bar{\mathbf{h}}, \bar{m}'_{\alpha}) \bar{m}_{\alpha} + (\bar{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{R}} \bar{m}'_{\alpha}) \bar{\mathbf{R}} \bar{m}'_{\alpha}, \Delta \mathbf{h}) > 0 \quad (8.2)$$

を満たす $\Delta \mathbf{R}, \Delta \mathbf{h}$ だけ偏っているということである (ただし $\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}$ が直交行列となるものしか許されない)。これは実際に数値計算によって確かめることができる。

特に物体像が画像面の中心付近にあって回転が微小であれば $\bar{m}_{\alpha} \approx k, \bar{\mathbf{R}} \bar{m}'_{\alpha} \approx k, \alpha = 1, \dots, N$ である。ただし $k = (0, 0, 1)^T$ は Z 軸に沿う単位ベクトルである。このとき式(8.2)より、 $(\bar{\mathbf{h}}, k) > 0$ なら $(k, \Delta \mathbf{h}) > 0$ であり、 $(\bar{\mathbf{h}}, k) < 0$ なら $(k, \Delta \mathbf{h}) < 0$ である。したがって、カメラを前方に移動すると並進ベクトル \mathbf{h} はカメラの光軸の方向へ偏り、カメラを後方に移動するとカメラの光軸からはなれるように偏る傾向があることがわかる (図5)。これは実際に実験によって確かめることができる。

参考文献

- [1] 金谷健一, 森尻智昭, L.M. ハッタイ: 2画像からの3次元剛体運動の最良推定, 情報処理学会研究報告

90-CV-67(1990).

- [2] 金谷健一: 「画像理解 / 3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
 [3] 小野寺康浩, 金谷健一: 計算射影幾何学, 情報処理学会研究報告 89-CV-61 (1989).
 [4] 川島孝夫, 金谷健一: 3次元並進運動の計算射影幾何学, 情報処理学会研究報告 90-CV-65 (1990).
 [5] K. Kanatani: *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990.

付 録

$R = (R_{ij})$ が直交行列である条件, および $h = (h_i)$ が単位ベクトルである条件はそれぞれ

$$R_{ij}R_{ik} = R_{ji}R_{ki} = \delta_{jk} \quad (\text{A.1})$$

$$h_i h_i = 1 \quad (\text{A.2})$$

と書ける. そして, エディントンンのイプシロン ϵ_{ijk} に関する恒等式

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm} \quad (\text{A.3})$$

およびクロネッカのデルタ δ_{ij} の基本的性質

$$\delta_{ij}A_{\dots i} \dots B_{\dots j} \dots = A_{\dots i} \dots B_{\dots i} \dots \quad (\text{A.4})$$

特に

$$\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3 \quad (\text{A.6})$$

に注意. また m_α, m'_α は単位ベクトルであるから

$$m_{\alpha(i)}m_{\alpha(i)} = m'_{\alpha(i)}m'_{\alpha(i)} = 1 \quad (\text{A.7})$$

である. 以上を用いれば, 式(7.14), (7.15), (7.16)の J_2, J_3, J_4 はそれぞれ次のように変形できる.

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^N (\delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{kn}) m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} R_{kl} R_{pq} h_j h_n$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha=1}^N [m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} R_{kl} R_{kq} h_j h_j \\ &\quad - m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} R_{kl} R_{jq} h_j h_k] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N [m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(q)} \delta_{lq} - h_k R_{kl} m'_{\alpha(l)} h_j R_{jq} m'_{\alpha(q)}] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N [m'_{\alpha(l)} m'_{\alpha(l)} - (h_k R_{kl} m'_{\alpha(l)})^2] \\ &= N - \sum_{\alpha=1}^N (h, R m'_\alpha)^2 \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} m_{\alpha(i)} m_{\alpha(m)} \delta_{kp} h_j h_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) m_{\alpha(i)} m_{\alpha(m)} h_j h_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^N [m_{\alpha(i)} m_{\alpha(i)} h_j h_j - m_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} h_j h_i] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N [1 - (m_{\alpha(i)} h_i)^2] \\ &= N - \sum_{\alpha=1}^N (h, m_\alpha)^2 \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \sum_{\alpha=1}^N (\delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{kn}) \delta_{kp} h_j h_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^N [3\delta_{jn} h_j h_n - \delta_{jn} h_j h_n] \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^N h_j h_j = 2N \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$