

# ランク2制約を考慮した基礎行列・エピポール推定の精度評価

右田 剛史 尺長 健

岡山大学大学院 自然科学研究科

〒700-8530 岡山市津島中 3-1-1

{migita,shaku}@chino.it.okayama-u.ac.jp

あらまし: 未校正画像対上の対応点座標から基礎行列あるいはエピポールを推定する問題において, 推定精度を大きく左右する要因が2つある. 幾何学的誤差 (Sampson 誤差) を用いるか代数的誤差を用いるか, および, 基礎行列の探索空間をランク2の行列に限定するかランク3の行列も許すかという2点である. 通常, ランク2制約を無視した代数的誤差の最小化 (線形8点アルゴリズム) で近似解を得た後に, ランク2制約を考慮した幾何学誤差の最小化によって最適解に修正する. また, ランク2制約を考慮した代数的誤差の最小化に基づく, より高精度の近似解生成手法も提案されている. 本稿では, ランク制約の有無および目的関数の選択によって得られる4つの推定手法について, 観測誤差が推定精度に及ぼす影響の共分散行列を導き推定精度を比較する. そして, ランク制約が目的関数の選択よりも重要であることを理論および実験によって示す. また, 精度の違いが生じる原因について考察する.

## Evaluation of the effect of rank-2 constraint on the accuracy of epipole estimation

Tsuyoshi MIGITA and Takeshi SHAKUNAGA

Department of Information Technology, Faculty of Engineering, Okayama University

3-1-1 Tsushima-naka, Okayama, 700-8530, JAPAN

{migita, shaku}@chino.it.okayama-u.ac.jp

**Abstract:** The fundamental matrix or epipole can be estimated from a set of point correspondences in two uncalibrated views, and there are two important factors which greatly affect the estimation accuracy: Selection of the cost function, geometric or algebraic, and the rank-2 constraint, which is, rank-3 matrices are allowed or not. Usually, an initial estimation is obtained by an ‘algebraic without rank-2’ method, aka linear 8-point method, which is refined by a ‘geometric with rank-2’ method. In addition, we have proposed an ‘algebraic with rank-2’ method for a better initialization. This paper shows that the rank-2 constraint is more important than the cost function selection, by comparing the covariance matrices of the estimation error caused by an observation noise.

### 1 はじめに

同一シーンを撮影した一対の透視投影画像に基づいてシーンの幾何学的解析を行う場合, 基礎行列が重要な役割を果たす [2]. 基礎行列と各画像上の対応点の座標はエピポール拘束を満たすので, こ

の関係式に関する残差の重み付き2乗和を最小化することで, 画像から基礎行列を推定することができる. このとき, 推定結果はランク2の行列に限定されねばならない. 従来, 目的関数選択の重要性は強調されてきたが, ランク制約の重要性に関する解析は十分ではなかった. 本稿ではランク

2の制約を厳密に考慮することが、代数的誤差/幾何学的誤差の選択よりも重要であることを解析と実験の両面から示す。

高精度の推定のためには、最小化の目的関数が画像中でのピクセル数を表すように適切に重み付けする必要がある。このような目的関数を幾何学的誤差という。しかし、適切な重みを計算するには基礎行列を予め知っている必要があり、通常はSampson 誤差の最小化 [3](非線形最適化)を行うか、それと同等の意味を持つ反復手法(くりこみ法 [6])を行う。いずれにしても、最初の計算では全ての重みを1として推定を行うのが普通である。この場合の目的関数は代数的誤差と呼ばれる。また、探索空間をランク2の行列に限定することも、推定精度にとって重要であるが、推定を困難にする要因でもある。通常用いられる線形8点アルゴリズムでは、この制約を無視し、代数的誤差を最小化する。一方、ランク2の制約を厳密に考慮して代数的誤差を最小化する非反復的手法の可能性も示されている [4]。本稿ではランク2制約を考慮することが推定精度に与える影響を表す数式を導出し、その影響の生じる理由について考察する。また、代数的/幾何学的誤差の選択による影響も同様に評価し、ランク制約による影響と比較する。具体的には、観測誤差に伴って現れる推定値の1次の変動を求め、その共分散行列を比較する。最良の場合にはKCR 下界 [5]を達成するが、他の場合にはここからのずれが生じる。ランク2制約の無視による劣化は1次の量として現れるが、代数的誤差の使用による劣化は「 $O(D_w^2)$ の量」に留まる。この $D_w$ とは、幾何学的誤差を実現する重みの標準偏差(ただし、重みの平均は1に正規化されているとする)であり、この値が実際に小さいことは実験によって確認できる。

## 2 基礎行列の推定法

2つのカメラと $P$ 個の特徴点があり、第 $p$ 点の各カメラによる像をそれぞれ同次ベクトル $l_p, r_p$ で表すと、次式のエピポーラ拘束が満たされる [2]。

$$l_p^T F r_p = 0 \quad (1)$$

この $F$ はランク2の $3 \times 3$ 行列であり、基礎行列と呼ばれる。座標ベクトルに用いた $l, r$ の記号はこの式での左右(left/right)を表すもので、物理的位置関係とは関係ない。

$F$ には9個の要素があるが、自由度は7しかない。なぜなら、 $F$ は $\det(F) = 0$ を満たすランク2に行列に限定され、更に $F$ のスケールには意味がないため、 $|F|_F^2 = 1$ として良いからである。

自由度の数(7組)以上の $(l_p, r_p)$ が与えらると $F$ を推定することができる。このためには、次式が真の $F$ に対して最小値0となる事を利用する。

$$E(F) := \sum_{p=0}^{P-1} w_p \cdot (l_p^T F r_p)^2, \quad (2)$$

ここで $w_p$ は重みである。詳細は以下の節で述べる。

解析の便宜上、 $F$ の要素を全て並べた9次元ベクトルを $f$ と書く。要素の順序は次式の通りとする。

$$f^T := [a^T \ b^T \ c^T], \quad \text{ただし } F^T = [a \ b \ c]. \quad (3)$$

これを用いて、式(2)に現れた $l_p^T F r_p$ は $(l_p \otimes r_p)^T f$ となる。ただし、 $(a, b, c) \otimes (x, y, z) = (ax, ay, az, bx, by, bz, cx, cy, cz)$ とする。これを $P$ 個集めた残差ベクトル $r$ を次のように定義する。

$$r = Jf := \begin{bmatrix} \vdots \\ (l_p \otimes r_p)^T \\ \vdots \end{bmatrix} f \quad (4)$$

ここで $J$ は $f$ から $r$ へのJacobi行列であり、大きさは $P \times 9$ である。更に、 $w_p$ を要素とする対角行列 $W$ を考え、 $H = J^T W J$ と定義すると、式(2)は次のようになる。

$$E(f) = f^T H f. \quad (5)$$

この重み行列 $W$ は、任意の正値対称行列でも良い。

ところで、実際に画像から得られた特徴点座標は、真値に誤差が加わったものである。これを $(\tilde{l}_p, \tilde{r}_p)$ と書く。基礎行列を推定するとき、真値は未知であるから、観測量を用いて $J$ や $H$ を構成する必要があるが、解析の場合には真値は既知であり、真の $J, H, F$ を用いる。

### 2.1 $F$ の探索空間の分解

以後の解析の便宜のため $F$ の特異値分解を導入する。各記号は次式によって定義する。

$$F = [u_0 \ u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \sigma_1 & \\ & & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^T \\ v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}. \quad (6)$$

3つの特異値のなかで最小の物を  $\varepsilon$  とする (大小比較は絶対値に基づく)。観測誤差のない真の  $F$  に対しては  $\varepsilon = 0$  である。また、2つのカメラの焦点距離が等しい場合等は  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/\sqrt{2}$  となる ( $|F|_F^2 = 1$  に注意)。  $\mathbf{v}_0$  は右画像のエピ極であり  $\mathbf{e}$  とも書く。同様に  $\mathbf{u}_0$  は左画像のエピ極であり  $\mathbf{e}'$  とも書く。これらのベクトルは  $\varepsilon = 0$  では問題なくエピ極であるが、以後  $\varepsilon \neq 0$  でもエピ極と考える。これらのベクトルについて、次の性質がある。

$$\begin{aligned} F\mathbf{e} &= \varepsilon\mathbf{e}' \\ F^T\mathbf{e}' &= \varepsilon\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (7)$$

また、次の行列・ベクトルを定義する。

$$B := \begin{bmatrix} \mathbf{e} & & \\ & \mathbf{e} & \\ & & \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{h}_{3i+j} := \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j. \quad (9)$$

ただし  $(i, j) = \{0, 1, 2\}^2$  である。

$\mathbf{h}_k$  は  $\mathbf{f}$  の探索空間の正規直交基底を成しており、 $\mathbf{f} = \sigma_1\mathbf{h}_4 + \sigma_2\mathbf{h}_8$  ( $\varepsilon = 0$  の場合) である。また  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e} = B\mathbf{e}'$  は多用するので、添字を省略して  $\mathbf{h}$  と書く場合もある。

## 2.2 ランク制約

探索空間をランク 2 に制限するには、ペナルティ法によって式 (5) を次のように拡張すると良い。

$$E_\nu(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^T(H + \nu BB^T)\mathbf{f}. \quad (10)$$

式 (7) により、 $B^T\mathbf{f} = \varepsilon\mathbf{e}'$  であるから、 $BB^T\mathbf{f} = \varepsilon\mathbf{h}$  および  $\varepsilon = \mathbf{e}'^T B^T\mathbf{f} = \mathbf{h}^T\mathbf{f}$  である。従って、上の式は次のようにも書くことが出来る。

$$E_\nu(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^T(H + \nu\mathbf{h}\mathbf{h}^T)\mathbf{f}. \quad (11)$$

$|F|_F = 1$  の条件下でこの関数を最小化するには、次の固有値問題で  $\nu \rightarrow \infty$  の極限を考えれば良い。

$$\left( H + \nu\mathbf{h}\mathbf{h}^T - \lambda I \right) \mathbf{f} = 0 \quad (12)$$

[4] では、これを 1 変数の高次方程式に帰着し、初期推定なしで解く方法を述べている。本稿では、この方程式 (と類似の手法) の解の挙動を解析するが、この解析は解法には依存しない。高次方程式を用いても、非線形最適化を用いても、 $\mathbf{f}$  をどのようなパラメータで表現しても解の挙動は数学的には等価である。

この解やその摂動を解析する上で、Sharman-Morrison の逆行列公式に基づく次の関係式が重要となる ( $H^-$  の右肩添字は Moore-Penrose の一般逆行列を示す)。

$$\begin{aligned} &\left( H^- - \frac{H^- \mathbf{h}\mathbf{h}^T H^-}{\nu^{-1} + \mathbf{h}^T H^- \mathbf{h}} \right) (H + \nu\mathbf{h}\mathbf{h}^T) \\ &= H^- H = I - \mathbf{f}\mathbf{f}^T. \end{aligned} \quad (13)$$

この式で  $\nu \rightarrow \infty$  の極限を考えることにより、† 演算子を次のように定義する。

$$H^\dagger := H^- - \frac{H^- \mathbf{h}\mathbf{h}^T H^-}{\mathbf{h}^T H^- \mathbf{h}}. \quad (14)$$

これは「ランク制約を考慮した一般逆行列」である。この行列に関して  $H^\dagger \mathbf{h} = 0$ ,  $H^\dagger \mathbf{f} = 0$ ,  $H^\dagger H H^\dagger = H^\dagger$  が成立する。

## 2.3 重みの選択

目的関数の定義に用いる重みとして考えられる物を幾つか挙げる。

$$\begin{cases} W_{opt}: & w_p = (|\Pi F^T \mathbf{l}|^2 + |\Pi F \mathbf{r}|^2)^{-1} \\ \tilde{W}: & w_p = (|\Pi F^T \tilde{\mathbf{l}}|^2 + |\Pi F \tilde{\mathbf{r}}|^2)^{-1} \\ W_1: & w_p = 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{ただし, } \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

なお、全ての  $w_p$  に共通の定数を掛けても推定結果は変わらないので、以下では一般性を失う事なく  $w_p^{-1}$  の平均は 1 であるとする。

$W_{opt}$  が最良の重みであり、この時の目的関数は幾何学的誤差である。「最良」の定義や最適性の証明は後述する。実際には真値  $\mathbf{l}_p, \mathbf{r}_p$  は未知であるから、観測量で  $\tilde{W}$  と近似した Sampson 誤差が用いられる。これらの重みの式は推定すべき  $F$  を含むので、これらの最小化は非線形問題であり、何らかの反復手法を要する。その最初の段階では、 $W_1$  のように全ての重みを 1 とするのが普通である。この時の目的関数は代数的誤差である。

$W_1$  のような一見乱暴な近似が成立するのは、多くの場合実際に  $w_p$  が 1 付近に集中するからである。 $w_p^{-1}$  の分布を式 (15) の定義から解析的に調べる事は容易ではないので、実験的な評価を示す。図 1 は、後述する 37 枚の画像列から 2 枚の組を 397 通り選び、 $w_p^{-1}$  の標準偏差  $D_w$  の分布を示したヒストグラムである。図から、半分を超える 200 組余の画像対で標準偏差  $D_w$  が 0.1 を下回っている



$[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_5, \mathbf{h}_6, \mathbf{h}_7, \sigma_2 \mathbf{h}_4 - \sigma_1 \mathbf{h}_8]$  の列ベクトルで構成され、 $\Delta \mathbf{f}$  はこれらの7つのベクトルの線形結合である。一方、 $[\sigma_1 \mathbf{h}_4 + \sigma_2 \mathbf{h}_8, \mathbf{h}_0]$  とは直交しなければならない。1つ目のベクトルは  $\mathbf{f}$  そのものであり、 $\mathbf{f}^T \Delta \mathbf{f} = 0$  は  $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}$  のノルムを(1次の量に関して)1に保つ条件である。 $\mathbf{h}_0^T \Delta \mathbf{f} = 0$  は、ランク2制約に対応する。一方、ランク制約を無視した場合は、 $\mathcal{H}_8 := [\mathcal{H}_7 | \mathbf{h}_0]$  の8つの列ベクトルの張る空間に  $\Delta \mathbf{f}$  が属する。

$\Delta \mathbf{f}$  を  $\mathcal{H}_d$  の列空間に拘束して式(20)を最小化するには、 $\mathbf{g} = \mathcal{H}_d^T \Delta \mathbf{f}$  とおき、 $\Delta \mathbf{f} = \mathcal{H}_d \mathbf{g}$  を式(20)に代入し、これを  $\mathbf{g}$  で微分したものが最適解に対して0となるから、次式が得られる。

$$\Delta \mathbf{f} = - \underbrace{\mathcal{H}_d (\mathcal{H}_d^T H \mathcal{H}_d)^{-1} \mathcal{H}_d^T}_{H_d^*} J^T W M^T \mathbf{d} \quad (22)$$

この  $H_d^*$  に関して、 $H_8^* = H^-$ 、 $H_7^* = H^\dagger$  である。この等式は次のようにして得られる。まず、両辺が共通の零空間  $[\mathbf{f}, \mathbf{h}]$  を持つことは容易に判る。これ以外の空間について、 $H^\dagger, H^-, H_d^*$  の右から  $H \mathcal{H}_d$  を掛けると、それぞれ  $(I - \mathbf{f} \mathbf{f}^T - \alpha H^- \mathbf{h} \mathbf{h}^T) \mathcal{H}_d$ 、 $(I - \mathbf{f} \mathbf{f}^T) \mathcal{H}_d$ 、 $\mathcal{H}_d (X)^{-1} (X)$  となり、いずれも  $\mathcal{H}_d$  となる ( $d$  は7か8か適切な方を選ぶ。また、 $\alpha = 1/\mathbf{h}^T H^- \mathbf{h}$ 、 $X = \mathcal{H}_d^T H \mathcal{H}_d$  である)。

次に、 $\mathcal{H}_d$  の各列ベクトルを  $\hat{\mathbf{h}}_k$  として、式(22)に基づき  $\hat{\mathbf{h}}_k = -H^* J^T W M^T \hat{\mathbf{d}}_k$  となるような  $\hat{\mathbf{d}}_k$  を構成する。 $\hat{\mathbf{d}}_k$  を  $k=1$  から7まで並べたものは次のようになる:  $D_7 := [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_5, \mathbf{d}_6, \mathbf{d}_7, \sigma_2 \mathbf{d}_4 - \sigma_1 \mathbf{d}_8]$ 。ただし、 $\mathbf{d}_k$  は  $\Delta \mathbf{r} = M^T \mathbf{d}_k + J^T \hat{\mathbf{h}}_k = 0$  を満たす次のベクトルである。

$$\mathbf{d}_k := -M(M^T M)^{-1} J \mathbf{h}_k \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[ \begin{array}{c} \Pi F \mathbf{r}_p \\ \Pi F^T \mathbf{l}_p \end{array} \right] \frac{(\mathbf{u}_i^T \mathbf{l}_p)(\mathbf{v}_j^T \mathbf{r}_p)}{|\Pi F^T \mathbf{l}_p|^2 + |\Pi F \mathbf{r}_p|^2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ランク制約を無視した場合は  $D_8 := [D_7 | \mathbf{d}_0]$  を考える。これらが、前述の「ある線形部分空間」の基底である。一般の  $\mathbf{d}$  は、これらの  $\hat{\mathbf{d}}_k$  の線形結合と残りの成分に分解される。ただし、基底系  $D_d$  は直交でも正規でもないため、直交分解されるわけではない。

ランク制約を無視すると  $\mathbf{d}_0$  なる成分が基礎行列の推定量を  $\mathbf{h}_0$  だけ変動させ、基礎行列の最小固有

値が0ではなくなる。ランク制約がある場合には  $\mathbf{d}_0$  の影響は  $\mathbf{h}_0$  以外の成分に転嫁され、最小固有値は0に保たれる。

### 3.3 解周辺での挙動3

$\Delta \mathbf{f}$  を導く最も簡便な方法は、以下に述べる抽象的な方法であろう。しかし、前述の2つの方法と異なり  $\Delta \mathbf{f}$  が生じる原理は何も示唆しない。

式(12)を微分することにより、 $H, \mathbf{f}, \mathbf{h}$  の一次の変化分 ( $\Delta$  記号で示す) が満たす方程式が得られる:

$$((\Delta H) + \nu((\Delta \mathbf{h}) \mathbf{h}^T + \mathbf{h}(\Delta \mathbf{h})^T) - (\Delta \lambda) I) \mathbf{f} + (H + \nu \mathbf{h} \mathbf{h}^T - \lambda I) (\Delta \mathbf{f}) = 0. \quad (24)$$

真の解  $\mathbf{f}$  の周辺では、 $\lambda = 0$ 、 $\nu \mathbf{h}^T \mathbf{f} = 0$  等を用いて簡単にすることができる。更に、 $\Delta \mathbf{h}^T \mathbf{f} = (\Delta \mathbf{e}')^T F \mathbf{e} + \mathbf{e}'^T F (\Delta \mathbf{e}) = \varepsilon((\Delta \mathbf{e}')^T \mathbf{e}' + \mathbf{e}'^T (\Delta \mathbf{e})) = 0$  である。これは、 $\mathbf{e}'$  と  $\mathbf{e}$  が単位長に拘束されており、一次の変化分がもとのベクトルと直交するためである。また  $\Delta \lambda = \mathbf{f}^T \Delta H \mathbf{f} = 0$  である。なお、 $\Delta H = \Delta J^T W J + J^T W \Delta J$  である。これらを用いて、

$$\Delta \mathbf{f} = -H^\dagger J^T W M^T \mathbf{d} \quad (25)$$

これは式(22)と同じ結果である。式(21)の結果と比べると  $H^-$  が  $H^\dagger$  に置き換わっている。これはランク2制約による解の違いである。

### 3.4 $\Delta \mathbf{f}$ の平均と共分散行列

$\Delta \mathbf{f}$  は、入力ベクトルに微小ノイズ  $\mathbf{d}$  が加わった時に引き起こされる  $\mathbf{f}$  の変動の一次近似である。これは  $\mathbf{d}$  の線形関数であるから、平均は0であり、一次の量に関しては推定偏差はない。

共分散行列  $\mathcal{E}[(\Delta \mathbf{f})(\Delta \mathbf{f})^T]$  は、次のようになる。

$$V(W) := \varepsilon^2 H^\dagger J^T W M^T M W J H^\dagger \quad (26)$$

これは  $W$  の関数である。しかし、推定誤差が不等式  $\Delta \mathbf{f}^T V(W)^{-1} \Delta \mathbf{f} \leq \theta$  で定義される楕円体に含まれる確率は、 $W$  には依らず  $\theta$  のみで ( $\chi^2$  分布によって) 決まる。

ここで、 $W_{opt} = (M^T M)^{-1}$  の「最適性」について考える。任意の  $W$  を用いた推定量に含まれる誤差  $\Delta \mathbf{f}$  と、 $W_{opt}$  を用いた推定量に含まれる誤差  $\Delta \bar{\mathbf{f}}$  の差の共分散行列を計算すると(長い計算の後に) 次のようになる。

$$X := V(W) - V(W_{opt}) \quad (27)$$

$$\text{ここで、} \quad V(W_{opt}) = \varepsilon^2 H^\dagger \quad (28)$$

この  $X$  は共分散行列であり非負値であるから、任意のベクトル  $\mathbf{a}$  に対して  $\mathbf{a}^T X \mathbf{a} \geq 0$  であり、 $\mathbf{a}^T V(W)^{-1} \mathbf{a} \leq \mathbf{a}^T V(W_{opt})^{-1} \mathbf{a}$  である<sup>1</sup>。これは、楕円体  $\mathbf{a}^T V(W)^{-1} \mathbf{a} \leq \theta$  が、楕円体  $\mathbf{a}^T V(W_{opt})^{-1} \mathbf{a} \leq \theta$  を完全に含むことを示している。よって、 $W_{opt}$  を用いた時の推定誤差の分布が、どの様な  $W$  を用いたときの分布よりも真に小さいため、 $W_{opt}$  が「最適」と言える。

[5] では、これを  $V(W) \succeq V(W_{opt})$  のように書き、右辺を  $KCR$  下界と呼んでいる。なお、[6] で述べられている共分散行列の下界を、本稿の記号で書くと  $\epsilon^2 \left( (I - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) H (I - \mathbf{h}\mathbf{h}^T) \right)^{-}$  あるいは  $\epsilon^2 (\mathcal{H}_7 \mathcal{H}_7^T H \mathcal{H}_7 \mathcal{H}_7^T)^{-}$  となるが、結局  $\epsilon^2 H^+$  と一致する。しかし、逆行列演算の位置の違いのため、 $\epsilon^2 H^+$  の形の方が解析には都合が良い。

## 4 共分散行列の比較

ここでは、ランク制約の有無、幾何学的/代数的誤差の違いによる 4 手法に対する  $\Delta \mathbf{f}$  の共分散行列を求めて比較する。また、エビ極の共分散行列も同様に比較する。

### 4.1 幾何学的誤差の場合

ランク 2 制約を無視して、最適な重み  $W_{opt}$  を用いた場合の共分散行列は

$$\epsilon^2 H^- \quad (29)$$

であり、ランク 2 制約を用いた場合の式 (28) との差違は、次式の通りである。

$$\epsilon^2 \frac{H - \mathbf{h}\mathbf{h}^T H^-}{\mathbf{h}^T H^- \mathbf{h}}. \quad (30)$$

前章の  $W_{opt}$  の最適性の議論により、式 (28) の分布 (ある確率で生じる誤差を含む最小の楕円体) は式 (29) の分布に内包されており、ランク 2 制約を無視することによって、全ての方向に対して精度が低下することが判る。

### 4.2 代数的誤差の場合

次に、 $W = (M^T M)^{-1}$  が  $W + \Delta W$  に変化した場合を考える。具体的には、その変動によって  $W + \Delta W$  が単位行列の定数倍となる場合である。このとき、 $\Delta W$  の各要素は実効的には、前の章で議論した相対偏差  $D_w$  のオーダーである。

<sup>1</sup> $\mathbf{a}^T (A - B) \mathbf{a} \geq 0$  は、 $\mathbf{a}^T A \mathbf{a} / \mathbf{a}^T B \mathbf{a}$  が 1 以上であることと等価であり、よって  $(A - \lambda B) \mathbf{x} = 0$  の一般固有値は 1 以上である。この一般固有値問題は  $(B^{-1} - \lambda A^{-1})(A \mathbf{x}) = 0$  と書き換えられる。  $\lambda$  は共通であるから、 $\mathbf{a}^T B^{-1} \mathbf{a} / \mathbf{a}^T A^{-1} \mathbf{a}$  は 1 以上であり、 $\mathbf{a}^T (B^{-1} - A^{-1}) \mathbf{a} \geq 0$  となる。

この時の誤差  $\Delta \mathbf{f}$  は、式 (24) 中の  $W$  を  $W + \Delta W$  で置き換えることにより次のように得られる (真の解  $\mathbf{f}$  は重みの選択に依らないことに注意)。

$$\Delta \mathbf{f} = - (H^\dagger - H^\dagger J^T \Delta W J H^\dagger) \cdot J^T (W + \Delta W) M^T \mathbf{d} + O(D_w^2) \quad (31)$$

ここで式 (14) は次のように拡張されている<sup>2</sup>。

$$(H + J^T \Delta W J)^\dagger = H^\dagger - H^\dagger (J^T \Delta W J) H^\dagger + O(D_w^2) \quad (32)$$

$\Delta \mathbf{f}$  の平均は 0 である。分散を  $\epsilon^2$  で割ったものは、

$$\begin{aligned} & (H^\dagger - H^\dagger J^T \Delta W J H^\dagger) J^T (W + \Delta W) M^T \\ & \cdot M (W + \Delta W) J (H^\dagger - H^\dagger J^T \Delta W J H^\dagger) \\ & = (H^\dagger - H^\dagger J^T \Delta W J H^\dagger) (H + 2J^T (\Delta W) J) \\ & \cdot (H^\dagger - H^\dagger J^T \Delta W J H^\dagger) + O(D_w^2) \\ & = H^\dagger + O(D_w^2) \end{aligned} \quad (33)$$

途中、以下の関係式を用いた。

$$(W + \Delta W) W^{-1} (W + \Delta W) = W + 2(\Delta W) + (\Delta W) W^{-1} (\Delta W) \quad (34)$$

式 (33) で、 $\Delta W$  の一次の項は全て打ち消し合い、最適な  $W$  を用いた場合と  $O(D_w^2)$  の項が異なるのみである ( $H^\dagger$  は式 (28) を  $\epsilon^2$  で割ったものである)。

ランク 2 制約を無視した代数的誤差最小化 (線形 8 点法) の共分散行列を求めるには、 $H^\dagger$  を  $H^-$  に置き換えて同様の議論を行えば良い。その結果は、

$$\epsilon^2 (H^- + O(D_w^2)). \quad (35)$$

### 4.3 4 手法の比較

以上の結果を表 1 にまとめる。表中、左上はランク 2 制約を考慮した幾何学的誤差最小化であり、 $KCR$  下界  $A$  を達成している。ランク 2 制約を無視すると、共分散行列は  $B$  だけ「増加 (劣化)」する (右上欄)。一方、幾何学的誤差の代わりに代数的誤差を用いると共分散行列は  $O(D_w^2)$  だけ劣化する (左下欄)。右下は、線形 8 点アルゴリズム (ラン

<sup>2</sup>この行列の導出において、本文では  $\mathcal{H}_7$  に言及していないが、用いた方が簡単である:  $(A + B)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1} B A^{-1}$  を用いて、 $\mathcal{H}_7 (\mathcal{H}_7^T J^T (W + \Delta W) J \mathcal{H}_7)^{-1} \mathcal{H}_7^T \approx H^\dagger - H^\dagger (J^T \Delta W J) H^\dagger$ 。

表 1:  $\Delta \mathbf{f}$  の共分散行列  $/\epsilon^2$

目的関数	ランク 2 制約あり	ランク 2 制約なし
幾何学的	$A$	$A + B$
代数的	$A + O(D_w^2)$	$A + B + O(D_w^2)$

$$\left( \begin{array}{l} B = \frac{H^{-1} \mathbf{h} \mathbf{h}^T H^{-1}}{\mathbf{h}^T H^{-1} \mathbf{h}} \\ A = H^{-1} - B \end{array} \right)$$

表 2:  $\Delta \mathbf{e}$  の共分散行列  $/\epsilon^2$

目的関数	ランク 2 制約あり	ランク 2 制約なし
幾何学的	$A$	$A + B$
代数的	$A + O(D_w^2)$	$A + B + O(D_w^2)$

$$\left( \begin{array}{l} B = K \frac{H^{-1} \mathbf{h} \mathbf{h}^T H^{-1}}{\mathbf{h}^T H^{-1} \mathbf{h}} K^T \\ A = KH^{-1}K^T - B \end{array} \right)$$

ク 2 制約を無視した代数誤差最小化) であり, これらの両方の劣化が起こる.

一次の誤差  $B$  と  $O(D_w^2)$  の大きさを理論的に比較することは難しい. 代わりに,  $D_w$  に関するもう一つの性質を示唆する実験結果を示す (図 2). これは, ノルムを 1 に正規化したエピ極の  $z$  座標と  $D_w$  の関係を示している. この図から,  $z$  座標と  $D_w$  には強い相関があり, エピ極の  $z$  座標が  $D_w$  の良い指標となると言える. これは, エピ極が画像中心に近い, 無限遠に近いによって推定精度が異なることを表している. そして, 多くの場合, エピ極は画像中心よりも無限遠に近く,  $z$  は小さく  $D_w$  も小さい. この様な場合には,  $O(D_w^2)$  の項は  $B$  の項よりも小さくなり, ランク 2 の制約は最適な重み付け (幾何学的誤差の使用) よりも重要となる.

#### 4.4 $\mathbf{e}$ の共分散行列

$\mathbf{e}$  は  $F\mathbf{e} = 0$  の方程式を満たすので, この一次の変化分は次のように表される (前章の  $\Delta \mathbf{f}$  の第 3 の解析法と同じ原理である. 固有ベクトルの摂動定理を考えても良い). 高次の変化分については考えない.

$$\Delta \mathbf{e} = -F^{-1} B^T \Delta \mathbf{f} \quad (36)$$

以後, この  $F^{-1} B^T$  を  $K$  と書くことにする. これは, 次のように特異値分解できる.

$$K := F^{-1} B^T = \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{h}_3^T}{\sigma_1} + \frac{\mathbf{v}_2 \mathbf{h}_6^T}{\sigma_2}. \quad (37)$$

$\Delta \mathbf{e}$  は結局  $\mathbf{d}$  の線形関数であるから平均は,

$$\mathcal{E}[\Delta \mathbf{e}] = 0. \quad (38)$$

共分散行列は, 次のようになる.

$$K V K^T \quad (39)$$

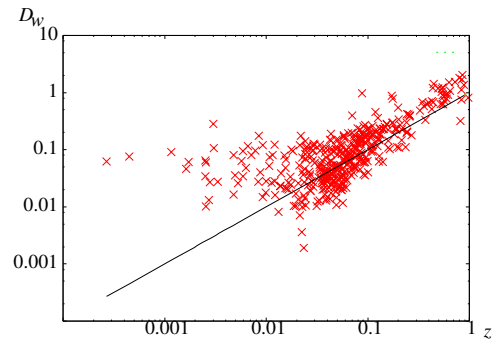


図 2:  $w_p^{-1}$  の分散とエピ極の  $z$  座標の関係

ここで,  $V$  は  $\Delta \mathbf{f}$  の共分散行列である. 前述の 4 つの場合全てについて, この形である. よって,  $\Delta \mathbf{f}$  の場合と同様に表 2 のようにまとめることができる.

## 5 実験

以下では, 図 3 を含む 37 枚の実画像に基づく実験結果を示す. 図中の左 2 枚, 右 2 枚を対とした場合のエピポーラ線も示してある. 特徴点は 100 点であり, 7 点から 52 点の共通点を含む画像対が 397 通りある. 37 枚中 30 枚は物体を回る円軌道から物体を撮影したものであり, エピポールが  $\pm(1, 0, 0)$  付近にある画像が多い. 実画像に対して真の基礎行列は判らないので, まず実画像に対して Sampson 誤差を最小化する基礎行列を推定し, その基礎行列に対して正しくなるように対応点座標を修正した. このデータに基づく実験は, 真の基礎行列の判っている実画像による実験とみなすことができる.

与えられた対応点群に対して最適な基礎行列は, エピ極の関数として一意に定まる [2] のので, エピ極の共分散行列のみを考慮すれば良い.

第 1 の例を表 3 に示す.  $\Delta \mathbf{e}$  の共分散行列のう





図 3: 画像列 (37 枚中 4 枚, 第 0,1,10,19 画像)

表 3:  $\Delta e$  の共分散行列の固有値 (例 1, 画像 0 と 1, 対応点 36 対)

目的関数	ランク 2 制約あり	ランク 2 制約なし
幾何学的	(15.299 7.094)	(15.355 7.213)
代数的	(15.355 7.114)	(15.397 7.232)

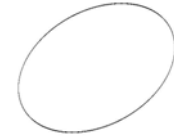


図 4: 表 3 の楕円表示

表 4:  $\Delta e$  の共分散行列の固有値 (例 2, 画像 10 と 19, 対応点 13 対)

目的関数	ランク 2 制約あり	ランク 2 制約なし
幾何学的	(0.949 0.294)	(6.120 0.380)
代数的	(0.954 0.295)	(6.167 0.381)



図 5: 表 4 の楕円表示

ち, 2つの固有値を表している (3つめは必ず0である). この数値が小さいほど誤差が出にくい. ランク 2 制約を無視したことによる劣化は (0.06, 0.12) であり (これは, 前節の  $B$  成分に対応する), この値はどちらの目的関数でもほぼ等しい. 一方, 代数誤差の使用による劣化は (0.06, 0.02) 程度であり (これは, 前節の  $O(D_w^2)$  に対応する), ランク制約の有無に依らずほぼ等しい. ランク 2 制約は目的関数の選択よりも重要であることは判るが, もともとの固有値 (15, 7) に対してこの変動は小さい. 図 4 に, 共分散行列により作られる楕円を示す. 4つの楕円を示しているが, 殆んど区別できない.

第 2 の例 (表 4) では, ランク 2 制約は (5, 0) 程度の劣化を引き起こす一方, 目的関数は殆んど劣化の原因とはなっていない. 図 5 に, 共分散行列により作られる楕円を示す. 図 4 と同一の縮尺である. 4つの楕円を示しているが, 2対になっており, 内側がランク制約あり, 外側がなしの場合である. 目的関数の違いは図では判別できない. この場合はランク制約は十分に大きな効果があるとと言える.

## 6 おわりに

本稿では, 基礎行列推定におけるランク 2 制約の重要性と, 幾何学的/代数的誤差の選択の重要性

を定性的・定量的に評価した. その結果, 多くの場合, ランク 2 制約の方が重要であり, 目的関数の選択の影響は小さいことを明らかにした. 本稿では実験に頼らざるを得なかった  $D_w$  の理論解析や, 本稿では省略した 2 次の量の解析は今後の課題である.

## 参考文献

- [1] HARTLEY, R. I., In Defence of the 8-point Algorithm, *IEEE Trans. PAMI*, **19**, 6 (1997), 580–593.
- [2] HARTLEY, R. I. and ZISSERMAN, A., *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, second edition (2004).
- [3] ZHANG, Z., Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review, *IJCV*, **27**, 2 (1998), 161–198.
- [4] 右田, 尺長, 未校正画像対中の点対応に基づくエピポールの 1 次元探索法, 情処研報 CVIM, **153**, 64 (2006), 413–420.
- [5] 金谷, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情処研報 CVIM, **147**, 8 (2005), 59–66.
- [6] 三島, 金谷, 基礎行列の最適計算とその信頼性評価, 情処研報 CVIM, **118**, 10 (1999), 67–74.