

## 直交射影による複数画像からの最適な三角測量

矢野 直樹\* 菅谷 保之† 新妻 弘崇\* 金谷 健一\*

\* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

複数の画像間の対応から 3 次元位置を最適に計算する三角測量の新しい計算法を示す。提案手法は 3 次元空間内の再投影誤差を最小にする点を探索する従来手法とは異なり、 $M$  画像の対応点の作る  $2M$  次元空間の直積点を視線が交わる条件で作る 3 次元多様体に直交射影するものである。これは著者らの前報 [17] の 3 画像の場合の拡張であり、視線が交わる条件として  $M-2$  個の三重線形拘束条件を用いる。このとき、解くべき連立方程式が悪条件になることを指摘し、代数的、幾何学的考察により、ランク  $2M-3$  の一般逆行列を用いて解を得る手法を導出する。そして、シミュレーションおよび実測データを用いて、精度と実行時間を評価し、従来のどの最適手法よりも効率的であることを結論する。

### Optimal Triangulation from Multiple Views by Orthogonal Projection

Naoki Yano\*, Yasuyuki Sugaya†, Hirotaka Niitsuma\*, and Kenichi Kanatani\*

\*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,  
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

A new method is presented for optimally computing the 3-D position of corresponding points in an arbitrary number of views. While existing methods search the 3-D space for a point that minimizes the reprojection error, we regard the corresponding points over  $M$  images as a point in a  $2M$ -D joint space and orthogonally project it onto the 3-D manifold defined by the constraint that their lines of sight meet. This is an extension of our 3-view method [17], and as the constraint we combine  $M-2$  trilinear equations. We point out that the simultaneous equations to be solved are ill-conditioned and present, based on algebraic and geometric considerations, a method using a generalized inverse of rank  $2M-3$ . Using synthetic and real data, we evaluate the accuracy and computation time and conclude that our method is far more efficient than any of existing methods.

#### 1. まえがき

ステレオ視では対応点が定まると、視点と画像面上のその点を通る視線の交点としてその点の 3 次元位置が定まる。これが「三角測量」(triangulation)と呼ばれるものである。しかし、2 本の視線はデータに誤差が含まれると 1 点では交わらない。古くはそれらを結ぶ線分の“中点”をとることが行われていたが(図 1(a))、金谷ら [11, 12] はそれが最善ではないことを指摘し、画像面上の対応点をそれぞれ視線が交わる位置に移動させ、これをその移動量が最小になるように定める「最適補正」(optimal correction)の原理を提唱した(図 1(b))。

その後、Hartley ら [6] が同じ考え方を述べ、その計算を 6 次方程式の解計算に帰着させた。そして、これが大域的最適化 [3] のプロトタイプとして広まり、

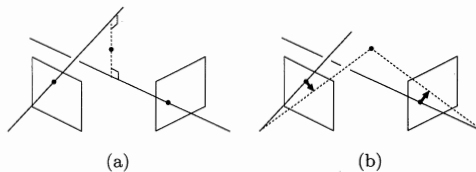


図 1: 2 画像からの三角測量. (a) 中点法. (b) 最適補正.

これを一般の枚数の画像へと拡張する研究が世界中で行われている。

それらの基本方針は、復元すべき 3 次元位置  $(X, Y, Z)$  を未知数とし、それを各画像に投影した位置とその画像上の観測位置の距離の二乗和(「再投影誤差」(reprojection error))を最小にする位置を探索することである(図 2)。しかし、3 次元空間全体の無限領域が探索範囲となり、レーベンバーグ・マーカート法などで最小化する方法(「バンドル調整」(bundle adjustment))では大域的な最小値でない局所解に陥る可能性がある。それを防ぐ大域的な最小化として試

\*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173  
{yano,niitsuma,kanatani}@suri.cs.okayama-u.ac.jp  
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1, (0532)44-6760  
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

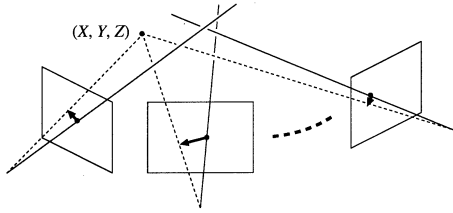


図 2: 3次元位置  $(X, Y, Z)$  を未知数として、その再投影点の観測位置からの二乗和（再投影誤差）が最小になる位置を探索する。

みられているのは次のアプローチである。

**代数的解法** 目的関数を微分して0と置いた代数方程式を解く。これはグレブナー基底を用いると多項式に帰着し、3画像の場合は47次式[16]、4, 5, 6, 7画像ではそれぞれ148次, 336次, 638次, 1081次式となる。グレブナー基底の数値的な計算は非常に不安定なので、これを安定化する手法も検討されている[1]。

**分枝限定法** 局所的に目的関数の下限を与える関数を導入し、探索範囲を区分して、その下限が既に調べた値を上回るような領域を除外し(branch-and-bound), そうでない領域を再帰的に細分する[9, 15]。これは下限の解析が非常に複雑で、多くの計算時間を要する。

**行列不等式解法** 変数変換によって行列不等式<sup>1</sup>を拘束条件とする多項式の最小化問題に変換する<sup>2</sup>[10]。得られる解は近似値であるが、変数変換の次数を上げるにつれて精度が向上し<sup>3</sup>, 極限において真値に収束する。しかし、その手続きは非常に複雑である。

**$L_\infty$ 最適化** 再投影位置と観測位置の距離の二乗和の最小化 ( $L_2$ 最適化) は誤差が正規分布に従うときの最尤推定の意味があって合理的であるが、解法が困難であることから、解きやすいように目的関数を変えてしまう。これを距離の最大値 ( $L_\infty$ ノルム) に変えると、目的関数が「疑凸関数」(quasi-convex function) となり、局所解が存在しない。大域的な最小値を求めるには、しきい値を0から順に(あるいは2分探索法で)増加させ、目的関数がそのしきい値以上の値をとる解があるかどうかを調べる<sup>4</sup>[4, 8, 14]。

<sup>1</sup> 行列不等式  $A \succ B$  とは  $A - B$  が半正値対称行列であることを意味する。

<sup>2</sup> これは凸半正値計画 (SDP) と呼ばれる問題となり, Matlab上で動く解法ソフト GloptiPoly が公開されている。

<sup>3</sup> それにつれて変数の数と行列のサイズが増える

<sup>4</sup> これは2次元錐計画 (SOCP) と呼ばれる問題となり, Matlab上で動く解法ソフト SeDuMi が公開されている。

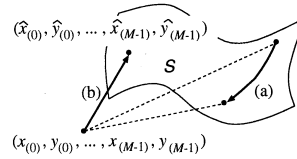


図 3: (a) 従来の方: 解空間  $S$  の“内部”を探索してデータ  $(x_{(0)}, y_{(0)}, \dots, x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  に最も近い位置を求める。(b) 本論文の方法: データ  $(x_{(0)}, y_{(0)}, \dots, x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  を解空間  $S$  に“外部”から直交射影する。

これらはどれも非常に複雑な手続きと多くの計算時間を要し、理論研究として非常に興味深いですが、とても実用的とはいえない。そこで、最近是最適解を探索するのではなく、簡単な方法(レーベンバーグ・マーカート法など)で求めた解が局所解か大域解かを判定する方法が検討されている[5]。

## 2. 本論文の方法

著者ら[13]は2画像の場合に、金谷ら[11, 12]が以前に提唱した最適補正を拡張し、対応点  $(x, y), (x', y')$  の作る4次元直積空間のエピ極線方程式(epipolar equation)が定義する代数多様体にデータ  $(x, y, x', y')$  を直交射影する方法を示した。そして前報[17]では3画像の場合に、対応点  $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$  の作る6次元直積空間の三重線形拘束条件(trilinear constraint)が定義する代数多様体にデータ  $(x, y, x', y', x'', y'')$  を直交射影する方法を示した。

本論文ではこれを一般の  $M$  画像に拡張する。4画像なら四重線形拘束条件(quadrilinear constraint)[7]を用いることもできるが、本論文では任意枚数の画像に対応するために、前報で用いた三重線形拘束条件を3画像ごとに適用する。そして、 $M$ 個の対応点の作る  $2M$ 次元空間の  $M-2$ 組の三重線形拘束条件が定義する代数多様体  $S$  にデータ  $(x_{(0)}, y_{(0)}, \dots, x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  を直交射影する。

従来の定式化は解空間  $S$  の“内部”(無限領域)を探索して、データ  $(x_{(0)}, y_{(0)}, \dots, x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  と最小距離の位置を求めるものである(図3(a))。したがって、レーベンバーグ・マーカート法などの勾配に基づく方法では局所解に陥る可能性がある。それに対して本論文の方法は、データを解空間  $S$  に“外部”から射影するものであり(図3(b))、探索を行うことなく最適解が得られる。

前報[17]では、三重線形拘束条件に基づく射影を定める連立方程式が悪条件になることを指摘し、ランク3の一般逆行列を用いて解を得る方法を示した。本論文でも同様の考察により、射影を定める連立方

程式が悪条件になることを指摘し、ランク  $2M - 3$  の一般逆行列を用いて解を得る方法を示す。最後に、シミュレーションおよび実データを用いて、この方法の精度と実行時間を評価し、従来のどの最適手法よりも効率的であることを結論する。

### 3. 三重線形拘束条件

$M$  画像間の対応点  $(x_{(0)}, y_{(0)}), \dots, (x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  を次の 3 次元ベクトルで表す。

$$\mathbf{x}_{(\kappa)} = \begin{pmatrix} x_{(\kappa)}/f_0 \\ y_{(\kappa)}/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (1)$$

ただし、 $f_0$  は任意のスケール定数である<sup>5</sup>。以下、ベクトル  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  の表す点を単に“点  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$ ”と呼ぶ。

よく知られているように [7]、3 点  $\mathbf{x}_{(\kappa)}, \mathbf{x}_{(\kappa+1)}, \mathbf{x}_{(\kappa+2)}$  を通る視線が 1 点で交わる必要十分条件は、これらが次の「三重線形拘束条件」(trilinear constraint) を満たすことである。

$$\sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k = 0 \quad (2)$$

ここに  $\epsilon_{ijk}$  は順列符号<sup>6</sup>、 $x_{(\kappa)}^i$  は  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  の第  $i$  成分である。 $T_{(\kappa)i}^{lm}$  はこの 3 画像の「三重焦点テンソル」(trifocal tensor) であり、カメラ配置のみから定まる (計算の仕方は前報 [17] 参照)。ここでは三重焦点テンソル  $T_{(\kappa)i}^{lm}$  は既に計算されているとする。以下、式を見やすくするために、繰り返す座標成分の添え字については和をとる「アインシュタインの総和規約」(Einstein's summation convention) を用いる。

### 4. 最適補正

対応点  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  を画像処理や計算から求めた場合には微小な誤差のために式 (2) が厳密には満たされない。これは幾何学的にはそれらの視線が 1 点で交わらないことを意味する。これに対する「最適補正」とは点  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  を式 (2) を満たすよう最適に  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  に補正することである。“最適に” というのは、移動距離の二乗和 (「再投影誤差」 [7])

$$E = \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\mathbf{x}_{(\kappa)} - \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 \quad (3)$$

<sup>5</sup> ほぼ画像のサイズにとる。これは  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  の各成分をオーダー 1 にそろえて数値計算を安定化させるためである [2]。実験では  $f_0 = 600$  とした。

<sup>6</sup>  $(i, j, k)$  が  $(1, 2, 3)$  の偶置換のときは 1、奇置換のときは  $-1$ 、それ以外は 0 をとる。Leve-Civita の (または Eddington の) イブシロンとも呼ばれる。

が最小になるという意味である。数学的には、与えられたデータ  $\mathbf{x}_{(\kappa)}$  に対して、制約条件

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \bar{x}_{(\kappa)}^i \bar{x}_{(\kappa+1)}^j \bar{x}_{(\kappa+2)}^k = 0, \quad \kappa = 0, \dots, M-3 \quad (4)$$

のもとで式 (3) を最小にする  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  を求めよという問題となる。統計的には次のように解釈できる。対応点の真の位置が  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  であるとき、誤差の加わった

$$\mathbf{x}_{(\kappa)} = \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (5)$$

が検出されたとする。誤差  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  を期待値  $\mathbf{0}$  の独立な同一等方正規分布に従う確率変数とみなせば、式 (3) の最小化は尤度を最大にする最尤推定である。

幾何学的には  $M$  個の対応点の作る  $2M$  次元空間において、式 (4) が定義する代数多様体  $S$  にデータ  $(x_{(0)}, y_{(0)}, \dots, x_{(M-1)}, y_{(M-1)})$  を直交射影すること意味する。

### 5. 第 1 近似

直接に  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  を推定する代わりに

$$\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (6)$$

と置いて、誤差項  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  を推定してもよい。すると式 (3) の再投影誤差  $E$  は次のように書ける。

$$E = \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}\|^2 \quad (7)$$

三重線形拘束条件 (4) は次のようになる。

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} (x_{(\kappa)}^i - \Delta x_{(\kappa)}^i) (x_{(\kappa+1)}^j - \Delta x_{(\kappa+1)}^j) \times (x_{(\kappa+2)}^k - \Delta x_{(\kappa+2)}^k) = 0 \quad (8)$$

テイラー展開して誤差  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  の 2 次の項を無視すると次のようになる。

$$\epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \Delta x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i \Delta x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j \Delta x_{(\kappa+2)}^k \right) = \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \quad (9)$$

誤差は画像面に生じるので  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  の第 3 成分は 0 である。これは次のように書ける。

$$k_i \Delta x_{(\kappa)}^i = 0, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^\top$  と定義する。式 (7) を 2 で割り、式 (9)、(10) に関するラグランジュ乗数を導入して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}\|^2 - \sum_{\kappa=0}^{M-3} \lambda_{(\kappa)}^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \\ & \times \left( \Delta x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i \Delta x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j \Delta x_{(\kappa+2)}^k \right) - \sum_{\kappa=0}^{M-1} \mu_{(\kappa)} k_i \Delta x_{(\kappa)}^i \quad (11) \end{aligned}$$

を  $\Delta x_{(\kappa)}^n$  で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta x_{(\kappa)}^n &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} \lambda_{(\kappa)}^{pq} T_{(\kappa)n}^{lm} x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \\ &+ \epsilon_{lnp} \epsilon_{mkq} \lambda_{(\kappa-1)}^{pq} T_{(\kappa-1)n}^{lm} x_{(\kappa-1)}^i x_{(\kappa+1)}^k \\ &+ \epsilon_{ljp} \epsilon_{mnq} \lambda_{(\kappa-2)}^{pq} T_{(\kappa-2)n}^{lm} x_{(\kappa-2)}^i x_{(\kappa-1)}^j + \mu_{(\kappa)} k_n \quad (12) \end{aligned}$$

ただし、 $\kappa = 0, \dots, M-3$  以外の  $\lambda_{(\kappa)}^{pq}$  は 0 とみなす。上式の両辺に射影行列（第 3 成分を 0 にする行列）

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \text{diag}(1, 1, 0) \quad (13)$$

を掛けると、 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)} = \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$ 、 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \mathbf{0}$  であるから、次のようになる。

$$\Delta x_{(\kappa)}^s = P_{(\kappa)pq}^i \lambda_{(\kappa)}^{pq} + Q_{(\kappa)pq}^i \lambda_{(\kappa-1)}^{pq} + R_{(\kappa)pq}^i \lambda_{(\kappa-2)}^{pq} \quad (14)$$

ただし、次のように置いた ( $P_{\mathbf{k}}^{ij}$  は  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  の  $(ij)$  要素)。

$$\begin{aligned} P_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} P_{(\kappa+1)}^{sj} x_{(\kappa+1)}^k x_{(\kappa+2)}^k \\ Q_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa-1)i}^{lm} x_{(\kappa-1)}^i P_{(\kappa+1)}^{sj} x_{(\kappa+1)}^k \\ R_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa-2)i}^{lm} x_{(\kappa-2)}^i x_{(\kappa-1)}^j P_{(\kappa+1)}^{sk} \quad (15) \end{aligned}$$

式 (14) を式 (9) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} A_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa-2)}^{rs} + B_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa-1)}^{rs} + C_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa)}^{rs} \\ + D_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa+1)}^{rs} + E_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa+2)}^{rs} = F_{(\kappa)pq} \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} A_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} R_{(\kappa)rs}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \\ B_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( Q_{(\kappa)rs}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(\kappa)}^i R_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k \right) \\ C_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( P_{(\kappa)rs}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(\kappa)}^i R_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i Q_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(\kappa)}^i R_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j R_{(\kappa+2)rs}^k \right) \\ D_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( x_{(\kappa)}^i P_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k \right. \\ & \left. + x_{(\kappa)}^i R_{(\kappa+1)rs}^j x_{(\kappa+2)}^k + x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j Q_{(\kappa+2)rs}^k \right) \\ E_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j P_{(\kappa+2)rs}^k \\ F_{(\kappa)pq} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} x_{(\kappa)}^i x_{(\kappa+1)}^j x_{(\kappa+2)}^k \quad (17) \end{aligned}$$

式 (16) は  $9(M-2)$  個の未知数  $\lambda_{(\kappa)}^{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ,  $\kappa = 0, \dots, M-3$ ) に関する  $9(M-2)$  個の連立 1 次方程式 ( $r, s = 1, 2, 3$ ,  $\kappa = 0, \dots, M-3$ ) である。これを解いて  $\lambda_{(\kappa)}^{pq}$  を定め、それを式 (14) に代入すれば  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  が求まる。そして真の位置  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  が次のように推定される。

$$\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \Delta \mathbf{x}_{(\kappa)} \quad (18)$$

## 6. 高次の補正

式 (9) は第 1 近似なので、得られた  $\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  が厳密に三重線形拘束条件 (4) を満たすとは限らない。そこで式 (18) の解を利用して、式 (4) の条件のもとで式 (3) を最小化する厳密解  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  を計算し直す。このとき、直接に  $\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  を推定する代わりに

$$\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} - \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (19)$$

と置いて、高次の補正量  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  を推定する。再投影誤差  $E$  は次のように書ける。

$$E = \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\mathbf{x}_{(\kappa)} - \bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 = \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 \quad (20)$$

ただし、次のように置いた。

$$\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} = \mathbf{x}_{(\kappa)} - \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (21)$$

式 (4) の三重線形拘束条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} (\hat{x}_{(\kappa)}^i - \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i) (\hat{x}_{(\kappa+1)}^j - \Delta \hat{x}_{(\kappa+1)}^j) \\ \times (\hat{x}_{(\kappa+2)}^k - \Delta \hat{x}_{(\kappa+2)}^k) = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

テイラー展開して  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  の 2 次の項を無視すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ \left. + \hat{x}_{(\kappa)}^i \Delta \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \Delta \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right) \\ = \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \quad (23) \end{aligned}$$

$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}$  は式 (18) の  $\Delta \mathbf{x}_{(\kappa)}$  よりも高次の微小量であるから、その 2 次の項を無視した式 (23) は式 (9) よりも三重線形拘束条件のより高次の近似式である。誤差は画像面内に生じるので、式 (10) と同様に制約

$$k_i \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i = 0, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (24)$$

を課す。式 (20) を 2 で割り、式 (23), (24) に対するラグランジュ乗数を導入して

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^{M-1} \|\bar{\mathbf{x}}_{(\kappa)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(\kappa)}\|^2 - \sum_{\kappa=0}^{M-3} \lambda_{(\kappa)}^{pq} \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k + \hat{x}_{(\kappa)}^i \Delta \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right) \\ & + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \Delta \hat{x}_{(\kappa+2)}^k - \sum_{\kappa=0}^{M-1} \mu_{(\kappa)} k_i \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^i \quad (25) \end{aligned}$$

を  $\Delta \hat{x}_{(\kappa)}^n$  で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^n &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} \lambda_{(\kappa)}^{pq} T_{(\kappa)n}^{lm} \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \\ &+ \epsilon_{lip} \epsilon_{mkq} \lambda_{(\kappa-1)}^{pq} T_{(\kappa-1)i}^{lm} \hat{x}_{(\kappa-1)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^k \\ &+ \epsilon_{ljp} \epsilon_{miq} \lambda_{(\kappa-2)}^{pq} T_{(\kappa-2)i}^{lm} \hat{x}_{(\kappa-2)}^i \hat{x}_{(\kappa-1)}^j \\ &+ \mu_{(\kappa)} k_n - \tilde{x}_{(\kappa)}^i \quad (26) \end{aligned}$$

両辺に式 (13) の射影行列  $P_k$  を掛けると、 $P_k \Delta \hat{x}_{(\kappa)} = \Delta \hat{x}_{(\kappa)}$ 、 $P_k k = 0$  であり、式 (21) の  $\tilde{x}_{(\kappa)}$  の定義より  $P_k \tilde{x}_{(\kappa)} = \tilde{x}_{(\kappa)}$  である。ゆえに次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_{(\kappa)}^s &= \sum_{p,q=1}^3 \hat{P}_{(\kappa)pq}^s \lambda_{(\kappa)}^{pq} + \sum_{p,q=1}^3 \hat{Q}_{(\kappa)pq}^s \lambda_{(\kappa-1)}^{pq} \\ &+ \sum_{p,q=1}^3 \hat{R}_{(\kappa)pq}^s \lambda_{(\kappa-2)}^{pq} - \tilde{x}_{(\kappa)}^i \quad (27) \end{aligned}$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} \hat{P}_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} P_k^{si} \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \\ \hat{Q}_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa-1)i}^{lm} P_k^{sj} \hat{x}_{(\kappa-1)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^k \\ \hat{R}_{(\kappa)pq}^s &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa-2)i}^{lm} P_k^{sk} \hat{x}_{(\kappa-2)}^i \hat{x}_{(\kappa-1)}^j \quad (28) \end{aligned}$$

式 (27) を式 (23) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{A}_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa-2)}^{rs} + \hat{B}_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa-1)}^{rs} + \hat{C}_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa)}^{rs} \\ + \hat{D}_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa+1)}^{rs} + \hat{E}_{(\kappa)pqrs} \lambda_{(\kappa+2)}^{rs} = \hat{F}_{(\kappa)pq} \quad (29) \end{aligned}$$

ただし、次のように置いた。

$$\begin{aligned} \hat{A}_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \hat{P}_{(\kappa)rs}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \\ \hat{B}_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \hat{Q}_{(\kappa)rs}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{R}_{(\kappa+1)rs}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right) \\ \hat{C}_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \hat{P}_{(\kappa)rs}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{Q}_{(\kappa+1)rs}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{R}_{(\kappa+2)rs}^k \right) \\ \hat{D}_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{P}_{(\kappa+1)rs}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{Q}_{(\kappa+2)rs}^k \right) \\ \hat{E}_{(\kappa)pqrs} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{P}_{(\kappa+2)rs}^k \\ \hat{F}_{(\kappa)pq} &= \epsilon_{ljp} \epsilon_{mkq} T_{(\kappa)i}^{lm} \left( \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ &\quad \left. + \tilde{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \hat{x}_{(\kappa+2)}^k \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_{(\kappa)}^i \hat{x}_{(\kappa+1)}^j \tilde{x}_{(\kappa+2)}^k \right) \quad (30) \end{aligned}$$

$\lambda_{(\kappa)}^{pq}$  に関する連立 1 次方程式 (29) を解いて  $\lambda_{(\kappa)}^{pq}$  を定め、それを式 (27) に代入すれば  $\Delta \hat{x}_{(\kappa)}$  が求まる。そして、真の位置  $\tilde{x}_{(\kappa)}$  は次のように推定される。

$$\hat{\tilde{x}}_{(\kappa)} = \hat{x}_{(\kappa)} - \Delta \hat{x}_{(\kappa)} \quad (31)$$

しかし、まだ厳密に三重線形拘束条件を満たしているとは限らない。そこで、

$$\hat{x}_{(\kappa)} \leftarrow \hat{\tilde{x}}_{(\kappa)}, \quad \kappa = 0, \dots, M-1 \quad (32)$$

と更新して、同じ計算を収束するまで反復する。最終的には式 (22) 中の  $\Delta \hat{x}_{(\kappa)}$  は 0 となり、三重線形拘束条件が厳密に成立する。

## 7. 連立 1 次方程式の解法

残る課題は式 (16), (29) をどのようにして解くかである。これが問題になるのは、 $p, q = 1, 2, 3, \kappa = 0, \dots, M-3$  に対する  $9(M-2)$  個の方程式の内  $2M$  個のみが線形独立で、係数行列のランクが  $2M$  となることである。その理由は、独立な未知数が各画面上での補正成分  $\Delta x_{(\kappa)}$ ,  $\Delta y_{(\kappa)}$  の  $2M$  個しかないからである。さらに問題になるのは、補正の反復が収束したときは、ランクが  $2M-3$  に低下することである。この背景は次の通りである。

式 (2) は  $x(0), y(0), \dots, x(M-1), y(M-1)$  の作る  $2M$  次元空間に  $9(M-2)$  個の 3 次多項式超曲面を定義する。それらの交わり  $S$  が対応点 (視線が 1 点で交わる) の組の集合の解空間である。対応点の組とそれらの視線の 3 次元空間の交点とが一一対応するから、解空間  $S$  は 3 次元代数多様体である。したがって、解空間  $S$  は局所的には  $2M-3$  個の超曲面の交わりとして定義され通る。

制約条件 (4) のもとで式 (3) を最小化することは、幾何学的には  $2M$  次元空間内の与えられた点  $\xi = (x(0), y(0), \dots, x(M-1), y(M-1))$  に対して、 $\xi$  から最も近い解空間  $S$  上の点  $\hat{\xi} = (\hat{x}(0), \hat{y}(0), \dots, \hat{x}(M-1), \hat{y}(M-2))$  を求めよという問題となる。式 (16), (29) は式 (2) を線形化して得られるから、解空間  $S$  上にない点  $\xi$  においてはランクは  $2M$  であるが、 $\xi$  が  $S$  に近づくにつれて悪条件となり、 $S$  に一致する瞬間にランク  $2M-3$  になる。

このことから、式 (16), (29) を解くには初めから  $9(M-2)$  個のうち最も独立性の高い  $2M-3$  個の方程式を選んで解けばよい。すると式 (29) は初期には厳密には満たされないが、補正した  $\xi$  が解空間  $S$  上に到達した段階で式 (29) が厳密に満たされる。その点  $\hat{\xi}$  は式 (19), (20) の定義より、解空間  $S$  上の  $\xi$  から最も近い点となっている。



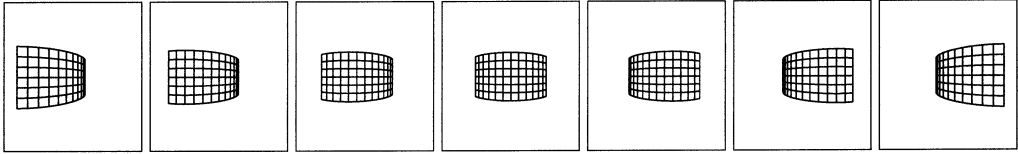


図 4: 曲面格子パタンの 7 画像.

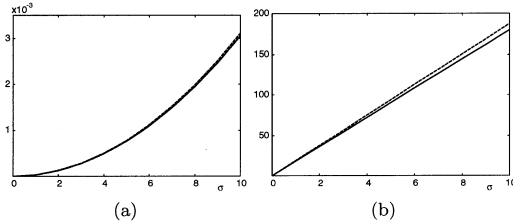


図 5: (a) 画像面上の平均再投影誤差. (b) 3次元空間中の RMS 誤差. 実線: 提案手法. 破線: 最小二乗法. 点線: 理論的期待値  $(2M - 3)(\sigma/f_0)^2$ .

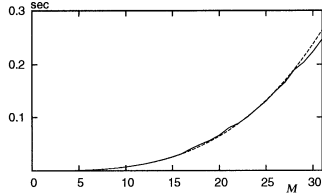


図 6: 画像数  $M$  (横軸) に対する実行時間 (秒). 点線は  $aM^e$  の形の近似 ( $a = 4.17 \times 10^{-6}$ ,  $e = 3.22$ ).

方法の結果は理論的期待値にほぼ一致し、最尤推定が行われていることが確認される。

図 5(b) の実線は復元した 3 次元位置と真の位置の距離の二乗の全格子点の平均を異なる誤差に対して平均したものの平方根 (RMS 誤差) である。破線は最小二乗法の結果である。これから、最小二乗法とは画像上での再投影誤差ではそれほど変わらないように見えるが、3 次元位置で比較するとはっきり差があることがわかる。

## 9.2 実行時間

図 6 は  $\sigma = 5$  画素の誤差に対して、画像数を  $M = 3, 4, \dots, 31$  と変化させたときの、8 節のアルゴリズムの 1 点当たりの実行時間 (秒) である (各格子点に対する平均をさらに異なる誤差の 10 回の試行に対して平均した)。ただし、三重焦点テンソルの計算および 3 次元位置の計算は含めていない。計算には C++言語を用い、CPU には Intel Core2Duo E6850, 3.0GHz, 主メモリ 4GB, OS には Windows Vista を用いた。

検討すると、実行時間のほとんどが連立方程式を

解くための特異値分解に費やされていた。図 6 中の点線は実行時間を画像数  $M$  に対して  $aM^e$  の形に近似したものである (対数をとって最小二乗法を用いた)。これによると、計算量は  $O(M^{3.22})$  である。

従来の方法は  $E(X, Y, Z) = \sum_{\alpha=0}^{M-1} (\dots)$  の形の関数の大域的最小化を行っているため、その実行時間は  $M$  に対してはほぼ線形とみなせる。したがって、 $M$  が大きいときは従来の方法のほうが有利である。しかし、実際問題では特徴点数は無数にあっても、一つの特徴点が見えているフレーム数には限度があり、10 フレーム程度であることが多い。そのような応用では本論文の方法が有利であると考えられる。

なお、式 (2) のような三重焦点テンソルを含む式をそのまま計算すると、 $\sum_{i,j,k,l,m=1}^3$  の和にかなりの実行時間を必要とする。しかし、 $\epsilon_{ljp}$  の性質により、実際に計算する項数は非常に少ないので、 $\epsilon_{ljp}$  を含まない形に変形することによって計算が非常に効率化する (詳細は前報 [17] 参照)。

## 9.3 実測データ

英国 Oxford 大学<sup>8</sup>が提供している実測データに対して実験を行った。これは恐竜の模型 (図 7(a)) を回転台に載せて、36 方向から撮影したものである。抽出した特徴点は合計 4983 個あり、それぞれ 2 ~ 21 フレームに渡って対応付けられている。図 7(b) はデータを 3 次元復元し、それをある方向から眺めたものである。2 点のみの対応が与えられている場合は金谷ら [13] の方法を用いた。Kahl ら [9] の最適化法<sup>9</sup>を用いてもほぼ同じ結果が得られたが、我々の解の再投影誤差が常に彼らの値を下回った<sup>10</sup>。

提案方法ですべての特徴点の 3 次元位置を計算する全体の実行時間 (三重焦点テンソルの計算および 3 次元位置の計算を含む) は前述の計算環境で 2.22 秒 (1 点当たり 0.000446 秒) であった。これを Matlab で実装された Kahl らのプログラムで実行すると、5030 秒 (1 点当たり 1.01 秒) であった (CPU は Intel

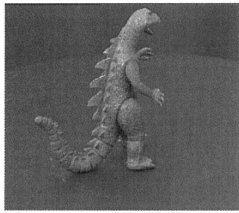
<sup>8</sup>以下から入手できる。

<http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data.html>

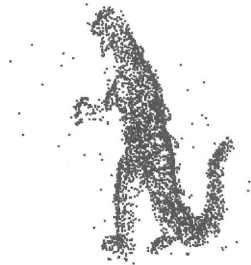
<sup>9</sup>以下に公開されている。

<http://www.cs.washington.edu/homes/sagarwal/code.html>

<sup>10</sup>Kahl ら [9] の計算に含まれる Matlab 最適化ツール SeduMi の反復打ち切りの設定に起因すると推定される。



(a)



(b)

図 7: (a) 恐竜模型. (b) その 3 次元復元.

Core2Duo E6400 2.13GHz, 主メモリ 2GB, OS は WindowsXP). その実行時間のほとんど (98%) は SeDuMi という部分的に C で書かれた Matlab 最適化ツールに費やされている. 別の復元データを使った例で, Lu ら [15] の分枝限定法の C++ による実装では 1 点当たり約 0.02 秒, Kahl らのアルゴリズムの純粋な Matlab の実装では 1 点当たり約 6 秒ということである.

以上の比較からも, 提案手法はこの程度のデータであれば従来のどの方法よりも効率的であると言える.

## 10. まとめ

本論文では任意枚数の画像の対応点からその 3 次元位置を最適に計算する三角測量の新しい計算法を示した. これは前報 [17] の 3 画像の場合を一般の枚数の画像に拡張したものである<sup>11</sup>.

本論文の方法はデータをその直積空間において, 拘束条件の定義する代数多様体上へ直交射影するものであり, 3 次元空間の無限領域を探索する必要がない. 拘束条件としては 3 画像間の三重線形拘束条件を組み合わせた. プログラムは単なる代数計算のみからなり, 何ら特別の最適化ライブラリを必要としない. そして, 従来のどの方法よりも効率的に実行できる.

なお, シミュレーションおよび実データ実験において, 最小二乗法を初期値とするレーベンバーグ・マーカート法によって再投影誤差を最小化したところ, すべて提案手法と同一の解に収束した. Kahl ら [9], Lu ら [15], Hartley ら [5] も, 通常の応用では最小二乗法を初期値とするレーベンバーグ・マーカート法によって最適解が得られることを指摘している.

謝辞 情報交換したスウェーデン Lund 大学の Fredrik Kahl 氏, Martin Byröd 氏, オーストラリア国立大学の Fanfang

<sup>11</sup>以下にプログラムを公開している.

<http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.php>

Lu 氏, 韓国 Sogang 大学の Yongduck Seo 氏に感謝する.

## 参考文献

- [1] M. Byröd, K. Josephson, and K. Åström, Fast optimal three view triangulation, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 2, pp. 549–559.
- [2] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-6 (1997-6), 580–593.
- [3] R. Hartley and F. Kahl, Optimal algorithms in multiview geometry, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 1, pp. 13–34.
- [4] R. Hartley and F. Schaffalitzky,  $L_\infty$  minimization in geometric reconstruction problems, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June-July 2004, Washington DC, U.S.A., Vol. 1, pp. 504–509.
- [5] R. Hartley and Y. Seo, Verifying global minima for  $L_2$  minimization problems, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June 2008, Anchorage, AK, U.S.A.
- [6] R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*, **68**-2 (1997-11), 146–157.
- [7] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [8] F. Kahl, Multiple view geometry and the  $L_\infty$ -norm, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vision*, October 2005, Beijing, China, Vol. 2, pp. 1002–1009.
- [9] F. Kahl, S. Agarwal, M. K. Chandraker, D. Kriegman, and S. Belongie, Practical global optimization for multiview geometry, *Int. J. Comput. Vision*, **79**-3 (2008-9), 271–284.
- [10] F. Kahl and D. Henrion, Global optimal estimates for geometric reconstruction problems, *Int. J. Comput. Vision*, **74**-1 (2007-8), pp. 3–15.
- [11] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, *情報処理学会論文誌*, **37**-3 (1996-3), 363–370.
- [12] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- [13] 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2 画像からの三角測量: Hartley vs. 最適補正, *情報処理学会研究報告*, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335–342.
- [14] Q. Ke and T. Kanade, Quasiconvex optimization for robust geometric reconstruction, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **29**-10 (2007-10), 1834–1847.
- [15] F. Lu and R. Hartley, A fast optimal algorithm for  $L_2$  triangulation, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 2, pp. 279–288.
- [16] H. Stewénius, F. Schaffalitzky, and D. Nistér, How hard is the three-view triangulation really?, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vision*, October 2005, Beijing, China, Vol. 1, pp. 686–653.
- [17] 菅谷保之, 新妻弘崇, 金谷健一, 3 画像からの最適三角測量, *情報処理学会研究報告*, 2008-CVIM-164-1 (2008-9).