知識工学と人工知能 56－14
（1988. 1. 13）

問題解決における戦略学習システム：PiL

－ 直接解決可能性に基づく一般化 －

山田誠二　安部憲広　辻三郎
大阪大学・基礎工学部

問題解決の戦略知識を獲得するシステム：PiL（Paradigm－based inference Learner）に対する、従来の「説明に基づく一般化：EBG（ Explanation－Based Generalization ）」を拡張した一般化手法である「直接解決可能性に基づく一般化：DBG（ Direct solvablity－Based Generalization）」の適用について報告する。まず、前半ではPiLシステムの概要及びその基本動作と「説明に基づく一般化」を説明し、後半で「直接解決可能性に基づく一般化」の説明及びPiLの1次方程式及び2次方程式の解法学習におけるEBGとDBGの比較検討を行う。

A leaning system of strategy in problem solving : PiL
(Direct solvablity－Based Generalization)

Seiji YAMADA, Norihiro ABE, Sabro TSUJI
Osaka University
Machikaneyama 1－1, Toyonaka, Osaka, JAPAN

We will report a leaning system : PiL and new generalization method DBG (Directsolvablity －Based Generalization). PiL system can acquire strategy knowledge by generalizing given examples. PiL used to use EBG (Explanation－Based Generalization) method. But EBG was insufficient, so a teacher had to tell excess examples. DBG method, we suggest, has more powerful ability of generalization than EBG, so necessary examples decreases. In this paper, we compare DBG method with EBG method in PiL.

1.はじめに

コンピュータに学習機能を持たせようとする試みの一つに例題からの概念学習を問題解決の分野で行うものがある. これは,問題の状態を変化させる基本的な書換えルールを初めに与えておき,システム自身がルールの不適当な適用を避けようにその条件部を精錬することで,問題解決の戦略知識を学習させようというものである.ルールの条件部の精錬は,教師より与えられた（あるいはシステム自身が解決した）解法例を解析することにより行われる.

本報告では,以上のようなパラダイムの基に問題解決における戦略知識の学習を行うシステム PiL (Paradigm−based inference Learner) の基本的動作 [1],[2],[3] について述べ,さらに「直接解決可能性基づく一般化 (Direct solvablity−Based Generalization : DBG)」[4] という新しい一般化手法を提案し,1次及び2次方程式の解法学習における説明に基づく一般化 (EBG) とDBGとの比較検討を行う.

2.システム概要

他の問題解決の分野と同様,方程式の分野においても適用可能な基本オペレータを全て適用していたのでは,探索空間が爆発的に拡大し解に到達することは不可能である [5].これは基本オペレータの条件部が一般的過ぎるためで,適切なときだけ適用されるように条件部を精製する必要がある。PiL は人間の教師に基本オペレータ及び模範的な解法例を与えてもらい,その解法例を肯定例として一般化することにより,書換えルールの条件部を精錬し戦略知識の学習を行う.PiL で用いた1次方程式のための基本オペレータの例を Fig.1 に示す.

Fig.2 にシステム構成図を示す.まず,教師より問題が与えられ,最初は問題解決モジュールが独力でその問題を解こうとする.そして,一定の探索空間で解に至らないときは教師の助力により問題を解決する.こうして解法例が得られると知識管理モジュールがそれを一般化していき,その結果がヒューリスティックオペレータとして蓄えられる.さらに,その中から絶対オペレータ,マクロオペレー

```
rule010  :  LS=RS → LS+A=RS+A,  [],  [not_zero (A)]
rule030  :  LS=RS → LS／A=RS／A,  [],  []
rule210  :  A*B+A*C →  (B+C) *A,  [],  []
rule220  :  0+A → 0,  [],  []
rule230  :  0*A → 0,  [],  []
rule270  :  R1+R2 → 0,  [real_number (R1),real_number (R2),equal (R1,(−1) *R2)],  []
rule280  :  A／A → 1,  [not_zero (A)],  []
rule300  :  R1+R2 → R3,  [real_number (R1),real_number (R2)],  [equal (R3,R1+R2)]
rule320  :  R1／R2 → R3,  [real_number (R1),real_number (R2)],  [equal (R3,R1／R2)]
rule340  :  (A*B) ／C →  (A／C) *B,  [],  []
rule1000  :  1*AL=R → finish,  [alphabet (AL),real_number (R)],  []
```

Fig.1 基本オペレータ

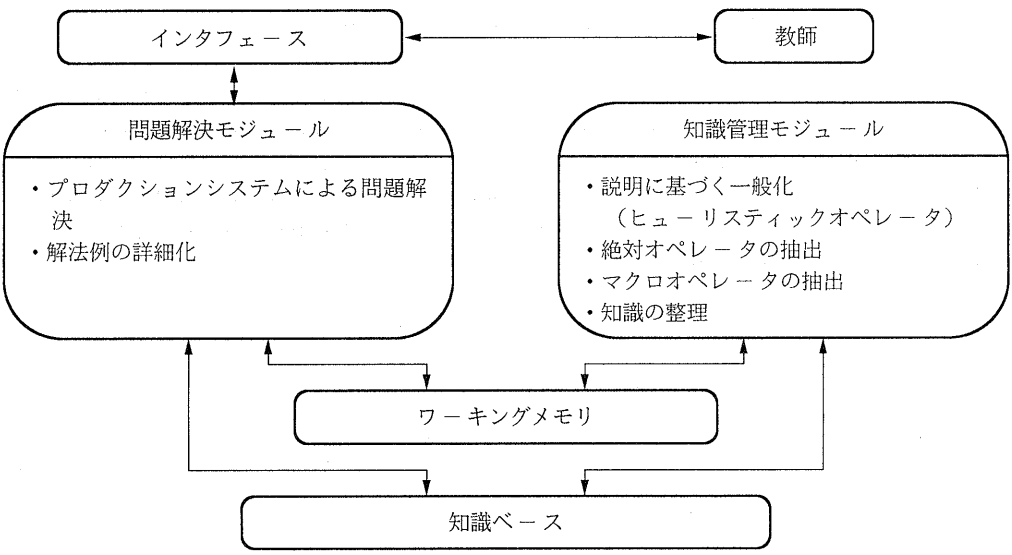

Fig.2 PiL 構成図

タを抽出し,最後に知識の整理をするというサイクルを繰り返す.各々のモジュールの詳細を以降に述べる.

3.問題解決と解法例の詳細化

問題解決モジュールでは,prologによって書かれたプロダクションシステムによる問題解決及び解法例の詳細化が行われる.各種オペレータで構成されている知識ベースは,Fig.3のように階層構造になっており,問題解決モジュールはこの階層を(1)から(4)の順序で適用可能なオペレータを探索していく.現在の階層で適用されるオペレータがなくなったとき下位の階層に制御が移るが,探索中に一つでもオペレータが適用されると,再び(1)に戻り最初から探索が行われる.以下に各オペレータについて述べる.

1) 終了条件ルール･･･教師により与えられるルールで,このルールが適用されれば問題は解決されたことになる.(Fig.1ではrule1000)

2) マクロオペレータ･･･強い因果関係のある特定のオペレータのシーケンスを一つにまとめたオペレータ.複数個のオペレータの適用を迅速に行う.

3) 絶対オペレータ･･･適用可能なとき優先的に必ず適用される単独のオペレータ.

4) ヒューリスティックオペレータ･･･一般化されたオペレータのうち,絶対オペレータ以外のもの.

5) 基本オペレータ･･･最初に与えられる基本的な書換えルール.

教師が自然に与える解法例は,教師が無意識のうちにオペレータの省略を行っており,システムはその部分を補わなければならない.問題解決モジュールは,解法例の次の行をサブゴールとしてオペレータを展開していき,省略された書換えルールを補う.Fig.4の下線部が教師により自然に入力された解法例,そして,Fig.4全体が省略されたオペレータを補い詳細化したものである.

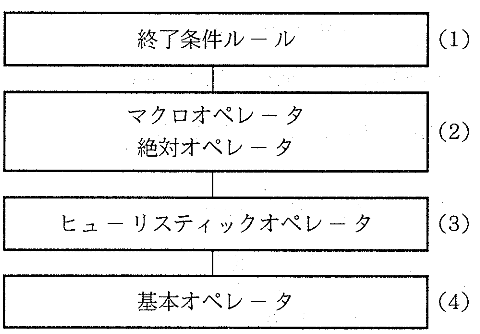

Fig.3 知識の階層

こうして得られた解法シーケンスは肯定例の個々のインスタンスなので一般化しなければならない.

4.知識の管理

知識管理モジュールでは,1)解法例の一般化,2)ルールの重み付け,2)マクロオペレータの抽出,4)知識の整理などが行われる.

4.1 説明に基づく解法例の一般化(EBG)

各ルールの肯定例を得るために,詳細化された解法例の各行を一般化していく.PiLが行う一般化は,展開された各ルールの条件部の適用範囲が最後の終了条件ルールから解法例を後向きに伝搬していくことにより,各行の一般化が行われるという方法で,この手法は近年注目されている,説明に基づく一般化(EBG:Explanation−Based Generalization)[6]の系列に属する.

説明に基づく一般化を具体的な例で説明する.Fig.4に示した解法例を一般化していく過程をFig.5示す.図中で,Rnは任意の実数(nの等しいものは同一の実数),A,B,Cは任意の整式,NA,NBは0以外の任意の整式,LS,RSは左辺・右辺,NRは0以外の任意の実数,ALは任意のアルファベット(変数)を表す.一般化の伝搬は終了条件から始まる.まず,終了条件R1000の条件部の左辺は1と任意のアルファベットの積,右辺は任意の実数でよいので,Fig.4でのL16の左辺の"x"はALに,右辺の"5"は任意の実数R01に一般化され,Fig.5のL16のようになる.次にR320により,L15の右辺の"20"と"4"はR02,NR03に一般化される.さらに,L14ではR280により左辺の"4"と"4"が等しい任意の0でない整式NA1に一般化される.あとは同様にL1まで一般化が行われていく.ここで重要なのは,一般化の伝搬は完全に後向きで行われることである.こうして一般化された解法例は,肯定例と考えられるので,これらの肯定例を各オペレータの元の条件部に連言として付加することにより条件部の精製が行われる.これがヒューリスティックオペレータである.

4.2 一般化伝搬経路の選択

オペレータの適用過程において条件部及び結論部の重複により,複数のオペレータから同一の結果が得られることがある(Fig.4のL2,L7,L14).PiLは一般化伝搬の際にそれらの候補から,伝搬する適用範囲が最も一致しているものを最適な経路として選択する.例えば,Fig.4のL14ではrule280と320が競合しているが,L15はルールの結論部に"1"を求めているので,rule280の方が選択される.他の場合においても同様に※印のルールが選択される.

4.3 オペレータの重み付け(絶対オペレータの抽出)

ある基本オペレータの適用範囲(構造パタン及び拘束

条件）をA,その基本オペレータを一般化して得られたヒューリスティックオペレータの適用範囲をBとし,A／B＝1ときにそのオペレータは絶対オペレータとしてより高い階層に移される.直観的には,絶対オペレータとは適用可能なときは必ず適用される単独のオペレータ（例えば,実数どうしの加減乗除）であると言える.

4.4 マクロオペレータの抽出

人間はある特定のオペレータのシーケンスをマクロオペレータとして持っており,それを用いて問題解決を行っている.そこでPiLも解法例から特定のシーケンスをマクロオペレータとして抽出することにより問題解決の効率を上げる必要がある.PiLでは,完全因果性という基準でマクロオペレータの抽出を行う.

・完全因果性・・・以下に完全因果性の定義を示す.いま,OPi・・・OPj（1≦i＜j≦n：OPnは終了条件ルール）が解法例におけるオペレータのシーケンスとする.そして,OPjのそれぞれの定数化された条件部（拘束部も含む),結論部をPCj,Aj,またOPj以前にOPiと完全因果性のあるオペレータの結論部をAl・・・Amとすると,PCj ⊆ Ai ∪ Al ∪・・・∪ Am が成り立つとき,OPiとOPjには完全因果性があるという.OPi,OPj間に完全因果性があるということは,直感的にはOPi が適用された後には必ずOPj が適用可能であるということを意味し,閉じた強い因果関係があることを表している.完全因果性が連続する場合はその最大のシーケンスを一つのマクロオペレータとして抽出する.

Fig.4の解法例から求められたマクロオペレータの例が,Fig.6に示されたMO－1〜6である.さら終了条件まで含んでいるマクロオペレータ,つまりそのマクロオペレータが適用されれば直接的に問題が解決されてしまうものには,直接解決可能：DS（Directly Solvable）というラベルを付けておく.この直接解決可能なマクロオペレータ

7*x−5=3*x+15 (L1)
↓ rule010 [LS=RS→LS+A=RS+A]
7*x−5+5=3*x+15+5 (L2)
↓ ※rule270 [R−R→0]
rule300 [R1−R2→R3]
7*x+0=3*x+15+5 (L3)
↓ rule220 [NR+0→NR]
7*x=3*x+15+5 (L4)
↓ rule300 [R1+R2→R3]
7*x=3*x+20 (L5)
↓ rule010 [LS=RS→LS+A=RS+A]
7*x−3*x=3*x+20−3*x (L6)
↓ rule210 [A*B−A*C→(B−C)*A]
7*x−3*x=(3−3)*x+20 (L7)
↓ ※rule270 [R−R→0]
rule300 [R1−R2→R3]
7*x−3*x=0*x+20 (L8)
↓ rule230 [0*A→0]
7*x−3*x=0+20 (L9)
↓ rule300 [R1+R2→R3]
7*x−3*x=20 (L10)
↓ rule210 [A*B−A*C→(B−C)*A]
(7−3)*x=20
↓ rule300 [R1+R2→R3]
4*x=20 (L11)
↓ rule030 [LS=RS→LS/NA=RS/NA]
(4*x)/4=20/4 (L12)
↓ rule340 [(A*B)/C→(A/C)*B]
(4/4)*x=20/4 (L13)
↓ ※rule280 [NA/NA→1]
rule320 [R1/R2→R3]
1*x=20/4 (L14)
↓ rule320 [R1/R2→R3]
1*x=5 (L15)
↓ rule1000 [1*AL=R→FINISH]
FINISH！ (L16)

Fig.4 解法例

R04*AL−R12=R05*AL+R10
↑
R04*AL−R12+R12=R05*AL+R10+R11
↑
R04*AL+0=R05*AL+R10+R11
↑
R04*AL=R05*AL+R10+R11
↑
R04*AL=R05*AL+R09
↑
R04*AL−R05*AL=R05*AL+R09−R05*AL
↑
R04*AL−R05*AL=(R06−R06)*A+R09
↑
R04*AL−R05*AL=0*A+R09
↑
R04*AL−R05*AL=0+R02
↑
R04*AL−R05*AL=R02
↑
(R04−R05)*AL=R02
↑
NR03*AL=R02
↑
(NA1*AL)/NA1=R02/NR03
↑
(NA1/NA1)*AL=R02/NR03
↑
1*AL=R02/NR03
↑
1*AL=R01
↑
FINISH！

Fig.5 一般化の伝搬

（DS マクロオペレータ）は後述する「直接解決可能性に基づく一般化」に用いられる.

5. 直接解決可能性に基づく一般化：DBG

以上に述べたような条件連鎖に基づく一般化を用いることにより学習の効率は帰納的一般化に比べてはるかに向上する.しかし,一次・二次方程式からさらに分数方程式,対数・指数方程式へとその解法が複雑になるに従って教師が与えなければならない解法例の量も増え,かつそれらの中には教師からみると冗長なものがかなり含まれてくる.よって,さらに十分な一般化を行うことにより学習の効率を上げる必要がある.

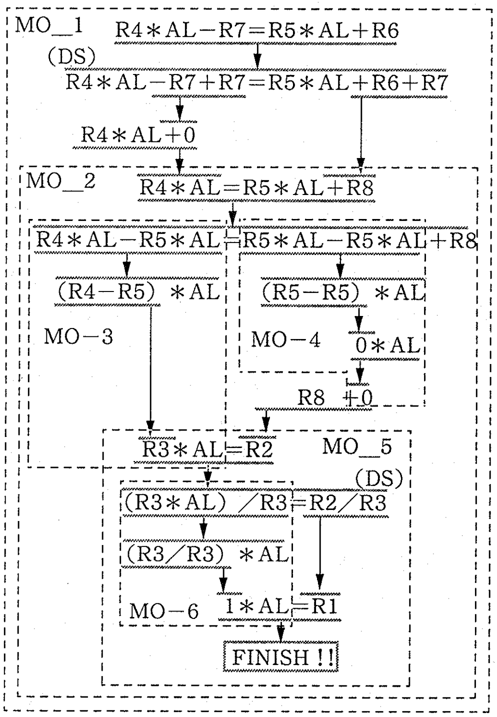

Fig.6 マクロオペレータの抽出

冗長な教示の具体例を Fig.7 で説明する.ここでは一次の分数方程式を教示しているが,この時点で PiL は一次・二次方程式の解法をすでに教えられていて解決可能であるとする.完全因果性により Fig.7 の解法シーケンス全体（一部省略してある）が一つの DS マクロオペレータ：DSM__1 として抽出される.ここで（L1）の左辺の分子である'4' に注目して欲しい.この'4' は（B）のように EBG によって,(L10）に示すように任意の実数 R4 に一般化される.その結果,両辺に左辺の分母と同じ整式を掛けて解いていくというマクロオペレータ：DSM__1 は,この一つの解法例からだけでは,左辺の分子が任意の実数でなければ適用されない.しかし,その他にもこの両辺に左辺の分母と同じ整式を掛けて解いていくというマクロオペレータが適用されるべきである Fig.8 の様な問題が容易に考えられる.従来の EBG ではこれらの問題の各々について改めて解法例を与えてやる必要があり,このことは EBG では一般化が不十分であることを示している.この様な教師にとって冗長に思える解法シーケンスの教示は退屈であり,Fig.7 の一例を与えれば Fig.8 の様な場合全てに対してこのマクロオペレータを適用できるようにシステム自身が一般化することが望まれる.

そこで,ここでは従来の EBG の一般化伝搬とマクロオペレータを用いてより十分な一般化を行う直接解決可能性に基づく一般化（Direct solvablity－Based Generalization : DBG）という手法を提案する.

まず,直接解決可能性について述べる.直接解決可能性をもつ問題状態とは,過去において直接解決可能であった問題状態であり,直接解決可能な状態とは目標状態を含んでいるマクロオペレータ（DS マクロオペレータ）の条件部の和集合に含まれる問題状態を意味する.具体的には,直接解決可能性の有無を判別する述語 DS は DS マクロオペレータの条件部の論理和で表せる.つまり,ある問題状態に対して現在蓄えられている DS マクロオペレータの何れかが適用可能なとき,その問題状態は直接解決可能で

(A)

$$\frac{4}{3*x+2} = 5 \qquad \text{(L1)}$$
$$\frac{4}{3*x+2} * (3*x+2) = 5 * (3*x+2) \qquad \text{(L2)}$$
$$4=15*x+10 \qquad \text{(L3)}$$
$$-15*x=6 \qquad \text{(L4)}$$
$$1*x=-2/5 \qquad \text{(L5)}$$

(B)

$$\frac{R4}{(R7*AL+R8)} = R9 \qquad \text{(L10)}$$
$$\frac{R4}{(R7*AL+R8)} * (R7*AL+R8) = R9 * (R7*AL+R8) \qquad \text{(L9)}$$
$$R4=R5*AL+R6 \qquad \text{(L8)}$$
$$R2*x=R3 \qquad \text{(L7)}$$
$$1*AL=R1 \qquad \text{(L6)}$$

Fig.7 冗長な教示

あるという.

次にDBGについて説明する.解法例が与えられる度にそれが一般化されマクロオペレータが抽出されるが,得られたDSマクロオペレータのうち,内部に他のDSマクロオペレータを包含しているものが全てDBGの対象となる.つまりいま,Fig.9に示すようにあるマクロオペレータ：MO__1が抽出され,それがMO__2というDSマクロオペレータを包含しているとき,MO__1についてDBGが適用可能である.DBGは解法シーケンスにおけるMO__2の領域を切り離して残りの領域R（$=\mathrm{MO\_1} \cap \overline{\mathrm{MO\_2}}$）内のみで従来のEBGの一般化伝搬を行う.このとき,改めて一般化伝搬の最適経路が選択される.これはDBGでは目標状態から条件連鎖した場合とは異なった一般化経路が選択される場合があるからである.このような一般化を行い,実際の問題解決時には解法シーケンスRを通過して得られた結果を今まで得られた全てのDSマクロオペレータの条件部の論理和である述語DSでチェックするのである（Fig.9).従って,一般化伝搬の際にMO__1の条件部にはMO__2内の拘束条件が伝搬されないので,DBGはMO__1の条件部を終了条件からEBGにより一般化する従来の方法よりもさらに一般化することが可能である。また,完全因果性に基づくマクロオペレ－タの抽出により,解法シーケンスのどこで分離して一般化させるかということについて,DSマクロにより検証可能な基準が与えられる.

DBGをFig.7に適用して一般化した過程をFig.10に示す.図中で（A）のシーケンスは詳細化された解法例を表し,(B）がDBGにより一般化された結果を表している.(L1）からオペレータが順次適用されて（L8）においてDSマクロオペレータが適用され目標状態に直接的に到達する.つまり,(L8）において直接解決可能になる.ここでは,完全因果性に基づき（L1）～（Ln）が一つのDSマクロオペレータ：MO__1となり,それが（L8）～（Ln）のDSマクロオペレータ：MO__2を包含しているので,MO__1がDBGの対象になる.そこでMO__2の部分が削られ,残りの部分（L1）～（L8）でEBGによる一般化が行われる.この一般化で（L5）から（L4）に伝搬する際,rule250とrule310の二つの伝搬経路が考えられ,PiLは改めて最適経路の選択を行う.ここでは（B）の（L5）の変数Jは任意の整式でよいので前述の選択手法によりrule250が選択される.以下同様に（L1）まで一般化の伝搬が行われた結果がFig.10の（B）である.ここで注意すべき点は,PiLのEBGはまず式をできるだけ一般化した状態から,オペレ－タの拘束条件を伝搬させ,特殊化するということである。(B）の（L1）を見るとわかるように,終了条件からのEBGによる一般化では任意の実数Rに一般化されていた左辺の分子が,DBGでは拘束条件が伝搬されないことにより,任意の整式Jに一般化されている.この任意の整式Jは（L8）で述語DSよりチェックされる.DSという概念はこの時点でFig.11のようなDSマクロオペレータの条件部の和集合になっているので,JはDSの要素である等式の左辺であればよく,そのときMO__1が適用され問題が解決されることになる.つまり,Fig.7の一例を与えることにより,Fig.8の全ての問題が解決可能になり,学習の効率化が実現される.これは分数方程式の場合に限ったことではなく,指数方程式,対数方程式,無理方程式においてもDBGにより学習効率が向上すると考えられる.

$$\frac{3*x}{3*x+2} = 5$$

$$\frac{3*x^2+6*x+1}{3*x+2} = 5$$

$$\frac{3*x^2+1}{3*x+2} = 5$$

$$\frac{3*x+4}{3*x+2} = 5$$

$$\frac{3*x^2+6*x}{3*x+2} = 5$$

$$\frac{3*x^2}{3*x+2} = 5$$

Fig.8 Fig.7の例により解答可能な問題

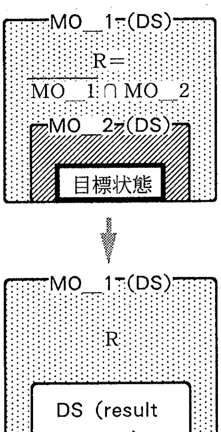

Fig.9 DBGの適用対象

6. 学習能力の評価

本節では,DBGとEBGの学習能力の比較・検討を行うための評価基準の選定を行う.ここで注意すべき点は一般化プロセスの改善により学習システムの能力の一部が向上しても,それに対してシステムの他の能力（例えば,問題解決能力）が低下し,システム全体の能力の改善になっていない場合が起こり得ることである.よって,できる限りシステム全体を総括的にかつ本質的に評価できるような評価基準を選定することが重要である. 一般に,問題解決における例題からの学習手法の能力を評価する基準には,次の様なものが考えられる.

1) システムがあるレベルの学習状態に達するために必須な訓練例の教示にかかるコスト.

2) 学習後の問題解決のパフォーマンスが学習前よりどれほど向上したか.

3) 学習プロセス自体にどれほどのコストがかかるか.

この3つの評価基準のうち,ここでは1）と2）のみに着

目するする.なぜなら,3) はcpuタイムなどで評価されるが,これは学習プロセスのインプリメンテーションをいかにうまく行うかに依存するので本質的な意味が希薄だからである.

次に,1),2) についてPiLに照らし合わせながら,さらに具体的に考えてみる.

まず,1) についてであるが,従来の評価基準では,この訓練例教示のコストを定量的に考慮することはほとんどなかった.しかし,PiLのように解法教示を人間が行うマン・マシン・インタラクティブな学習システムにおいては,この1) のコストは特に重要である.また,この評価基準はコンピュータのハード・ソフトウェアの能力に依存せず,学習システムの能力（特に一般化能力）のみに依存するので本質的である.PiLにおいて,1) の評価基準は,与えた訓練例をシステムが解けない場合,教師が解法例を教示するためにかかるコストと考え,そしてそのコストを,ある学習レベルに達するために必須の訓練例の個数で評価する.ここで必須の訓練例の個数とは,与えた訓練例のうち,あるレベルの学習状態に達するまでに,システム自身では解決できず教師に援助を求めた訓練例の個数である.当然,この必須の訓練例の個数が少ない一般化手法の方が優れていることになる.また,PiLが独力で問題を解けない状態とは,具体的には,ワーキングメモリ中に任意の整式（具体的には,変数）を含むファクトがある場合（このとき展開は爆発する）と,延べのファクト数（変数を含まない）が100個以上になった場合であるとする.

次に,2) の問題解決のパフォーマンス向上とは探索空間が縮小することであり,展開された探索木のノード数,つまりワーキングメモリ中のファクト数が学習後にどれほど減少しているかを調べる.

7. 訓練例教示と実験結果

今回は一次方程式と二次方程式の教示を行い,前述の評

DS概念

$(R3*AL=R1*AL+R2)$
$\vee\ (R3*AL+R4=R1*AL+R2)$
$\vee\ (R3*AL^2+R4*AL+R5=R1*AL+R2)$
$\vee\ (R3*AL^2+R4*AL=R1*AL+R2)$
$\vee\ (R3*AL^2+R4=R1*AL+R2)$
$\vee\ (R3*AL^2=R1*AL+R2)$
⋮

Fig.11 DS概念

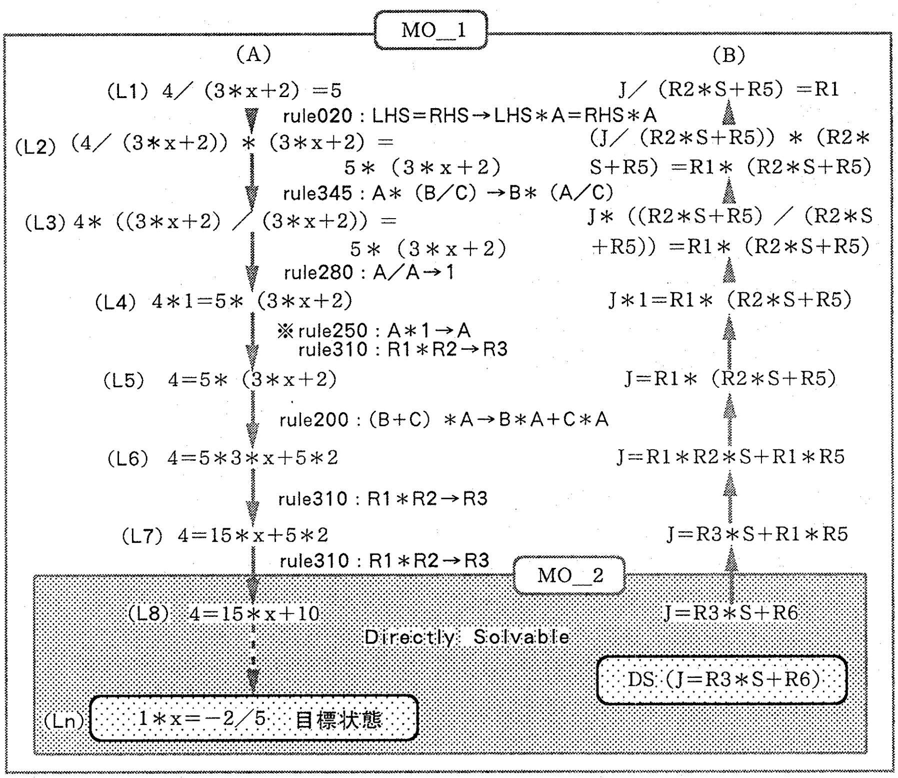

Fig.10 DSに基づく一般化

価基準でEGBとDBGの比較を行った.本実験での訓練例の教示法を以下に述べる.教師はまず中学生用の問題集から一次方程式,二次方程式の問題をそのまま抜き出し,それを順々にPiLに与えていく.そしてPiLが前述の基準で独力での問題解決が不可能なとき,その問題の解法例を与えていく.このような教示法で,一次方程式100問,二次方程式150問以上を与えた結果,PiLはそれらをすべて独力で学習可能な状態に至った.つまり,今回の実験における必須の訓練例とは一次方程式,二次方程式各々について与えた100問,150問の問題を独力で解ける学習状態に達するまでに解法教示が必要な訓練例（問題）を意味する.また,問題解決のパフォーマンス向上の評価として,学習後に必須の問題を解いたときの探索空間の広さを表す,ファクト数を調べた. 実験結果をFig.12に示す.

表中の訓練例は,EBGの必須訓練例で,四角で囲んだ部分がDBGの必須訓練例を表す.これから,明らかなように,1次・2次方程式においてもDBGにより必須訓練例は減少している.反対にファクト数は増加しているが,DBGのDSマクロからEBGの1ステップで解に達するDSマクロを生成できるので,改善可能である.今回,実験した1次・2次方程式においてもDBGの有効性は現われているが,さらに前述の分数方程式や指数・対数方程式ではより有効なことが期待される.

8.まとめと今後の課題

少数の解法例を与えられ,それを解析することにより問題解決の戦略を学習するシステムPiLの基本動作及び直接解決可能性に基づく一般化について報告した.今後は各種方程式の解法学習でのDBGの有効性の検証を行い,さらにPiLを述語表現に対応可能にすることにより積木の世界でのロボットハンドの行動計画,導出法による定理証明におけるヒューリスティック学習などにも応用可能ではないかと考えている.

9.参考文献

[1] 山田,安部,辻：条件連鎖に基づく一般化による学習,第1回人工知能学会大会資料, pp.81－84 (1987)

[2] 山田,安部,辻：解法例からの問題解決知識の獲得－1次方程式・不等式の場合－,情報処理学会,人工知能と知識工学研究会資料, 87－AI－54 (1987)

[3] 山田,安部,辻： 問題解決における戦略知識学習システム ： PiL,人工知能学会誌（'88・5月号掲載予定）

[4] 山田,安部,辻： 問題解決における学習システム ：PiL,「人工知能の枠組シンポジウム」資料集 (1987)

[5] A.バンディ：メタレベル推論と意識,pp.187－203,「AIと哲学」,産業図書 (1985)

[6] Mitchell,T.M., Keller & Kadar－Cabelli : Explanation－Based Generalization : A Unifying View, pp.47－80, Machine Learnig, 1－1 (1986)

必須訓練例	ファクト数	
1次方程式	EBG	DBG
5＊x= (－5)	1	1
10=2＊x	1	3
2＊x+6=12	1	3
6＊x+3=4＊x－5	1	4
3＊ (2＊x－4) =5＊x+8	2	5
(1＊x) ／3－1= (2／3) ＊x+ (1／2)	2	5
(1＊x－1) ／3+2＊x=9	3	5
15=5＊x－5	1	4
0.3＊ (1＊x－2) －0.4= (－1.2) ＊x	3	6
2次方程式	EBG	DBG
x＊x－9=0	1	1
2＊x＊x=8	1	2
(1＊x+3) ＊ (1＊x+3) =16	2	3
x＊x+6＊x=5	1	4
x＊x－4＊x+2=0	1	5
2＊x＊x+10＊x+6=0	1	6
(4＊x－3) ＊ (4＊x－2) =0	2	7
2＊x＊x+10＊x=0	1	5
x＊x=6＊x	1	5
x＊x+36= (－12) ＊x	1	6
x＊x= (－6) ＊x－9	1	7
(－20) ＊y+100=2＊y＊y	1	7
5＊x＊x=3＊x	1	6
3＊x＊x－9=0	1	3
(1＊x－1) ＊ (1＊x－1) －9=0	1	4
0=x＊x－12	1	3
36=3＊x＊x	1	3
0=5＊x＊x－55	1	4
6=x＊x+10＊x	1	5
0=x＊x－3＊x－10	1	6
0=4＊x＊x+40＊x+8	1	7
9＊x=x＊x	1	6
(－12) ＊x＊x=x＊x+3	1	9
(－6) ＊x+9=x＊x	1	8
4＊y＊y= (－40) ＊y+20	1	8
6＊x=10＊x＊x	1	7
6=2＊x＊x+20＊x	1	6

Fig.12 1次、2次方程式での必須訓練例