

## 物体の周波数解析

井宮 淳† 安田 篤司‡

†千葉大学 工学部 情報工学科

‡横河・ヒューレット・パッカード株式会社

あらかし 本論文では、3次元物体の連続変形の数学的表現について考察する。まず、3次元物体の輪郭形状の周波数解析の方法を提案する。すなわち空間に固有の直交座標の3軸それぞれを軸として3次元物体を一般化円筒表現する。そして、断面の輪郭形状の記述にはP形フーリエ記述子を採用する。また、各軸に関する輪郭形状をP形フーリエ記述子に基づいて周波数解析し、その低周波成分から再生される物体を近似形状として採用する。この手続きによって再生される物体が、人間が普通に思い描く「物体の角をしないで丸した形状」と一致していることを計算機実験を通して示す。提案する解析法は、人間が物体に関して獲得した幾何概念を利用して新しい幾何形状に関する概念を作り上げる過程の1つのモデルと考えることができる。また、模型駆動型ビジョンシステムに適用すれば、用意した模型の間の内挿や外挿によって新しい幾何形状を構成できるため、用意すべき模型の数と模型に関する幾何概念を少なくできる。

## Fourier Analysis of Three Dimensional Shapes

Atsushi IMIYA† and Atsushi YASUDA‡

†Department of Information and Computer Sciences, Chiba University  
1-33, Yayoi-cho, Chiba 260, JAPAN

‡YOKOGAWA HEWLETT PACKARD  
3-8-20, Takaido-higasi, Suginami 168, Tokyo JAPAN

**Abstract** Almost all people can imagine a process to make a clay cube a clay ball by smoothing every edge and vertex of a cube without knowing any mathematics to describe this procedure theoretically. This is an example which shows that we can infer and obtain new concepts from learned geometrical concepts. This paper proposes a mathematical model to explain a process to obtain an outline of a shape by using the generalized cylinder representation of the three dimensional shape and Fourier descriptor for boundary curves on each slice. The method yields an outline of changing of the curvature of the surface of the three dimensional shape by extracting low frequency components of Fourier descriptors of curves along an orthogonal net drawn on the surface of the original shape.

## 1. まえがき

「粘土でできたサイコロの角をしないで丸くすると、どんな形になりますか。」と聞かれれば、ほとんどの人が「球になります。」と答えるに違いない。このことから「ある物体とそれが変化した物体の性質」に関してほとんどの人に共通の幾何概念が存在すると考えることができる。また、「立方体と球とが幾何学的に似た性質も持っている。」とほとんどの人が理解していると考えることができる。しかも、立方体から球を推測するように、人間はある物体の特徴に関する概念を獲得すると、他の既に獲得している知識や概念と新しく獲得した幾何概念からさらに新しい概念を形成していると考えることができる。

初等位相幾何学の本を開くと、「連続的に変形して球に変形できる物体は位相幾何学的に球と同じ性質を持つ」と述べられている。そして、立方体や穴の無い多面体を変形して球にできることを説明する図が書かれていることがある [1]。しかし、位相幾何学は、多様体の変形による点、線、面、体積体の接続構造の不変性を研究対象としている。そのため位相幾何学では「ある物体とそれが変化した物体の性質」に関して解析的な立場からは何も答えることができないのである。言い替えば、位相幾何学の立場からは、それが研究の対象としているにもかかわらず、「物体の角を連続的に丸くすることを数学的にどう表現するのか。」に答えることができないのである。また、微分幾何学は多様体上の近傍の変化を捉える道具を用意している [1]。しかし、微分幾何学だけでは「ある物体とそれが変化した物体の性質」のような大域的な幾何概念の全体像を統一的に捉えるには不十分である。一部分を提示された平面図形の全体像を確率的に推測する理論が計算機幾何学の中で幾何概念の学習と呼ばれることがある [2]。顕微鏡画像の解析を目的として、2次元平面への投影画像から3次元物体の形状特徴を確率論や微分および積分幾何学に基づき推定する理論的体系は、古くからステレオロジーと呼ばれてきた [3]。図形や物体の形状特徴の推定を幾何概念の獲得あるいは学習と呼ばれている。しかし、幾何形状の確率的推計理論によって物体の変形による概念の外延を取り扱うことはできない。

本論文では、3次元物体の連続変形の数学的表現について考察する。まず、物体の一般化円筒表現 [4] と平面曲線の P 形フーリエ記述子 [6] を利用して3次元物体を周波数解析する手法を提案する。すなわち空間に固有の直交座標の3軸それぞれを軸として3次元物体を一般化円筒表現する。そして、断面の輪郭形状の記述には P 形フーリエ記述子を採用する。また、各軸に関する輪郭形状を P 形フーリエ記述子に基づいて周波数解析し、その低周波成分から再生される物体を近似物体として採用する。この手続きによって再生される物体が、人間が普通に想い描く「物体の角をしないで丸した物体」と一致していることを計算機実験を通して示す。

## 2. 物体の離散一般化円筒表現

本論文では、穴の無い物体を取り扱うことにする。また、物体の内部の密度は一定と仮定する。まず、物体の数学的記述からはじめる。3次元ユークリッド空間  $R^3$  の基準となる直交座標で表したベクトルを  $\vec{p} = (x, y, z)^T$  とする。また、 $R^3$

の閉曲面を  $\phi(x, y, z) = 0$  とする。そして

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & : \phi(x, y, z) \leq 0 \\ 0 & : \phi(x, y, z) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

によって定義される2値関数  $f(x, y, z)$  を物体と呼ぶことにする。すなわち、閉曲面の内部で1を取る2値関数が物体である。

任意に空間に固定された1本の曲線を  $C$  とする。曲線を計算機で処理するために、 $C$  を長さ  $\delta$  線分によって折れ線で近似した曲線と  $C$  とを同一視する。折れ線の上の接点の位置ベクトルを

$$\vec{c}(n) = (c_1(n), c_2(n), c_3(n))^T : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

とする。また、

$$n_1(n) = \frac{c_1(n+1) - c_1(n)}{\delta} \quad (3)$$

$$n_2(n) = \frac{c_2(n+1) - c_2(n)}{\delta} \quad (4)$$

$$n_3(n) = \frac{c_3(n+1) - c_3(n)}{\delta} \quad (5)$$

と置けば、 $C$  上の各点に於けるベクトル

$$\vec{n}(n) = (n_1(n), n_2(n), n_3(n))^T \quad (6)$$

が折れ線の接点の単位接ベクトルになる。

ベクトル  $\vec{n}(n)$  を法線ベクトルとし、点  $\vec{c}(n)$  を通る平面を  $P(n)$  とする:

$$P(n) = \{ \vec{p} \mid \vec{p}^T \vec{n}(n) = \vec{c}(n)^T \vec{n}(n) \} \quad (7)$$

$P(n)$  を軸  $C$  に直交する平面と呼ぶ。ただし、

$$\vec{p}^T \vec{n}(n) = xn_1(n) + yn_2(n) + zn_3(n) \quad (8)$$

$$\vec{c}(n)^T \vec{n}(n) = c_1(n)n_1(n) + c_2(n)n_2(n) + c_3(n)n_3(n) \quad (9)$$

である。ベクトル  $\vec{n}(n+1)$  の平面  $P(n)$  への正射影と同じ方向を向いた単位ベクトル

$$\vec{k}(n) = \frac{\vec{n}(n+1) - (\vec{n}(n)^T \vec{n}(n+1)) \vec{n}(n)}{|\vec{n}(n+1) - (\vec{n}(n)^T \vec{n}(n+1)) \vec{n}(n)|} \quad (10)$$

が折れ線近似した曲線の単位主法線ベクトルである。

平面  $P(n)$  の任意に固定した互いに直交する2つの単位ベクトルを

$$\vec{l}(n) = (l_1(n), l_2(n), l_3(n))^T \quad (11)$$

$$\vec{m}(n) = (m_1(n), m_2(n), m_3(n))^T \quad (12)$$

とする。ただし、3つのベクトル間に、

$$\vec{m}(n) = \vec{n}(n) \times \vec{l}(n) \quad (13)$$

なる関係が成立しているとする。このとき、ベクトル  $\vec{l}(n)$ ,  $\vec{m}(n)$ ,  $\vec{n}(n)$  がこの順に左手系をなす。特に、 $\vec{l}(n)$  とし単位主法線ベクトルを選べば、 $\vec{m}(n)$  は従法線方向の単位ベクトルとなる。

$\vec{a}(n)$  を原点とし接線ベクトル  $\vec{n}(n)$  の方向を  $Z$  軸の方向とする局所直交座標を考える。この座標の  $X$  軸方向のベクトルと  $Y$  軸方向のベクトルとは共に  $\vec{n}(n)$  を法線とする平面  $P(n)$  上に存在する。  $X$  軸をベクトル  $\vec{l}(n)$  の方向に選び、  $Y$  軸をベクトル  $\vec{m}(n)$  の向きに選ぶことにする。局所座標のベクトルを  $((X, Y, Z))_n^T$  と表すことにする。また、  $((X, Y, 0))_n^T$  を  $((X, Y))_n^T$  と表すこともある。行列  $R(n)$  を

$$R(n) = \begin{pmatrix} l_1(n) & m_1(n) & n_1(n) \\ l_2(n) & m_2(n) & n_2(n) \\ l_3(n) & m_3(n) & n_3(n) \end{pmatrix} \quad (14)$$

とすれば、基準座標で表したベクトル  $(x, y, z)^T$  と局所座標で表したベクトル  $((X, Y, Z))_n^T$  とは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R(n) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{a}(n) \quad (15)$$

なる関係によって結ばれている。

軸に直交する平面と  $f$  との共通部分

$$D(n) = \{\vec{p} | f(x, y, z) = 1 \wedge \vec{p} \in P(n)\} \quad (16)$$

が  $P(n)$  に沿った  $f$  の断面である。また、  $P(n)$  と  $\phi(x, y, z) = 0$  との共通部分  $B(n)$ :

$$B(n) = \{\vec{p} | \phi(x, y, z) = 0 \wedge \vec{p} \in P(n)\} \quad (17)$$

が断面の輪郭曲線である。  $\phi(x, y, z) = 0$  が閉曲面であることから、  $B(n)$  は一般には、互いに交わらない複数の閉曲線上の点からなる集合である。物体の軸の選び方は任意である。そこで、  $0 \leq n \leq N$  に対して

$$\{\vec{p} | f(x, y, z) = 1\} \cap P(n) \neq \emptyset \quad (18)$$

が成立し、さらに  $n < 0, N < n$  に対して、

$$\{\vec{p} | f(x, y, z) = 1\} \cap P(n) = \emptyset \quad (19)$$

が成立すると仮定する。このとき、物体  $f$  の断面と共有部分を持つ曲線  $C$  の部分曲線分の全長は  $\delta N$  となる。また、  $n \neq n' : 0 \leq n, n' \leq N$  に対して常に

$$D(n) \cap D(n') = \emptyset \quad (20)$$

なる関係が成立することを仮定する。すなわち、軸上の各点における物体の断面が交わらないように曲線  $C$  が選ばれていることを仮定する。式 (18)(19)(20) を満たす曲線  $C$  を物体の軸と呼ぶことにする。そして、  $\vec{a}(0)$  を軸の始点、  $\vec{a}(N)$  を軸の終点と呼ぶ。

次に、輪郭曲線  $B(n)$  も折れ線によって表現する。議論を簡単にするために、  $B(n)$  が単一の閉曲線になっている場合を考えることにする。

$0 \leq n \leq N$  に対して輪郭曲線  $B(n)$  の全長を  $S(n)$  とする。  $M$  を正の整数とする。  $B(n)$  を長さ  $\delta(n) = S(n)/M$  の折れ線  $M$  本によって近似したものと  $B(n)$  とを同一視する。そして、折れ線の接点を

$$\vec{b}(m, n) = ((u(m, n), v(m, n)))_n^T : m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (21)$$

とする。輪郭曲線が閉曲線であることから  $u(m, n), v(m, n)$  は共に  $m$  に関して周期  $M$  の離散周期関数である。従って、式 (21) において

$$\vec{b}(M, n) = \vec{b}(0, n) : n = 0, 1, \dots, N \quad (22)$$

なる関係が成立している。

行列  $Q(n)$  を

$$Q(n) = \begin{pmatrix} l_1(n) & m_1(n) \\ l_2(n) & m_2(n) \\ l_3(n) & m_3(n) \end{pmatrix} \quad (23)$$

と置くことにする。このとき、式 (15) を考慮すれば、局所座標で表された輪郭上の点  $\vec{b}(m, n)$  と基準座標で表された輪郭上の点

$$\vec{s}(m, n) = (s_1(m, n), s_2(m, n), s_3(m, n))^T \quad (24)$$

とは、

$$\vec{s}(m, n) = Q(n)\vec{b}(m, n) + \vec{a}(n) \quad (25)$$

なる関係で結ばれていることがわかる。式 (25) は、3次元物体  $f$  の輪郭線群を1つの空間折れ線と平面折れ線群とに分けて表現している。軸を構成する折れ線の長さ  $\delta$  と各輪郭曲線を構成する折れ線の長さ  $\delta(n)$  を十分小さくすれば、すなわち、離散曲線を構成する折れ線の数を十分大きくすれば、連続曲線による通常の一般化円筒表現を  $\vec{s}(m, n)$  を頂点とする多面体によって近似できる。そこで以下では、  $\vec{s}(m, n)$  を頂点とする多面体を物体  $f$  の輪郭面と考えることにする。そして、式 (25) による物体の輪郭面の表現を離散一般化円筒表現呼ぶことにする。

ここで、特に基準座標の軸を離散一般化円筒表現の軸に選んだ場合を考える。すなわち、軸の向きが  $R^3$  の正規直交基底

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T \quad (26)$$

のどれかの方向を向いている場合を考えることにする。軸を  $\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$  の方向に選べば、この順に、基準座標で表したベクトルと局所座標で表したベクトルとが

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

なる関係で結ばれるように局所座標を決めることができる。ベクトル  $\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$  に直交する平面群を順に  $P_1(n), P_2(n), P_3(n)$  とする:

$$P_1(n) = \{\vec{p} | z = n\delta_1\} \quad (30)$$

$$P_2(n) = \{\vec{p} | y = n\delta_2\} \quad (31)$$

$$P_3(n) = \{\vec{p} | x = n\delta_3\} \quad (32)$$

そして、基底ベクトル  $\vec{e}_\alpha$ :  $\alpha = 1, 2, 3$  に直交する平面群それぞれが、 $n$  ( $N(\alpha, 1) \leq n \leq N(\alpha, 2)$ ) に対して、

$$\{\bar{p}|f(x, y, z) = 1\} \cap P_\alpha(n) \neq \emptyset \quad (33)$$

が成立し、さらに  $n < N(\alpha, 1)$   $N(\alpha, 2) < N$  に対して

$$\{\bar{p}|f(x, y, z) = 1\} \cap P_\alpha(n) = \emptyset \quad (34)$$

が成立することを仮定する。このとき、軸の長さは、それぞれ  $\delta_\alpha(N(\alpha, 2) - N(\alpha, 1))$ :  $\alpha = 1, 2, 3$  となる。

$\alpha = 1, 2, 3$  に対して  $P_\alpha(n)$  と物体との共通部分の決める物体の断面を  $D_\alpha(n)$  とし、断面の輪郭曲線を  $B_\alpha(n)$  とする:

$$D_\alpha(n) = \{\bar{p}|f(x, y, z) = 1 \wedge \bar{p} \in P_\alpha(n)\} \quad (35)$$

$$B_\alpha(n) = \{\bar{p}|f(x, y, z) = 1 \wedge \bar{p} \in P_\alpha(n)\} \quad (36)$$

このとき、 $D_\alpha(n)$  は互いに共通部分を持たない。また、輪郭曲線  $B_\alpha(n)$  の全長を  $S_\alpha(n)$  とし輪郭曲線を  $M_\alpha$  本の折れ線で近似する。折れ線の長さは  $\delta_\alpha(n) = S_\alpha(n)/M_\alpha$  となる。

このとき、式 (27)(28)(29) の座標の選び方の順に輪郭曲線の接点を

$$\vec{b}_\alpha(m, n) = ((u_\alpha(m, n), v_\alpha(m, n)))_{n(\alpha)}^T: \alpha = 1, 2, 3 \quad (37)$$

とし、輪郭面上の接点を

$$\vec{s}_\alpha(m, n) = (s_{1(\alpha)}(m, n), s_{2(\alpha)}(m, n), s_{3(\alpha)}(m, n)): \alpha = 1, 2, 3 \quad (38)$$

とする。

まず、3つの行列  $Q_\alpha$ :  $\alpha = 1, 2, 3$  を

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

とする。このとき、輪郭曲線上の点と輪郭面上の点とはそれぞれ、

$$\vec{s}_\alpha(m, n) = Q_i \vec{b}_\alpha(m, n) + \delta_\alpha n \vec{e}_{4-\alpha}: \alpha = 1, 2, 3 \quad (40)$$

なる関係で結ばれている。

### 3. 輪郭曲線の周波数解析

本章では、平面曲線の P 形フーリエ記述子を利用して輪郭曲線の概形を抽出することを考える。以下では輪郭曲線の議論を簡単にするために、折れ線の数が 2 の累乗の場合を考える。まず、点  $\vec{z}(n)$ :  $n = 0, 1, \dots, N$  を原点とする局所座標において輪郭曲線を  $B(n)$  を P 形フーリエ記述子によって表現することから始める。点  $\vec{b}(m, n)$  と複素数

$$w(m, n) = u(m, n) + iv(m, n) \quad (41)$$

とを同一視する。次いで、

$$\dot{w}(m, n) = w(m, n) - w(m-1, n): m = 1, 2, \dots, M \quad (42)$$

とする。このとき、 $\dot{w}(m+1)$  と  $\dot{w}(m, n)$  との間の偏角

$$-\pi \leq \alpha(m, n) < \pi: m = 1, 2, \dots, M \quad (43)$$

は、反時計回りを正の向きに測れば、

$$\exp(i\alpha(m, n)) = \frac{\dot{w}(m+1, n)}{\dot{w}(m, n)} \quad (44)$$

によって与えられる。また、 $\alpha(0, n)$  は  $\dot{w}(1, n)$  と  $((1, 0))_n^T$  との成す角とする。関数  $\alpha(m, n)$  を偏角関数という。次に偏角関数から

$$\theta(m, n) = \begin{cases} \alpha(0, n) & : m = 0 \\ \theta(m-1, n) + \alpha(m, n) & : m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \quad (45)$$

によって全曲率関数を定義する。そして、関数  $a(m, n)$ :

$$a(m, n) = \exp(i\theta(m, n)): m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (46)$$

を輪郭曲線の P 表現という。定義より、P 表現と曲線の接点との間に  $m = 0, 1, \dots, M-1$  に対して、

$$a(m, n) = \frac{w(m+1, n) - w(m, n)}{\delta(n)} \quad (47)$$

なる関係が成立している。従って、P 表現から、

$$w(m, n) = w(0, n) + \delta(n) \sum_{k=0}^{m-1} a(k, n) \quad (48)$$

によって輪郭曲線  $B(n)$ :  $n = 0, 1, \dots, N$  を再生できる。

次に、

$$\tau(m, n) = \begin{cases} 0 & : m = 0 \\ \tau(m-1, n) + \delta(n) & m = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (49)$$

と置けば、関数  $\tau(m, n)$  ( $\tau(M, n) = S(n)$ ) は点  $\vec{b}(0, n)$  から  $\vec{b}(m, n)$  ( $\vec{b}(M, n) = \vec{b}(0, n)$ ) に至る長さである。従って、

$$\Theta(\tau, n) = \theta(m, n): \tau(m, n) \leq \tau < \tau(m+1, n) \quad (50)$$

$$A(\tau, n) = a(m, n): \tau(m, n) \leq \tau < \tau(m+1, n) \quad (51)$$

と置けば、 $\Theta(\tau, n)$  は全曲率関数を、また  $A(\tau, n)$  は P 表現を、それぞれ曲線の始点からの長さとして表した関数になる。

全曲率関数及び P 表現それぞれの定義より、

$$\begin{aligned} W(\tau, n) &= w(0, n) + \int_0^\tau \exp(i\Theta(\sigma)) d\sigma \\ &= w(0, n) + \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma: 0 \leq \tau \leq S(n) \end{aligned} \quad (52)$$

によって輪郭曲線を始点からの関数として表すことができる。また、式 (52) より、

$$U(\tau, n) = \Re[W(\tau, n)], \quad V(\tau, n) = \Im[W(\tau, n)] \quad (53)$$

と置けば、

$$\vec{B}(\tau, n) = ((U(\tau, n), V(\tau, n)))_n^T \quad (54)$$

$$\vec{S}(\tau, n) = Q(n) \vec{B}(\tau, n) + \vec{z}(n) \quad (55)$$

によって、局所座標及び基準座標それぞれにおいて輪郭曲線  $B(n)$  上の点を曲線上の始点からの長さの関数として表すことができる。

さて、P 表現のフーリエ変換

$$F(m, n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} a(k, n) \exp[-2\pi i \frac{km}{M}] \quad (56)$$

を輪郭曲線の P 形フーリエ記述子という。

$$\hat{F}(m, n) = \begin{cases} F(m, n) & : m = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} \\ F(M+m, n) & : m = -\frac{M}{2} + 1, -\frac{M}{2}, \dots, -1 \end{cases} \quad (57)$$

と置けば、

$$a(m, n) = \sum_{k=\frac{M}{2}-1}^{\frac{M}{2}} \hat{F}(k, n) \exp[2\pi i \frac{km}{M}] \quad (58)$$

よって、P 形フーリエ記述子から P 表現を一意に再生できる。従って、式 (48) を考慮すれば、与えられた P 形フーリエ記述子から輪郭曲線を一意に決定できることがわかる。

以上の準備の基で、輪郭曲線の概形を抽出することを考える。式 (47) より、P 表現が曲線の接線の変化を捉える指標になっている。従って、P 表現のフーリエ変換である P 形フーリエ記述子の低周波成分は、輪郭曲線の方向の変化の概略を捉えているはずである。すなわち、 $M/2$  より小さな正の整数  $K$  に対して、

$$\hat{F}(m, n) = \begin{cases} \hat{F}(m, n) & : |m| \leq K \\ 0 & : |m| > K \end{cases} \quad (59)$$

とし、

$$a_K(m, n) = \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \hat{F}(k, n) \exp[2\pi i \frac{km}{M}] \quad (60)$$

$$w_K(m, n) = w(0, n) + \delta(n) \sum_{k=0}^{m-1} a_K(k, n) \quad (61)$$

よって再生されるベクトル

$$\vec{b}_K(m, n)' = ((\Re[w_K(m, n)], \Im[w_K(m, n)]))_n^T \quad (62)$$

を接点とする曲線が輪郭曲線の概形を捉えている。ここで、

$$\vec{b}_K(0, n)' = \vec{b}(0, n), \quad \vec{b}_K(M, n)' = \vec{b}_K(0, n)' \quad (63)$$

なる関係が成立している。 $b_K(m, n)'$  を  $K$  次の再生曲線という。

式 (51) と同様にして関数  $A_K(m, n)$  を構成し、

$$W_K(\tau, n) = w(0, n) + \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma : 0 \leq \tau \leq S(n) \quad (64)$$

$$U_K(\tau, n) = \Re[W_K(\tau, n)], \quad V_K(\tau, n) = \Im[W(\tau, n)] \quad (65)$$

と置けば、

$$\vec{B}_K(\tau, n)' = ((U_K(\tau, n), V_K(\tau, n)))_n^T \quad (66)$$

よって  $K$  次の再生曲線上のベクトルを始点からの長さの関数として表すことができる。

次に  $K$  次の再生曲線を境界とする図形の重心に付いて考える。

$$\dot{U}(\tau, n) = \frac{\partial}{\partial \tau} U(\tau, n), \quad \dot{V}(\tau, n) = \frac{\partial}{\partial \tau} V(\tau, n), \quad (67)$$

と置けば、断面  $D(n)$  の面積は

$$E(n) = \frac{1}{2} \int_0^{S(n)} \{U(\tau, n)\dot{V}(\tau, n) - \dot{U}(\tau, n)V(\tau, n)\} d\tau \quad (68)$$

によって計算できる。さらに、

$$G(n) = \frac{1}{E(n)} \iint_{D(n)} (X + iY) dX dY \quad (69)$$

と置けば、

$$\vec{g}(n) = ((\Re[G(n)], \Im[G(n)]))_n^T \quad (70)$$

が  $D(n)$  の重心である。同様の手順によって  $W_K(\tau, n)$  から、 $\vec{G}_K(n)$ 、 $\vec{D}_K(n)$  を經由して  $K$  次の再生曲線の囲む図形の重心  $\vec{g}_K(n)$  を求めることができる。

$B(n)$  と  $K$  次の再生曲線との始点と全長とが等しいことから、一般には、 $\vec{g}(n)$  と  $\vec{g}_K(n)$  とは異なる。しかし、離散一般化円筒表現によって物体の概形を抽出するとき、その断面の重心が処理の過程で変化しないと考えることができる。そこで、

$$\vec{d}_K(n) = \vec{g}_K(n) - \vec{g}(n) \quad (71)$$

によって重心の移動を補正したベクトル

$$\vec{b}_K(m, n) = \vec{b}_K(m, n)' - \vec{d}_K(n) \quad (72)$$

を接点とする曲線を  $K$  次の輪郭曲線  $B_K(n)$  として採用する。そして、

$$\vec{s}_K(m, n) = Q(n)(\vec{b}_K(m, n)) + \vec{c}(n) \quad (73)$$

によって決まる点  $\{\vec{s}_K(m, n)\}_{m=0}^M, \{n=0\}^N$  を頂点とする多面体を物体の  $K$  次の概形として採用する。また、

$$\vec{D}_K(n) = \vec{G}_K(n) - \vec{G}(n) \quad (74)$$

$$\vec{B}_K(\tau, n) = \vec{B}_K(\tau, n)' - \vec{D}_K(n) \quad (75)$$

と置けば、各断面の輪郭曲線上の点をその始点からの長さを変数とする関数を構成できる：

$$\vec{S}_K(\tau, n) = Q(n)(\vec{B}_K(\tau, n)) + \vec{c}(n) \quad (76)$$

離散一般化円筒表現の軸の方向がベクトル  $\vec{e}_\alpha$  :  $\alpha = 1, 2, 3$  と一致している場合にも同様に、ベクトル  $\vec{b}_\alpha(m, n)$  から複素関数  $w_\alpha(m, n)$ 、 $W_\alpha(m, n)$ 、曲率関数  $\alpha_\alpha(m, n)$ 、全曲率関数  $\theta_\alpha(m, n)$ 、 $\Theta(\tau, n)$  P 表現  $a_\alpha(m, n)$ 、 $A_\alpha(m, n)$ 、及び、始点からの長さを変数として輪郭曲線を表す関数  $\vec{B}_\alpha(\tau, n)$ 、 $\vec{S}_\alpha(\tau, n)$  を構成できる。さらに、重心  $\vec{g}_\alpha(n)$  および、P 形フーリエ記述子  $F_\alpha(m, n)$ 、 $\hat{F}_\alpha(m, n)$  を構成できる。そして、 $\hat{F}_\alpha(m, n)$  の低域周波数成分だけの逆フーリエ変換として  $a_{\alpha K}(m, n)$  を決定できる。また、 $K$  次の再生曲線  $\vec{b}_{\alpha K}(m, n)'$ 、 $\vec{B}_{\alpha K}(\tau, n)'$  を算出できる。 $K$  次の再生曲線の囲む図形の重心  $\vec{g}_{\alpha K}(n)$  の移動を補正すれば、 $K$  次の輪郭曲線の接点

$$\vec{b}_{\alpha K}(m, n) = \vec{b}_{\alpha K}(m, n)' - \vec{g}_{\alpha K}(n) \quad (77)$$

が決定できる。さらに、 $0 \leq m \leq M$ 、 $N(\alpha, 1) \leq n \leq N(\alpha, 2)$  に対して

$$\vec{s}_{\alpha K}(m, n) = (s_{1(\alpha)K}(m, n), s_{2(\alpha)K}(m, n), s_{3(\alpha)K}(m, n))^T \quad (78)$$

$$\vec{s}_{\alpha K}(m, n) = Q_{\alpha} \vec{d}_{\alpha K}(m, n) + \delta_{\alpha} n \vec{e}_{4-\alpha} \quad (79)$$

によって  $f$  の  $K$  次の概形の頂点を抽出できる。

また、 $\vec{G}_{\alpha K}(n)$ 、 $\vec{D}_{\alpha K}(n)$  によって、 $\vec{B}_{\alpha K}(\tau, n)$  の重心を補正した関数  $\vec{B}_{\alpha K}(\tau, n)$  から、輪郭上の始点からの長さを変数として輪郭曲線上の点を表す関数  $\vec{S}_{\alpha K}(\tau, n)$  を

$$\vec{S}_{\alpha K}(\tau, n) = Q_{\alpha} \vec{B}_{\alpha K}(\tau, n) + \delta_{\alpha} n \vec{e}_{4-\alpha} \quad (80)$$

によって構成できる。

輪郭曲線の折れ線の長さを十分短く設定しておくこと、低次の再生曲線は次第に丸くなり輪郭曲線は軸を中心とする円に近づく。特に軸が直線である場合に、低次の輪郭曲線を輪郭面とする概形は円板を連ねたような軸と直交する方向に丸い物体となる。もとの輪郭曲線と  $K$  次の再生曲線との長さは変わらない。そこで、輪郭曲線の周長  $S(n)$  を周長とする円の直径  $d(n) = S(n)/2\pi$  を輪郭曲線の等化直径と呼ぶことにする。そして等化直径の平均値を  $\bar{d}$  とする：

$$\bar{d} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N d(n) \quad (81)$$

特に軸が直線の場合、低周波成分から再生の輪郭曲線によって抽出される物体の概形は以下ようになる。

- $\bar{d} \gg \delta N$  の場合、円板が出現する。
- $\bar{d} \ll \delta N$  の場合、丸い棒が出現する。

これは、我々の物体の概形に関する常識と一致している。しかし、我々が塊と理解する立方体の様な物体の場合にも概形として円柱が抽出される。これは、我々の物体の変形に関する常識「サイコロの角を丸くすると球になる。」に反している。すなわち、立方体の様な物体では等化直径  $d(n)$  が各面において余り変化がなく、しかもその平均値  $\bar{d}$  が軸の全長にほぼ等しい場合、物体の概形を抽出するためには、軸の周りの輪郭の概形を捉えるだけでは不十分であることがわかる。

#### 4. 物体表面の周波数解析

軸が曲線であれば周波数解析 [7] によって、物体の軸の方向のおおまかな曲がりや捻りの変化を捉えることはできるが、物体の概形を捉えるためには、物体の表面の傾きの変化の大局的な変化を捉える必要がある。

そこで、 $\vec{e}_{\alpha} : \alpha = 1, 2, 3$  を軸とする離散一般化円筒表現に対して以下の処理を行うことにする。

- 1:  $\vec{e}_3$  を軸の方向として物体の輪郭曲面の概形を抽出する。
- 2:  $\vec{e}_2$  を軸の方向として 1 の結果の輪郭曲面の概形を抽出する。
- 3:  $\vec{e}_1$  を軸の方向として 2 の結果の輪郭曲面の概形を抽出する。

そして、3 の結果抽出される点を頂点とする多面体を物体の概形と考えることにする。上の処理によって、物体の表面に綱を掛けて、綱の交点の傾きの変化を綱目に沿って捉えることができる。従って、輪郭面の傾きの変化の概略を捉えるこ

とができると考えられる。また、 $\vec{e}_3$  と直交する物体の断面の間の輪郭曲線の概形の変化の概略を捉えることができる。

上の処理を行うためには、 $\vec{e}_3$  の方向を軸とする輪郭曲群から  $\vec{e}_2$  の方向を軸とする輪郭曲群を、また  $\vec{e}_2$  の方向を軸とする輪郭曲群から  $\vec{e}_1$  の方向を軸とする輪郭曲群を、それぞれ算出する必要がある。そこで、まず軸の方向の変化に伴う輪郭曲線群の変換法を示す。以下では輪郭曲線が 1 つの閉曲線になる場合に次いで考察する。

まず、 $\beta = \alpha + 1 : \alpha = 1, 2$  に対して、曲線  $\vec{S}_{\alpha}(\tau, n)$  と平面  $P_{\beta}(n)$  との交点  $\vec{a}_{n(\beta)} = ((X, Y))_{n(\beta)}^T$  は方程式

$$\vec{S}_{\alpha}(\tau, n) = Q_{\beta} \vec{a}_{n(\beta)} + \delta_{\beta} n \vec{e}_{4-\beta} \quad (82)$$

の解として与えられる。解は局所座標の直線

$$Y = \delta_{\alpha} k, : k = N(\alpha, 1), N(\alpha, 1) + 1, \dots, N(\alpha, 2) \quad (83)$$

上に並び、解はある  $k$  に対して 1 つ以上存在する。そこで、 $r = 1, 2, \dots, r(k)$  として、式 (82) の解を改めて、

$$\vec{z}(r, k) = ((X(r, k), \delta_{\alpha} k))_{n(\beta)}^T \quad (84)$$

置き、ベクトル  $\vec{z}(r, k)$  と複素数

$$p_{\beta}(r, k) = X(r, k) + i\delta_{\alpha} k \quad (85)$$

とを同一視する。ただし、

$$X(1, k) < X(2, k) < \dots < X(r(k), k) \quad (86)$$

とする。また、 $a \leq X \leq b$  が方程式 (82) を満たす場合には、 $r(k) = [(b-a)/\delta_{\beta}] - 1$  として、

$$\begin{aligned} X(r, k) &= a + \delta_{\beta}(r-1) : 0 \leq r \leq r(k) - 1 \\ X(r(k), k) &= b \end{aligned} \quad (87)$$

によって解の離散化を行う。そして、 $k(N(\alpha, 1) \leq k \leq N(\alpha, 2))$  に対して、直線  $Y = \delta_{\alpha} k$  上の交点の集合を  $\mathcal{L}(k, n)$  とする：

$$\mathcal{L}(k, n) = \{p_{\beta}(r, k)\}_{r=1}^{r(k)} \quad (88)$$

さらに、

$$\mathcal{L}(N(\alpha, 1) - 1, n) = \emptyset, \quad \mathcal{L}(N(\alpha, 2) + 1, n) = \emptyset \quad (89)$$

とし、

$$\mathcal{L}(n) = \bigcup_{k=N(\alpha, 1)-1}^{N(\alpha, 2)+1} \mathcal{L}(k, n) \quad (90)$$

とする。また、

$$\mathcal{K}(k, n) = \mathcal{L}(k-1, n) \cup \mathcal{L}(k, n) \cup \mathcal{L}(k+1, n) \quad (91)$$

とする。そして、

$$d_{n(\beta)}(p; m) = |p - p_{\beta}(m, n)| \quad (92)$$

とし、さらに、

$$\mu_{n(\beta)}(p; m) = \frac{p - p_{\beta}(m, n)}{|p - p_{\beta}(m, n)|} \quad (93)$$

$$\mu_{n(\beta)}(m) = \frac{p_{\beta}(m, n) - p_{\beta}(m-1, n)}{|p(m, n) - p_{\beta}(m-1, n)|} \quad (94)$$

と置き、式(93)(94)より、

$$\exp(i\gamma_{n(\beta)}(p; m)) = \frac{\mu_n(p; m)}{\mu_n(m)} \quad (95)$$

を定義する。次いで2つの集合を

$$\mathcal{C}(p; m) = \{p \mid \min_{p \in \mathcal{K}(k, n)} \gamma_{n(\beta)}(p; m)\} \quad (96)$$

$$\mathcal{D}(p; m) = \{p \mid \min_{p \in \mathcal{K}(k, n)} d_{n(\beta)}(p; m)\} \quad (97)$$

とする。

このとき、演算

1:  $m := 0$ ;

$$p_\beta(-1, n) = z(2, N(\alpha, 1));$$

$$p_\beta(0, n) = z(1, N(\alpha, 1));$$

$$p_\beta(n) = \{p_\beta(0, n)\}.$$

2: If  $p_\beta(m, n) \in \mathcal{L}(k, n)$ , then

$$\{p_\beta(m+1, n)\} := \mathcal{C}(p; m) \wedge \mathcal{D}(p; m).$$

3:  $p_\beta(n) := p_\beta(n) \cup \{p_\beta(m+1, n)\}$ .

4: If  $p_\beta(m+1, n) = p_\beta(0, n)$ , then stop.

5: If  $p_\beta(m+1, n) \in \mathcal{L}(k, n)$ , then

$$5.1: \mathcal{L}(n) := \mathcal{L}(n) \setminus \mathcal{L}(k, n),$$

$$5.2: \mathcal{L}(k, n) := \mathcal{L}(k, n) \setminus \{p_\beta(m+1, n)\},$$

$$5.3: \mathcal{L}(n) := \mathcal{L} \cup \mathcal{L}(k, n).$$

6:  $m := m+1$  go to 2.

の出力  $p_\beta(n)$  の要素の数を  $L$  個とする:

$$p_\beta(n) \equiv \{p_\beta(m, n)\}_{m=0}^L \quad (98)$$

この集合の要素を番号の順に次々と結べば離散一般化円筒表現の軸の方向を  $\vec{e}_{4-\alpha}$  から  $\vec{e}_{4-\beta}$  に変更したとき平面  $P_\beta(n)$  上に現れる多角形を決定できる。

上の処理は、 $\{p_\beta(k, n)\}_{k=0}^m$  が決定されいるとき、 $p_\beta(m, n)$  が直線  $Y = \delta_\alpha k$  上の点であれば、3直線

$$Y = \delta_\alpha(k-1), Y = \delta_\alpha k, Y = \delta_\alpha(k+1) \quad (99)$$

のどれかの上の点であり、しかも、 $p_\beta(m, n)$  からの距離が最小であり、さらに、 $(p_\beta(m-1, n) - p_\beta(m, n))$  から、 $(p_\beta(m+1, n) - p_\beta(m, n))$  の方向へ反時計回りに測った偏角が最小となるように  $p_\beta(m+1, n)$  を選んで、集合  $\mathcal{L}(n)$  の要素の番号付けを変換する処理である。多面体の頂点  $S_\beta$ :

$$S_\alpha \equiv \{\vec{s}_\alpha(m, n)\}_{m=0, n=N(\alpha, 1)}^M \quad (100)$$

から、 $n = N(\alpha, 1) \leq n \leq N(\alpha, 2)$  に対して、多角形の頂点  $p_\beta(n)$  を決定する一連の操作を  $T_{\beta\alpha}$  とする:

$$p_\beta(n) = T_{\beta\alpha} : S_\alpha : \beta = \alpha + 1, \alpha = 1, 2 \quad (101)$$

集合  $p_\beta(n)$  の点の間の距離は等間隔ではない、そこで、多角形上の点列を長さの等しい  $M$  本 ( $M > L$ ) の折れ線の接点に変換する処理  $I_M$  を [6] 各断面上において点列  $p_\beta(n)$  に

施せば、等間隔の折れ線で構成される曲線  $B_\beta(n)$  を算出できる:

$$B_\beta(n) = I_M : p_\beta(n) \quad (102)$$

すべての  $n (N(\beta, 1) \leq n \leq N(\beta, 2))$  に対して処理  $T_{\beta\alpha}$  と  $I_M$  とを順に施せば、軸の方向を変換した後の輪郭曲線を抽出できる。

もとの輪郭曲線から  $K$  次の再生曲線の接点を抽出する一連の変換を  $\Omega_K$  と表す:

$$\{\vec{b}_K(m, n)\}_{m=0}^M = \Omega_K : \{\vec{b}(m, n)\}_{m=0}^M \quad (103)$$

そして、式(71)(72)によって重心の移動を補正する変換を  $G$  とする:

$$\{\vec{b}_K(m, n)\}_{m=0}^M = G : \{\vec{b}_K(m, n)\}_{m=0}^M \quad (104)$$

軸上の点の集合を、

$$C_\alpha \equiv \{\delta_\alpha n \vec{e}_{4-\alpha}\}_{n=N(\alpha, 1)}^{N(\alpha, 2)} \quad (105)$$

とする。物体の軸を決定する処理  $C_\alpha$  は、 $\phi(x, y, z) = 0$  を満たす点  $\vec{p}$  から  $C_\alpha$  への変換である。そして、輪郭を決定する処理は軸を決定後  $\phi(x, y, z) = 0$  を満たす点  $\vec{p}$  から  $B_\alpha(n)$  を決定する処理である。また、空間内の点と平面曲線である輪郭上の点から多面体の頂点を構成する処理を  $Q_\alpha$  とする。このとき、演算

1:  $\alpha := 1$ .

2:  $C_\alpha = C_\alpha : \{\vec{p} \mid \phi(x, y, z) = 0\}$ .

3:  $B_\alpha(n) = B_\alpha : \{\vec{p} \mid \phi(x, y, z) = 0\}; C_\alpha$ .

4: For  $n = N(\alpha, 1)$  to  $N(\alpha, 2)$ , do

$$B_\alpha(n) := G : \{\Omega_K : B_\alpha(n)\}.$$

5:  $S_\alpha = Q_\alpha : \{B_\alpha(n); C_\alpha\}$ .

6: If  $\alpha = 3$  then stop.

7:  $C_{\alpha+1} = C_{\alpha+1} : S_\alpha$ .

8:  $B_{\alpha+1}(n) = I_M : [T_{\alpha+1\alpha} : S_\alpha]$ .

9:  $\alpha := \alpha + 1$  go to 4.

が停止したときに出力される集合  $S_3$  の要素を頂点とする多面体を物体  $f$  の  $K$  次の輪郭として採用する。

図1に立方体の  $K$  次の概形を示す。上から順に原物体の標本点、10次、5次、3次、1次の概形である。次数が少ないほど丸くなっていることがわかる。

## 5. むすび

物体表面の記述子として、球面調和関数に基づくものが知られている [4, 8]。しかし、球面調和関数は球面上の調和振動の固有振動成分を与える関数である。従って、本来振動していない物体の表面の記述に適用するには無理がある。物体の概形を抽出するためには、物体の表面の傾きの概略を捉えなければならない。本論文では、一般化円筒表現によって物体の表面に網をかぶせ、次いで網に沿った曲線を P 形フーリエ記述子することによって網の交点において物体の表面の傾きの概略を抽出する方法を提案した。本論文において

提案した概形の抽出法は、我々が思い描く物体の概形に関するイメージ「塊の角を丸くすると次第に球に近づく。」と一致している。

本論文では一般化円筒表現の軸の位置について何も仮定していない。すなわち、軸が物体の外部にあって良いことがわかる。従って、穴があつたり表面にへこみがあつても提案した手法によって物体の概形を抽出できることがわかる。物体に穴があつたり表面にへこみがあれば、1つの断面上に2本以上の輪郭曲線が現れる。その各々の曲線に対して輪郭曲線の概形を抽出する個々の処理を適用すればよい。ただし、このとき重心の補正は個々の閉曲線とそれらの合同重心との両方に適用する必要がある。

提案した手法によって抽出される面の傾きの概略は基準座標の回転に対して不変ではない。しかし、P形フーリエ記述子の低周波成分からでももとの曲線に近い曲線が再生できることを考慮すると、基準座標の3軸が互いに直交していれば、概形を捉える一般化円筒の軸の方向に依らず、ほぼ同様の概形を抽出できる。今後、座標の回転に依存しない面の傾きの概略を抽出する法に付いて検討する予定である。

本論文の一部は、井宮が金沢大学工学部電気・情報工学科に在職中、安田が昭和62年度に金沢大学において行った卒業研究に基づくものである。金沢大学工学部の関係各位に感謝する。本論文の一部は文部省からの科学研究費補助金によるものである。

#### 参考文献

1. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen: *Auschauliche Geometrie*, Springer-Verlag, 1932 (邦訳 芹沢正三訳: 直観幾何学, みすず書房, 1966.).
2. 今井 浩: 計算幾何学, 数理科学 1990年10月, アルゴリズムの発見, pp.18-23, 1990.
3. 譚訪紀夫: 定量形態学, 岩波書店, 1977.
4. D. H. Barade and C. M. Brown: *Computer Vision*, Prentice-Hall, 1982 (邦訳 福村晃夫他訳: コンピュータ・ビジョン, 日本コンピュータ協会, 1987).
5. S. E. Leiceester, J. L. Finney, and R. P. Bywater: *Description of molecular surface shape using Fourier descriptor*, Journal of Molecular Graphics, Vol.6, pp.104-108, 1988.
6. 上坂吉則: 閉曲線にも適用できる新しいフーリエ記述子, 信学論, Vol. J67-A, pp.166-173, 1984.
7. 井宮 淳, 堀 英昭: 空間曲線のためのフーリエ記述子, 情報報告, CV63-8, 1989.
8. K.-S. Park and N.-S. Lee: *A three-dimensional Fourier descriptor for human body representation/ reconstruction from serial cross sections*, Computers and Biomedical Research, Vol. 20, pp125-140, 1987.

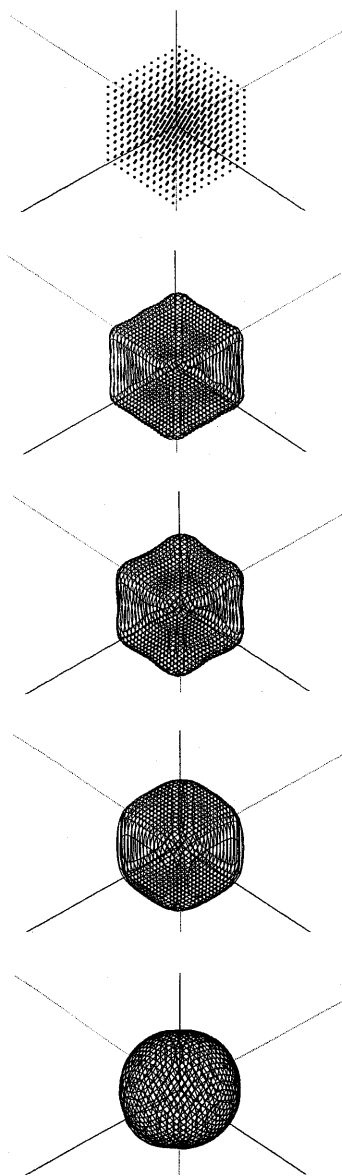


図1 上から順に: 物体の標本点, 10次, 5次, 3次, 1次の概形である。次数が少ないほど丸くなっている。実験では、各軸の方向において全ての断面上の輪郭曲線を512本の折れ線で表した。 $e_3$ の方向を軸として17面,  $e_2, e_1$ の方向を軸としてそれぞれ33面の断面上の輪郭曲線の周波数解析を行った。 $e_3$ の方向を軸として輪郭曲線の概形を算出すると、結果として輪郭曲線の内挿と平滑化が行われる。そのため、以後の処理において軸の刻みをより細かく設定できるのである。